Вариант ЕГЭ по математике (профильный уровень).

Тренировочный вариант ЕГЭ № 225 с сайта: alexlarin.net

Задание 1.

Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 2000 рублей. До установки счётчиков за воду платили 1500 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 1200 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?

Решение:

Через 7 месяцев. На самом деле, экономия в месяц будет 300 руб. Тогда за 7 месяцев она составит 2100 рублей.

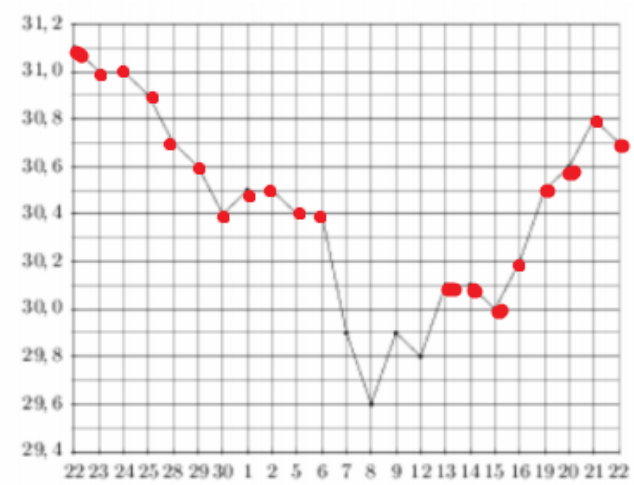
Ответ: 7.

Задание 2.

На рисунке жирными точками показан курс доллара, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 22 сентября по 22 октября 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена доллара в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода курс доллара превышал курс 30 рублей за один доллар.

Решение:

Отметим в каких числах курс доллара превышал 30 рублей:

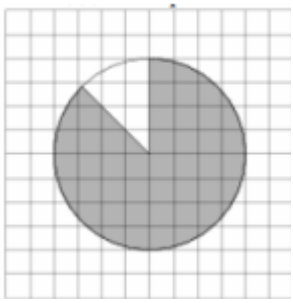


Считаем кол-во отмеченных точек: 18.

Ответ: 18.

Задание 3.

На клетчатой бумаге изображён круг. Какова площадь круга, если площадь заштрихованного сектора равна 56?



Решение:

Площадь сектора равна 7/8 площади круга.

Тогда площадь круга равна $S=\frac{8}{7}*56=64$.

Ответ: 64.

Задание 4.

Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию A = {сумма очков равна 8}?

Решение:

Этому событию благоприятствуют 5 исходов:

2 6, 6 2, 5 3, 3 5, 4 4.

Ответ: 5.

Задание 5.

Найдите корень уравнения $10^{2x+1.7} = \sqrt{0.1}$.

Решение:

$10^{2x+1.7} = \sqrt{0.1}$

$2x + 1.7 = -0.5$

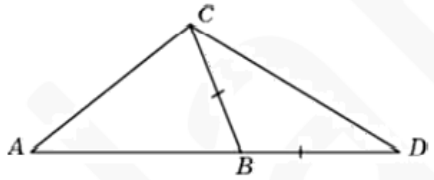
$2x = -2.2$

$x = -1.1$.

Ответ: -1.1.

Задание 6.

В треугольнике ABC угол A равен 38°, угол C равен 26°. На продолжении стороны AB за точку B отложен отрезок BD, равный стороне BC. Найдите угол D треугольника BCD. Ответ дайте в градусах.



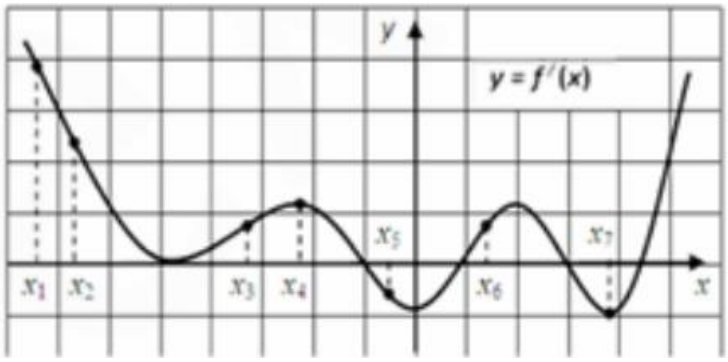
Решение:

В треугольнике ABC угол B равен 180−26−38=116 градусов. Он внешний угол треугольника BCD, тогда он равен сумме равных углов BCD и BDC. Тогда угол BDC равен 58 градусов.

