Вариант ЕГЭ по математике (профильный уровень).

Тренировочный вариант ЕГЭ № 231 с сайта: alexlarin.net

Задание 1.

Железнодорожный билет для взрослого стоит 290 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 16 школьников и 3 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

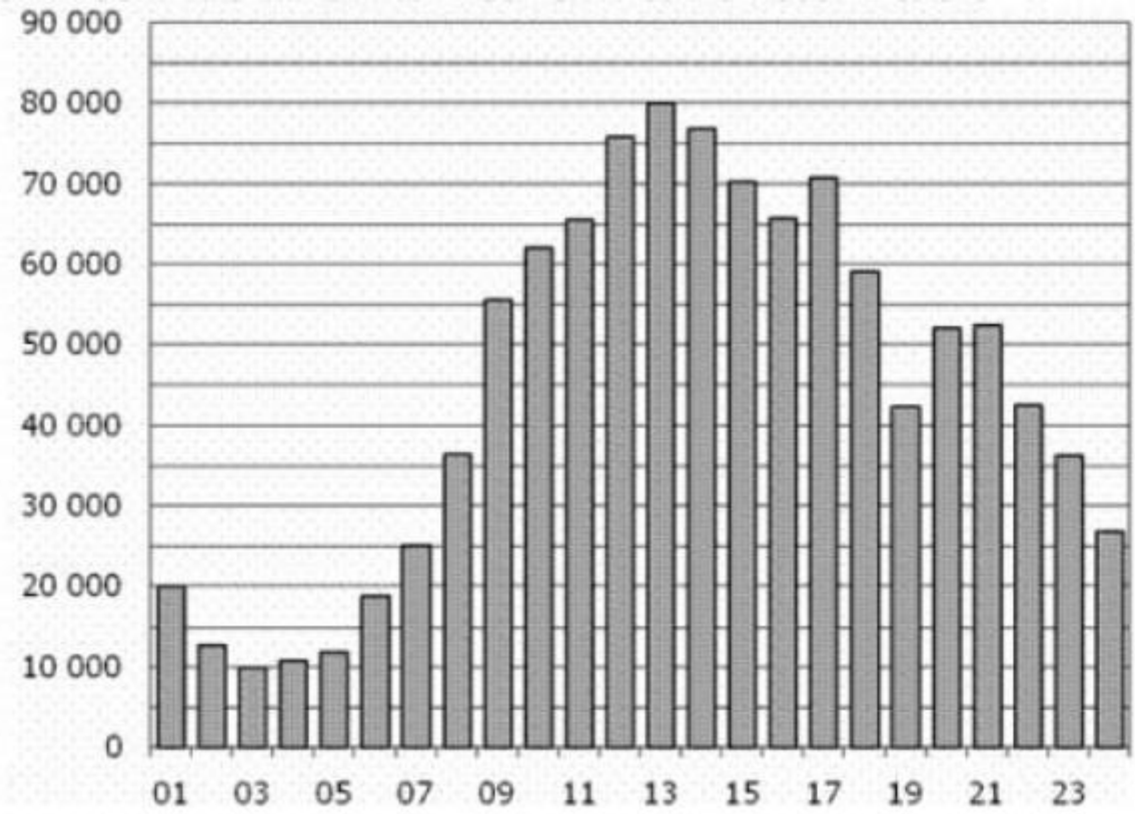
Решение:

На всю группу билеты стоят $290*3+145*16=3190$ рублей.

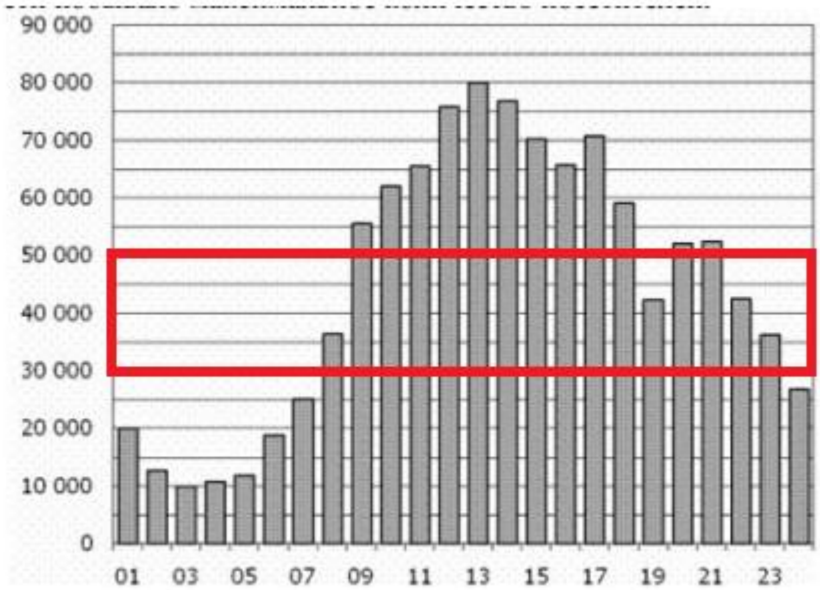
Ответ: 3190.

Задание 2.

На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости в течение каждого часа 8 декабря 2009 года. По горизонтали указывается номер часа, по вертикали – количество посетителей сайта за данный час. Определите по диаграмме, сколько часов за эти сутки аудитория посетителей сайта РИА Новости находилась в пределах от 30 до 50 тыс.

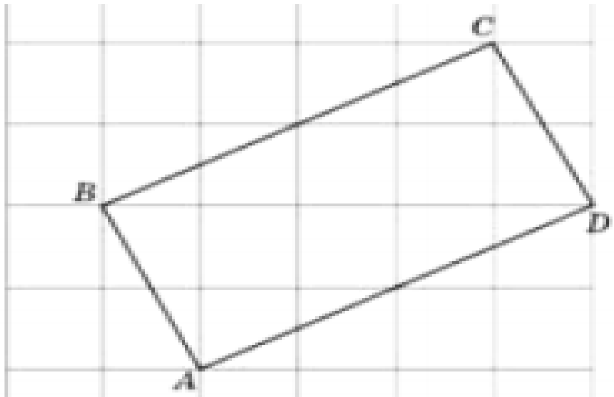


Решение:



По диаграмме видно, что всего 4 часа за эти сутки аудитория посетителей сайта РИА Новости находилась в пределах от 30 до 50 тыс.
Ответ: 4.

Задание 3.
На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён прямоугольник ABCD. Найдите радиус окружности, описанной около этого прямоугольника.



Решение:
Радиус окружности равен 2.5, так как это та же окружность, которая описывается вокруг одного из прямоугольных треугольников, из которых состоит прямоугольник. А ее радиус равен половине длины гипотенузы.
Ответ: 2.5.

Задание 4.

В 10-х классах 51 учащийся, среди них две подруги – Марина и Настя. Для написания ВПР по географии 10-классников случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Марина и Настя окажутся в одной группе.

Решение:

Вероятность попасть одной подруге в первую группу равна $\frac{17}{51}$, вторая подруга попадет в эту же группу с вероятностью $\frac{16}{50}$. Они попадут в одну группу с вероятностью P = $\frac{17}{51} * \frac{16}{50}$. Так как группы всего три, то искомая вероятность равна P = 3 * $\frac{17}{51} * \frac{16}{50}$ = 0.32.

Ответ: 0.32.

Задание 5.

Найдите корень уравнения $8^{3+2x} = 0.64 * 10^{3+2x}$.

Решение:

$8^{3+2x} = 0.64 * 10^{3+2x}$

$0.8^{3+2x} = 0.8^2$

3 + 2x = 2

x = -0.5.

Ответ: -0.5.

Задание 6.