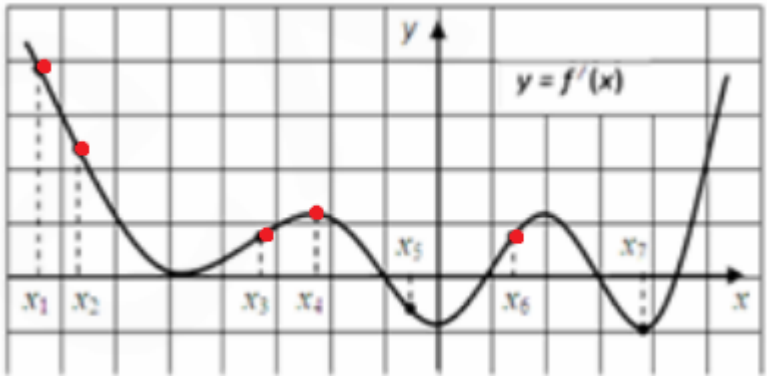
Ответ: 58.

Задание 7.

Дан график производной функции y=f′(x) и отмечены семь точек: x1,...,x7. В скольких из этих точек функция y=f(x) возрастает?



Решение:

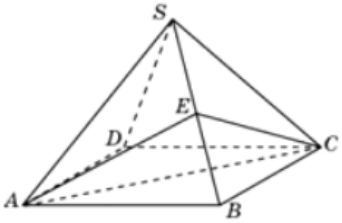


Функция возрастает в тех точках, в которых положительна ее производная. Таких точек 5 штук, они отмечены на рисунке.

Ответ: 5.

Задание 8.

Объем правильной четырехугольной пирамиды SABCD равен 60. Точка E – середина ребра SB. Найдите объем треугольной пирамиды EABC.



Решение:

У малой пирамиды высота в два раза меньше высоты большой пирамиды, а площадь основания также в два раза меньше площади основания пирамиды SABCD.

Тогда объем малой пирамиды равен V=0.5∗0.5∗60=15.

Ответ: 15.

Задание 9.

Вычислите $\log_2 13 * \log_{13} 32 - 100^{lg5} - \log_8 5 + \log_8 320$.

Решение:

$$log_2 13 * log_{13} 32 - 100^{lg5} - log_8 5 + log_8 320 =$$

$$= \frac{log_{13} 32}{log_{13} 2} - 10^{lg25} + log_8 \frac{320}{5} =$$

$$= log_2 32 - 25 + log_8 64 = 5 - 25 + 2 = -18.$$

Ответ: -18.

Задание 10.

Для сматывания кабеля на заводе используют лебедку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t – время в минутах, ω = 45° /мин - начальная угловая скорость вращения катушки, а β = 6°/мин^2 - угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 3000°. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

Решение:

$3000 = 45t + \frac{6t^2}{2}$

$3t^2 + 45t - 3000 = 0$

$t^2 + 15t - 1000 = 0$

$t_1 + t_2 = -15 \Rightarrow t_1 = 25$

$t_1 * t_2 = 1000 \Rightarrow t_2 = -40$

Ответ: 25.

Задание 11.

Бригада маляров красит забор длиной 300 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за второй и предпоследний день в сумме бригада покрасила 50 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

Решение:

Пусть план x м забора вдень. Рабочие работали n дней. Ежедневно они увеличивали план на y м в день. Воспользуемся свойствами арифметической прогрессии и из двух условий запишем два уравнения, которые решим в системе.

$$(x+y)+x+(n-2)y=50$$

$$\frac{2x+y(n-1)}{2} * n = 600.$$

Во втором уравнении вынесем n за скобку и с учетом первого уравнения увидим, что $n=\frac{600}{50}=12$.

Ответ: 12.

Задание 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = 4^x - 8 * 2^x + 1$ на отрезке [1;3].