В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона равна $4\sqrt{15}$, sin<BAC = 0.25. Найдите длину высоты AH.

Решение:

$$<ABC = 180 - 2 * <BAC$$

$$sin(<ABC) = sin(180 - 2 * <BAC) = sin(2 * <BAC) =$$

$$= 2 * sin(<BAC) * cos(<BAC) = 2 * 0.25 * \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Тогда запишем площадь треугольника двумя способами и из этих соображений найдем искомую высоту.

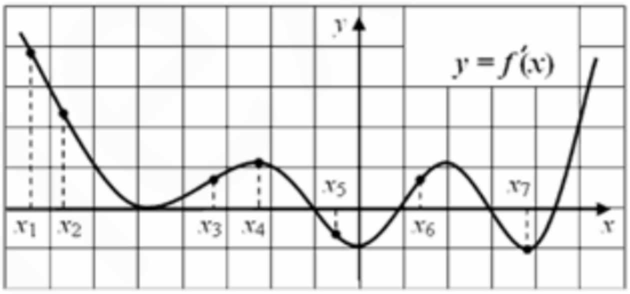
S = 0.5 * h * BC = 0.5 * AB * BC * sin(<ABC)

h = 7.5.

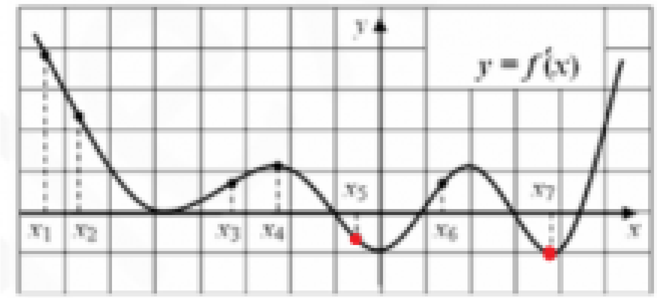
Ответ: 7.5.

Задание 7.

На графике производной функции y=f′(x) отмечены семь точек: x1,...,x7. Найдите все отмеченные точки, в которых функция f(x) убывает. В ответе укажите количество этих точек.



Решение:

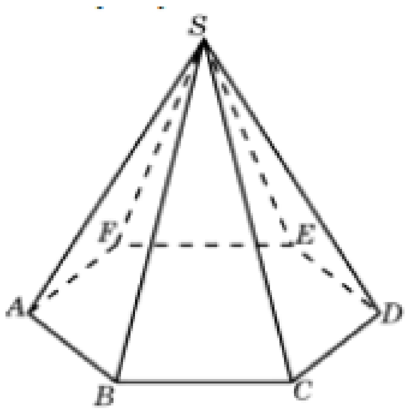


Функция убывает, если производная отрицательна. Тогда искомых точек 2 штуки.

Ответ: 2.

Задание 8.

Объем правильной шестиугольной пирамиды 6. Сторона основания равна 1. Найдите боковое ребро.



Решение:

Тогда $h = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{b^2 - 1}$.

$$V = \frac{1}{3} * S * h = \frac{1}{3} * 6 * \frac{a^2\sqrt{3}}{4} * \sqrt{b^2 - 1}$$

$$b^2 - 1 = 48$$

$$b = 7.$$

Ответ: 7.

Задание 9.

Найти $\cos 4x$, если $\sin x$ - $\cos x$ = $\frac{3}{\sqrt{10}}$.

Решение:

Найдем сначала $(\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x * \cos x = 1 - \sin 2x$.

$\sin 2x = 0.1$.

Тогда $\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x = 0.98$.

Ответ: 0.98.

Задание 10.

Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0=30$, начал торможение с постоянным ускорением $a=4$ м/с^2. За t секунд после начала торможения он прошёл путь $s=v_0t-\frac{at^2}{2}$(м). Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 112 метров. Ответ выразите в секундах.

Решение:

Подставим все известные в формулу расстояния и найдем время.

$$112 = 30t - \frac{4t^2}{2}$$

$$t^2 - 15t + 56 = 0$$

$$t = 7.$$

Ответ: 7.

Задание 11.

Расстояние между городами A и B равно 550 км. Из города A в город B со скоростью 50 км/ч выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 75 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города A автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

Решение:
Обозначим искомое время через x. Тогда составим уравнение и решим его.

50x * 75(x - 1) = 550
x = 5.
Тогда S = 50 * 5 = 250.
Ответ: 250.

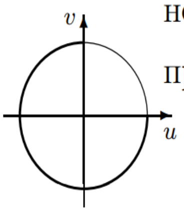
Задание 12.
Найдите наибольшее значение функции y = 18sinx - 9$\sqrt{3}$x + 1.5$\sqrt{3}$π + 21 на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.
Решение:
y` = 18cosx - 9$\sqrt{3}$
y` = 0
x = $\frac{\pi}{6}$
y$\left(\frac{\pi}{6}\right)$ = 30.
Ответ: 30.

Задание 13.
Решите уравнение $\sqrt{\sin 2x} = \sqrt[4]{2}\sqrt{\cos x}$.
б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3}{2}\pi; 0\right]$.

Решение:
а) $\sqrt{\sin 2x} = \sqrt[4]{2}\sqrt{\cos x} \Longleftrightarrow \sqrt{2\sin x\cos x} = \sqrt[4]{2}\sqrt{\cos x} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \begin{cases} \sqrt{2\sin x} = \sqrt[4]{2} \\ \cos x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ \begin{cases} \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n;\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Отберём корни с помощью единичной окружности. Очевидно, вторая последовательность не попадает в указанную дугу, а из первой последовательности отмеченной дуге принадлежат числа $-\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{3}{2}\pi$.

б) 

Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\ \dfrac{\pi}{4}+2\pi k;\ \middle|\ k,n\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\left\{-\dfrac{3\pi}{2};\ -\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Задание 14.

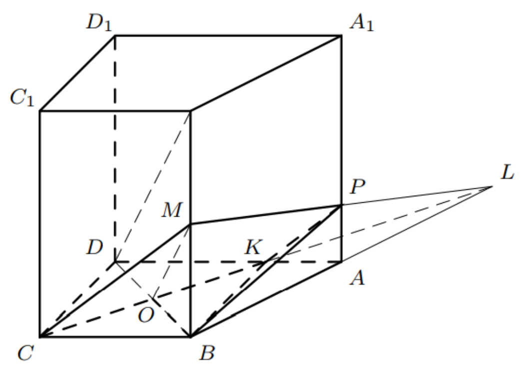
В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит прямоугольная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC ($|BC|<|AD|$), в которой $|AB|=5$, $|CD|=4$, $|BC|=6$. Через точку C и середину ребра BB_1 параллельно (B_1D) проведена плоскость β, если известно, что $|BB_1|=16$.

а) Докажите, что плоскость β пересекает ребро AA_1 в такой точке P, что $|A_1P|=3|AP|$.

б) Найдите объём пирамиды с вершиной в точке B, основанием которой служит сечение призмы плоскостью β.

Решение:

а) Пусть $M\in[BB_1]$, $|MB|=|MB_1|$, $K\in[AD]$, $|DK|=|AB|$, $O=(DB)\cap(CK)$. Тогда $ABKD$ — прямоугольник, O — середина диагонали DB, $[OM]$ — средняя линия треугольника DB_1B. Следовательно, $(DB_1)\parallel(OM)$. $\triangle BAK$ — египетский, т.е. $|KA|=3$.



Пусть теперь $(CM)\cap(AB)=L$. Тогда $L\in\beta$ и $P=(LM)\cap(BB_1)$, а, т.к. $[KA]$ — средняя линия в треугольнике CLB, то и $[AP]$ — средняя линия в треугольнике MLB. Следовательно, $|AP|=\dfrac{1}{2}|BM|=\dfrac{1}{4}|BB_1|$. Что и требовалось доказать.