Решение:

Сделаем замену $2^x = z$, тогда получим

$$y = z^2 - 8z + 1, [2; 8].$$

$$y' = 2z - 8$$
$$y' = 0$$
$$z = 4$$
$$y(2) = -11$$
$$y(4) = -15$$
$$y(8) = 1.$$

Ответ: -15.

Задание 13.

Дано уравнение $\sin 7x - \cos 6x - \sin 5x = 2\sin x + 5$

А) Решите уравнение.

Б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-7\pi; -5\pi]$

Решение:

(а) $\sin 7x-\cos 6x-\sin 5x=2\sin x+5 \Leftrightarrow 1-\cos 6x+2\sin x\cos 6x-2\sin x=6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-\cos 6x-2\sin x\cdot(1-\cos 6x)=6 \Leftrightarrow (1-\cos 6x)(1-2\sin x)=6 \Leftrightarrow 2\sin^2 3x\cdot(1-2\sin x)=6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2 3x\cdot(1-2\sin x)=3$ (*).

Заметим, что $0\le\sin^2 3x\le 1$ при $\forall x$, но при $\sin 3x=0$ получим $0=3$, что неверно $\Rightarrow 0<\sin^2 3x\le 1$, тогда и второй множитель $1-2\sin x>0$. С другой стороны, учитывая ограниченность функции $y=\sin x$, получим: $\sin x\ge -1 \Leftrightarrow -2\sin x\le 2 \Leftrightarrow 1-2\sin x\le 3$. Почленно перемножим неравенства $\sin^2 3x\le 1$ и $1-2\sin x\le 3$ (поскольку их левые и правые части – положительные числа), получим: $\sin^2 3x\cdot(1-2\sin x)\le 3$.

Наибольшее значение произведения двух положительных выражений достигается тогда, когда каждое из этих выражений достигает своего максимума $\Rightarrow$ уравнение (*) равносильно системе:

$$\begin{cases}\sin^2 3x=1,\\ 1-2\sin x=3;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2 3x=1,\\ \sin x=-1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2 3x=1,\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z;\end{cases}$$

Подставим решение (2) уравнения в левую часть (1) уравнения:

$\sin^2 3\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)=\sin^2\left(-\dfrac{3\pi}{2}+6\pi n\right)=\sin^2\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)=1,\ n\in Z$, оно удовлетворяет (1) уравнению $\Rightarrow$

$-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$ – решение системы и, соответственно, исходного уравнения.

(б) Отбор корней $\in[-7\pi;-5\pi]$ проведём с помощью двойного неравенства:

$-7\pi\le-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\le-5\pi \Leftrightarrow -7\le-\dfrac{1}{2}+2n\le-5 \Leftrightarrow -14\le-1+4n\le-10 \Leftrightarrow -13\le 4n\le-9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3\dfrac{1}{4}\le n\le-2\dfrac{1}{4},\ n\in Z \Rightarrow n=-3,\ x=-\dfrac{\pi}{2}-6\pi=-\dfrac{13\pi}{2}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$; б) $-\frac{13\pi}{2}$.

Задание 14.

В правильной шестиугольной пирамиде $PABCDEF$ боковое ребро наклонено к основанию под углом $\alpha=arctg\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

а) Докажите, что плоскости APB и DPE перпендикулярны.

б) Найдите отношение радиуса сферы, касающейся всех граней пирамиды, к радиусу сферы, проходящей через все вершины пирамиды.

Решение:

а)Пусть a – сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$.

Тогда $BO=a; KO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; PO=BO\cdot tg\alpha=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \Delta POK$ – равнобедренный, $\angle PKO=45^\circ=\angle PTO$. Тогда $\angle KPT=90^\circ$, т.е.

$PK\perp PT$.

$PK\perp AB, DE\parallel AB \Rightarrow PK\perp DE$ и $PK\perp(DPE)$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

$PK\subset(APB), PK\perp(DPE)\Rightarrow(APB)\perp(DPE)$.

б)Пусть S_1, S_2 – центры вписанной и описанной сфер, а r и R – их радиусы. В ΔBOS_2 $S_2O = PO - PS_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2} - R$;

$BS_2{}^2 = BO^2 + S_2O^2$, т.е. $R^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - R\right)^2$, откуда

R = $\frac{7\sqrt{3}}{12}$ a.