б) $CMBKPA$ — усечённая пирамида, отсечённая от пирамиды $LMBC$. В силу подобия этой пирамиды и пирамиды $LPAK$ с коэффициентом $\dfrac{1}{2}$, имеем: $V_{CBMKAP}=\dfrac{7}{8}\cdot\dfrac{1}{3}S_{CMB}\cdot 2|DC|=56$. Объём искомой пирамиды меньше вычисленного на объём пирамиды $PAKB$: $V_{PAKB}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{2}|AK|\cdot|CD|\cdot|AP|=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot 4=8\Rightarrow V_{B\beta}=48$.

Ответ: б) 48.

Задание 15.

Решите неравенство: $\dfrac{7\cdot 4^x+2^{x^2+1}}{3-2^{2x-x^2}}\geqslant 2^{2x+3}$.

Решение:

$$\frac{7\cdot 4^x+2^{x^2+1}}{3-2^{2x-x^2}}\geqslant 2^{2x+3}\Longleftrightarrow \frac{7\cdot 2^{2x}+2\cdot 2^{x^2}}{3-\dfrac{2^{2x}}{2^{x^2}}}\geqslant 8\cdot 2^{2x}\Longleftrightarrow$$

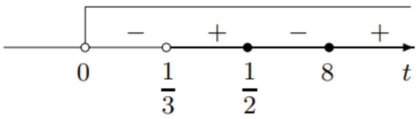
$$\Longleftrightarrow \frac{(2\cdot 2^{x^2}+7\cdot 2^{2x})\cdot 2^{x^2}-8\cdot 2^{2x}(3\cdot 2^{x^2}-2^{2x})}{3\cdot 2^{x^2}-2^{2x}}\geqslant 0\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2\left(2^{x^2}\right)^2+7\cdot 2^{x^2}\cdot 2^{2x}-24\cdot 2^{x^2}\cdot 2^{2x}+8\left(2^{x^2}\right)^2}{3\cdot 2^{x^2}-2^{2x}}\geqslant 0\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2\left(2^{x^2}\right)^2-17\cdot 2^{x^2}+8\cdot(2^{2x})^2}{3\cdot 2^{x^2}-2^{2x}}\geqslant 0.$$

Сделаем замену переменной: $t=2^{x^2-2x}$. Тогда последнее неравенство приобретёт вид:

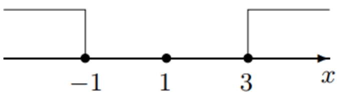
$$\frac{3t^2-17t+8}{3t-1}\geqslant 0\Longleftrightarrow \frac{\left(t-\dfrac{1}{2}\right)(t-8)}{t-\dfrac{1}{3}}\geqslant 0.$$

Применим метод интервалов: 

, т.е. $t\in\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right]\cup[8;+\infty)$.

Возвращаясь к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^{x^2-2x}>\dfrac{1}{3}\\ 2^{x^2-2x}\leqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}\\ 2^{x^2-2x}\geqslant 8\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-2x+\log_2 3>0\\ (x-1)^2\leqslant 0\end{cases}\\ x^2-2x-3\geqslant 0\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ (x-3)(x+1)\geqslant 0\end{array}\right.$$

Снова применим метод интервалов: 

Ответ: $(-\infty;-1]\cup\{1\}\cup[3;+\infty)$.

Задание 16.

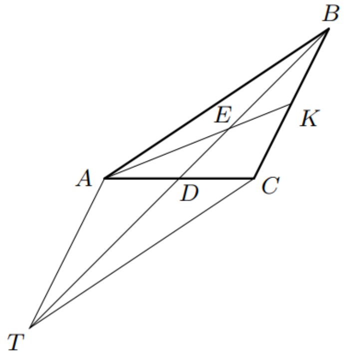
На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K. Оказалось, что отрезок AK пересекает медиану BD в точке E так, что $|AE|=|BC|$.

а) Доказать, что $|BK|=|KE|$.

б) Найдите площадь $CDEK$, если известно, что $|AB|=13$, $|AE|=7$, $|AD|=4$.

Решение:

а) Удвоим медиану: $|BD| = |DT|$, $T \in (BD)$. Тогда $ATCB$ — параллелограмм, следовательно $|AT| = |BC| = |AE| = 7$, $\angle ATB = \angle TBC$. $\triangle ATE$ — равнобедренный, следовательно $\angle ATE = \angle AET = \angle BEK = \angle KBE \Rightarrow |EK| = |KB|$, т.к. $\triangle BEK$ — равнобедренный. Что и требовалось доказать.



б) Для треугольника ABC имеем: $p = \frac{1}{2}(13+7+8) = 14$. По формуле Герона: $S_{\triangle ABC} = \sqrt{14\cdot 1\cdot 7\cdot 6} = 14\sqrt{3}$. По теореме косинусов: $\cos\angle ABC = \frac{7^2+13^2-8^2}{2\cdot 7\cdot 13} = \frac{11}{13}$.

Обозначим $|BK| = x$. Применим теорему косинусов к $\triangle ABK$: $(7+x)^2 = 13^2 + x^2 - 2\cdot 13x\cdot\frac{11}{13} \Rightarrow 36x = 120 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$.

Отсюда: $S_{\triangle ABK} = \frac{|BK|}{|BC|}S_{\triangle ABC} = \frac{10}{21}\cdot 14\sqrt{3} = \frac{20}{3}\sqrt{3}$. Отсюда: $S_{\triangle BEK} = \frac{x}{x+7}S_{\triangle ABK} = \frac{10}{31}\cdot\frac{20}{3}\sqrt{3} = \frac{200}{93}\sqrt{3}$. Наконец: $S_{DEKC} = S_{\triangle BDC} - S_{\triangle BEK} = 7\sqrt{3} - \frac{200}{93}\sqrt{3} = \frac{451}{93}\sqrt{3}$.

Ответ: $\frac{451}{93}\sqrt{3}$.

Задание 17.

Олигарх Аристарх Луков-Арбалетов имеет в собственности три частных банка. Активы первого банка состоят на 70% из рублей и на 30% из долларов. Во втором банке 80% активов составляют рубли и 20% — евро. В третьем банке — 50% — в рублях, 10% — в долларах и 40% — в евро. Аристарх планирует открыть четвёртый банк, направив туда часть активов из каждого банка так, чтобы доля каждой из валют в каждом из них сохранилась, а активы нового банка состояли бы ровно на 15% из долларов. Какой наименьший процент рублей могут содержать активы нового банка?

Решение:

Пусть x — сумма активов, направленных в новый банк из первого банка, y — из второго банка, z — из третьего банка. Тогда активы нового банка будут составлять $x+y+z$, а доля долларов в них равна: $0,15 = \frac{0,3x+0,1z}{x+y+z}$. Отсюда получаем: $x = y + \frac{1}{3}z$. Нас интересует $\min f = \frac{0,7x+0,8y+0,5z}{x+y+z} = \frac{45y+22z}{60y+40z}$.

Если $z = 0$, то $f = \frac{3}{4}$, т.е. 75%. При $z \neq 0$ заменим переменную: $\alpha = \frac{y}{z}$. Тогда нас интересует минимально возможное значение функции: $f(\alpha) = \frac{45\alpha+22}{60\alpha+40}$. Несложно вычислить производную: $f'(\alpha) = \frac{480}{(60\alpha+40)^2} > 0 \forall\alpha \in [0;+\infty)$, таким образом, наименьшее значение функции f достигается в точке 0: $f(0) = \frac{22}{40} = 0,55$. Следовательно, наименьший процент рублёвой части активов нового банка достигается в случае, когда активы из второго банка не участвуют в создании активов нового банка, и этот процент равен 55.