$S_1N \perp PK, \Delta PNS_1 \sim \Delta POK$ и $\frac{S_1N}{KO} = \frac{PS_1}{PK}$. $S_1N = r, KO = \frac{a\sqrt{3}}{2}, PS_1 = PO - r = \frac{a\sqrt{3}}{2} - r, PK = \sqrt{2}KO =$

$= \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Тогда $\frac{r}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} - r}{\frac{a\sqrt{6}}{2}}$, откуда

r = $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)}{2}$a и $\frac{r}{R}$ = $\frac{6(\sqrt{2}-1)}{7}$

Ответ: $\frac{6(\sqrt{2}-1)}{7}$.

Задание 15.

Решите неравенство: $\frac{\log_x 32}{\log_2 x - \log_x 4 + 1} \leqslant \log_{\frac{x}{2}} 8 + \log_{4x} x$.

Решение:

$$\frac{\log_x 32}{\log_2 x - \log_x 4 + 1} \leqslant \log_{\frac{x}{2}} 8 + \log_{4x} x \iff \frac{\frac{5\ln 2}{\ln x}}{\frac{\ln x}{\ln 2} - \frac{2\ln 2}{\ln x} + 1} \leqslant \frac{3\ln 2}{\ln x - \ln 2} + \frac{\ln x}{2\ln 2 + \ln x}.$$ Пусть $t = \frac{\ln x}{\ln 2}$. Тогда:

$$\frac{\frac{5}{t}}{t - \frac{2}{t} + 1} \leqslant \frac{3}{t-1} + \frac{t}{t+2} \iff \frac{5}{t^2+t-2} \leqslant \frac{3(t+2)+t^2-2}{(t-1)(t+2)} \iff \frac{t^2+2t+1}{(t-1)(t+2)} \geqslant 0 \iff \frac{(t+1)^2}{(t-1)(t+2)} \geqslant 0.$$

Методом интервалов: $+ \quad -2 \quad - \quad -1 \quad - \quad 0 \quad + \quad 1 \quad + \quad t$ получаем: $t < -2 \vee t = -1 \vee t > 1 \iff \log_2 x < \log_2 \frac{1}{4} \vee \log_2 x =$

$= \log_2 \frac{1}{2} \vee \log_2 x > \log_2 2 \iff 0 < x < \frac{1}{4} \vee x = \frac{1}{2} \vee x > 2.$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{4}\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup (2; +\infty)$.

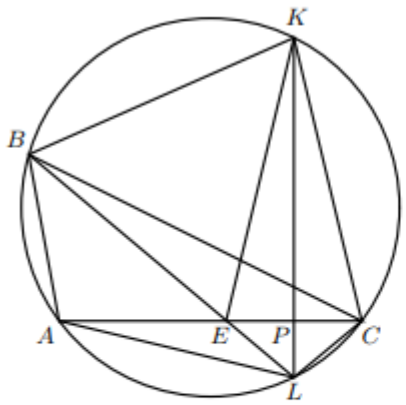
Задание 16.

Треугольник ABC ($|AB| = |AC|$) вписан в окружность. На стороне AC отмечена точка E так, что $|AE| = |AB|$. Серединный перпендикуляр к отрезку CE пересекает дугу BC, не содержащую точки A, в точке K.

а) Докажите, что AK является биссектрисой угла BAC.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABKE$, если известно, что $|AB| = 5$, $|AC| = 11$, $|BC| = 10$.

Решение:



а) Пусть $(BE) \cap \omega(0, |OA|) = \{L, B\}$, тогда $\angle ABE = \angle AEB = \angle CEL = \angle ACL$, следовательно $\triangle CLE$ — равнобедренный и, если $P \in (AC)$ и $|EP| = |EC|$, то (LP) — серединный перпендикуляр к (AC), т.е. $K \in (LP)$. Но $\angle BLK = \angle KLC = \angle BAK = \angle KAC \Rightarrow [AK)$ — биссектриса угла BAC, что и требовалось доказать.

б) Поскольку $[AK)$ — биссектриса угла BAC, как доказано выше, то $(AK) \perp (BE)$, т.е $S_{ABKE} = \frac{1}{2}|AK| \cdot |BE|$. Пусть $\alpha = \angle BAC$. Из $\triangle ABC$ по теореме косинусов: $\cos\alpha = \frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{2|AB||AC|} = \frac{25 + 121 - 100}{2 \cdot 5 \cdot 11} = \frac{23}{55}$. Тогда из $\triangle ABE$ имеем: $|BE| = \sqrt{2|AB|^2 - 2|AB|^2\cos\alpha} = |AB|\sqrt{2 - \frac{46}{55}} = \frac{40}{\sqrt{55}}$.

Используя формулу двойного угла, имеем: $\cos\angle KAC = \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{39}{55}}$. Поскольку $|EP| = \frac{1}{2}|EC| = \frac{1}{2}(|AC| - |AB|) = 3$, то $|AE| = 8$ и, из $\triangle AEK$: $|AK| = \frac{|AP|}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 8\sqrt{\frac{55}{39}}$.

Наконец, $S_{ABKE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{40}{\sqrt{55}} \cdot \frac{8\sqrt{55}}{\sqrt{39}} = \frac{160}{\sqrt{39}}$.

Ответ: б) $S_{ABKE} = \frac{160}{\sqrt{39}}$.

Задание 17.

1 июля гражданка взяла в кредит S млн. рублей. Условия его возврата таковы:

- 15 числа каждого месяца сумма долга увеличивается на 10% по сравнению с началом текущего месяца.
- с 16 по 28 число месяца лог должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц	07	08	09	10	11	12	01	...	
S	$S-0,5$	$S-0,9$	$S-1,2$	$S-1,4$	$S-1,5$	$S-1,6$	...	0	

(начиная с декабря, долг равномерно уменьшался на 100 тыс. руб).

Определите: а) размер кредита; б) через сколько месяцев он был полностью погашен, если известно, что все время кредитования было выплачено 4,16 млн. рублей.

Решение:

Согласно условию, после выплаты за первые месяцы неравномерных выплат, оставшаяся сумма кредита была равна целому числу сотен тысяч рублей. Поэтому будем измерять кредит в сотнях тысяч рублей. Пусть n — целое количество месяцев, в которые долг уменьшался равномерно. За эти месяцы было выплачено:

$$n + 0,1\frac{n^2+n}{2}$$

сотен тысяч рублей. За время неравномерного уменьшения долга было уплачено:

$$0,1S + 5 + 0,1S - 0,5 + 4 + 0,1 - 0,9 + 3 + 1,S - 1,2 + 2 = 0,4S + 11,4 \text{ сотен тысяч рублей}$$

При этом, очевидно, $n = S - 14$. Таким образом, получаем уравнение:

$$n + 0,4S + 11,4 + 0,1\frac{n^2+n}{2} = 41,6$$

После упрощения получаем: $n^2 + 29n - 492 = 0$, откуда $n = 12$. То есть, $S = 26 \cdot 10^5$ руб. $= 2,6$ млн. руб, а продолжительность кредитования составила 16 месяцев.

Ответ: а) 2.6 млн. рублей; б) 16 месяцев.

Задание 18.

Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x + y + 9(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - 3\sqrt{xy} = 86 - a^2; \\ \sqrt{xy} - 7(\sqrt{x} + \sqrt{y} = a^2 + a - 45. \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение:

Сделаем замену переменных: пусть $u = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, $v = \sqrt{xy}$. При положительных значениях u и v система $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = u, \\ \sqrt{xy} = v \end{cases}$ имеет решения, если

$$D = u^2 - 4v \geqslant 0.$$

Следует добавить, что эти же требования обеспечивают и положительность решений этой системы.