Ответ: 55.

Задание 18.

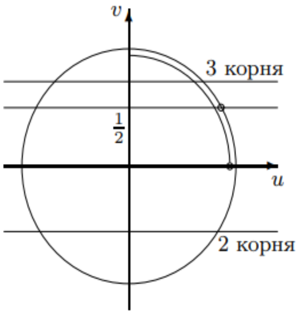
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{\frac{1,2x}{\pi}}(2\sin^2 x - 4a\sin x - \sin x + 2a + 1) = 0$$

имеет не более трёх корней, входящих в отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение:

Пропотенцируем исходное уравнение: $\begin{cases} x \neq \frac{5}{6}\pi \\ x > 0 \\ 2\sin^2 x - 4a\sin x - \sin x + 2a = 0 \end{cases}$.



Рассмотрим третье уравнение:

$\sin x(2\sin x - 1) - 2a(2\sin x - 1) = 0 \iff (\sin x - 2a)(2\sin x - 1) = 0.$

Получаем совокупность:

$$\left[\begin{aligned} &\sin x = \frac{1}{2} \\ &\sin x = 2a \end{aligned}\right.$$

Первое уравнение имеет на данном отрезке два корня: $x = \frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{13\pi}{6}$, поскольку $x \neq \frac{5\pi}{6}$. Следовательно, второе уравнение совокупности должно иметь на этом промежутке не более одного корня. Отберём корни с помощью единичной окружности.

Очевидно, что при $2a = \frac{1}{2}$ второе уравнение не даёт новых корней. При $2a = -1$ — добавляет один корень. При $|2a| > 1$ — не добавляет корней. В остальных случаях на указанном промежутке второе уравнение добавляет более одного корня.

Ответ:

$a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left\{\frac{1}{4}\right\} \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$

Задание 19.

Дано 20 чисел: $2, 3, 4, \ldots, 20, 21$.

а) Какое наибольшее количество попарно взаимно простых чисел можно выбрать из приведённых чисел?

б) Докажите, что если из приведённых 20 чисел выбрать любые 12, то обязательно найдутся два числа, одно из которых делится на другое.

в) Пусть 20 приведённых чисел являются длинами сторон квадратов. Можно ли эти 20 квадратов разделить на две группы так, чтобы суммы площадей в этих группах были одинаковыми?

Решение:

а) Два различных простых числа — взаимно просты. Набор простых чисел среди данных: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$. Все эти 8 чисел попарно — взаимно просты. Некоторые из этих чисел можно заменить другими числами из множества исходных. Но ни одно из этих чисел добавить к выписанному набору — невозможно без утраты взаимной простоты. Ответ: 8.

б) Рассмотрим набор: $21, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11$. В этом наборе ни одно из чисел не делится на другое, и в нём — 11 чисел. Некоторые из чисел этого набора можно заменять другими исходными числами, не меняя условия на делимость: например, 18 можно заменить на 9. Но невозможно добавить к этому набору ни одного из оставшихся чисел. Таким образом, указанный набор является максимальным для условия отсутствия пар, один из элементов которых делится на другой элемент. Что и доказывает утверждение задачи.

в) Сумма квадратов чисел от 1 до 21 равна: $\dfrac{21 \cdot 22 \cdot 43}{6} = 3311$. Следовательно, сумма квадратов данных чисел равна 3310. Таким образом, необходимо найти несколько квадратов, сумма которых равна 1655. Если взять последние 4 квадрата: $441 + 400 + 369 + 324 = 1526$. Теперь надо найти несколько квадратов из начала последовательности, сумма которых равна 129. Но $129 = 100 + 25 + 4$. То есть $2^2 + 5^2 + 10^2 + 18^2 + 19^2 + 20^2 + 21^2 = 1655$, а, значит, остальные квадраты дадут ту же сумму.

Ответ: а) 8; б) Можно.