Получаем систему:

$$\begin{cases} u^2+9u-5v=86-a^2; \\ v-7u=a^2+a-45. \end{cases}$$

Умножив второе уравнение на 5 и сложив уравнения системы, получаем уравнение-следствие:

$$u^2-26u+169=4a^2+5a+30,$$

откуда

$$\begin{cases} u=13\pm\sqrt{4a^2+5a+30}, \\ v=46\pm7\sqrt{4a^2+5a+30}+a^2+a. \end{cases}$$

В случае, когда пара $(u;v)$ положительных чисел удовлетворяет условию (1) мы получаем два решения исходной системы. Для получения трёх решений необходимо, чтобы одна из найденных пар $(u;v)$ давала решение вида $(x;x)$, а вторая — два решения: $(m;n)$ и $(n;m)$. Заменяя в исходной системе y на x, получаем систему:

$$\begin{cases} 18\sqrt{x}-x=86-a^2, \\ x-14\sqrt{x}=a^2+a-45. \end{cases}$$

откуда, складывая уравнения, получаем: $x=\left(\frac{a+4}{4}\right)^2$. Подставляя это значение во второе уравнение, имеем:

$$\frac{a^2+82a+1681}{16}-\frac{7}{2}(a+41)=a^2+a-45.$$

Преобразуя, получаем уравнение: $3a^2-2a-21=0$. Его корни: $a=3$ и $a=-\frac{7}{3}$.

Для значения $a=3$ проверим условие положительности для v:

$$46-7\sqrt{36+15+30}+9+3=58-7\sqrt{81}=58-63<0.$$

Таким образом, получаем, что для $a=3$ исходная система имеет не более двух решений, т.е. $a=3$ не является решением задачи.

Проверим теперь значение $a=-\frac{7}{3}$. Получаем, соответственно две пары $(u;v)$: $\left(19\frac{1}{3};93\frac{4}{9}\right)$ и $\left(6\frac{2}{3};4\frac{7}{9}\right)$. Для первой пары $D=0$, что соответствует паре $(x;x)$, для второй $D=44\frac{4}{9}-19\frac{1}{9}>0$, что даёт две пары $(x;y)$.

Ответ: а = - $\frac{7}{3}$.

Задание 19.

А) Может ли произведение двух различных натуральных чисел оказаться в 5 раз больше, чем разность этих чисел?

Б) Может ли произведение двух различных натуральных чисел оказаться в 5 раз больше, чем разность квадратов этих чисел?

В) Найдите все трехзначные натуральные числа, каждое из которых в 5 раз больше, чем сумма попарных произведений его цифр.

Решение:

А) Ответ: да, для чисел 20 и 4.
$ab = 5(a-b) \Rightarrow ab - 5a + 5b = 0 \Rightarrow (a+5)(b-5) = -25,$
$a + 5 > 0 \Rightarrow b - 5 < 0;$ 25 делится на $(b-5) \Rightarrow b = 4,\ a = 20.$

Б) Ответ: нет. Пусть $ab = 5(a^2 - b^2) \Rightarrow 5a^2 - ab - 5b^2 = 0.$ Поделим последнее равенство на b^2 и обозначим $\frac{a}{b}$ через t. Получим квадратное уравнение:
$5t^2 - t - 5 = 0.$ Его дискриминант равен 101, значит, корни уравнения иррациональны, что невозможно при натуральных a и b.

В) Ответ: 145. Пусть a, b, c – цифры трехзначного числа. Тогда
$100a + 10b + c = 5(ab + bc + ac) \Rightarrow$ c делится на 5.

1 случай. $c = 0 \Rightarrow 100a + 10b = 5ab \Rightarrow ab - 20a - 2b = 0 \Rightarrow (a-2)(b-20) = 40.$
Поскольку b – цифра, $-20 \le b - 20 \le -11$ и 40 делится на $(b-20)$. Значит,
$b - 20 = -20 \Rightarrow a - 2 = -2,\ a = 0.$ Последнее невозможно, так как по условию число трехзначное.

2 случай. $c = 5 \Rightarrow 20a + 2b + 1 = ab + 5b + 5a \Rightarrow ab - 15a + 3b = 1 \Rightarrow$
$(a+3)(b-15) = -44.$ Далее, $-15 \le b - 15 \le -6$ и 44 делится на $(b-15)$. Значит,
$b - 15 = -11,\ b = 4.$ Тогда $a + 3 = 4 \Rightarrow a = 1.$

Ответ: а) да; б) нет; в) 145.