Тренировочный вариант ЕГЭ № 235 с сайта: alexlarin.net

Задание 1.

Мобильный телефон стоил 3500 рублей. Через некоторое время цену на эту модель снизили до 2800 рублей. На сколько процентов была снижена цена?

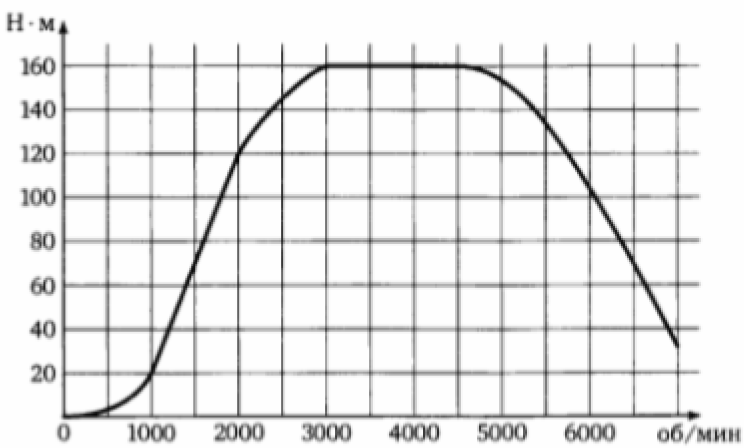
Решение:

Пусть 3500 - 100% снизили на 700 - x%; x = 700*100/3500=20

Ответ: 20

Задание 2.

На графике изображена зависимость крутящего момента автомобильного двигателя от числа его оборотов. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, по оси ординат – крутящий момент в Н·м

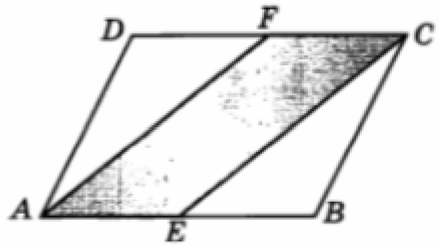


Решение: По графику видно, что при максимальном крутящимся моменте минимальное число оборотов составляет 3000.

Ответ: 3000

Задание 3.

Площадь параллелограмма ABCD равна 12. Точки E и F – середины сторон соответственно AB и CD. Найдите площадь параллелограмма AECF.

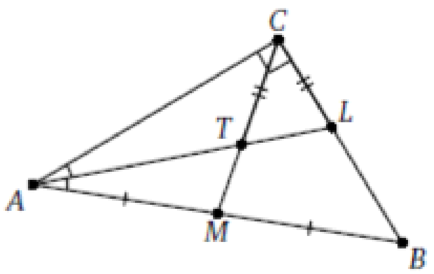


Решение:
AE=1/2*AB
Saecf=1/2*Sabcd=1/2*12=6
Ответ: 6

Задание 4.
Дан правильный пятиугольник. Учитель предлагает ученику выбрать наугад две вершины. Найдите вероятность того, что выбранные вершины принадлежат одной стороне пятиугольника.
Решение:
Рядом с вершиной есть 2 другие и 2 на одной стороне с ней: P=2/4=0,5
Ответ: 0,5

Задание 5.
Решите уравнение $\log_9(2x+5) = 0,5 \cdot \log_3(x+11)$
Решение:
0,5*log3(2x+5)=0,5log3(x+11); 2x+5=x+11; 2x-x=11-5; x=6
Ответ: 6

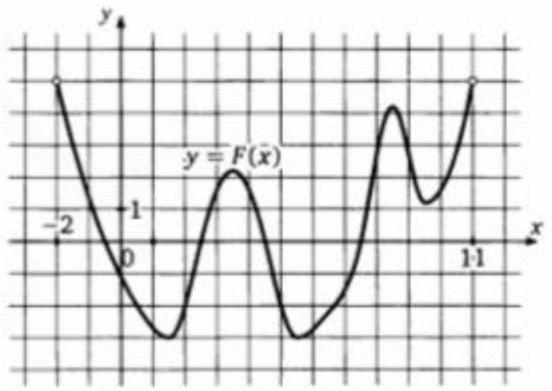
Задание 6.
В треугольнике ABC известно, что угол C=90°, а медиана CM и биссектриса AL пересекаются в точке T, причём CT = CL. Найдите наибольший острый угол треугольника ABC. Ответ дайте в градусах.



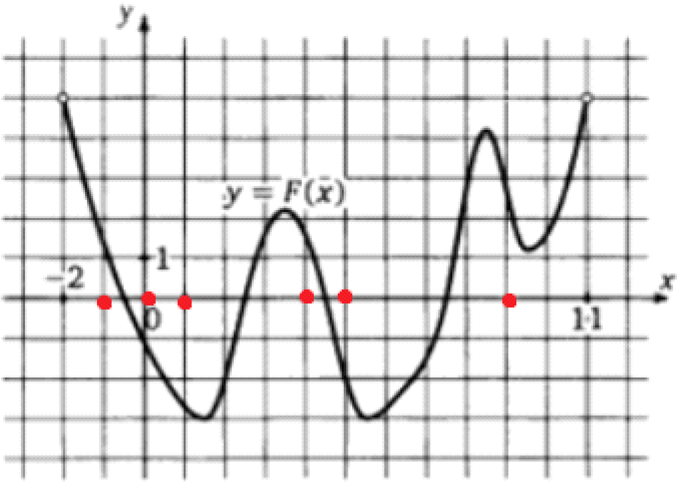
Решение:
Пусть угол MCB = α, т.к. CM = MB (свойство медианы прямоугольного треугольника) угол MCB = α, следовательно, угол CAB = 90° - α, следовательно, угол CAL = 45° - α/2; угол CLT = угол CTL = 180-α/2= 90 ° - α/2. Тогда из треугольника ACL: 45°- α/2 + 90 ° + 90° - α/2 180; 45° - α = 0; α = 45°
Ответ: 45

Задание 7.

На рисунке изображен график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции f, определенной на интервале $(-2; 11)$. Определите количество целых чисел x_i, для которых $f(x_i)$ отрицательно.



Решение:

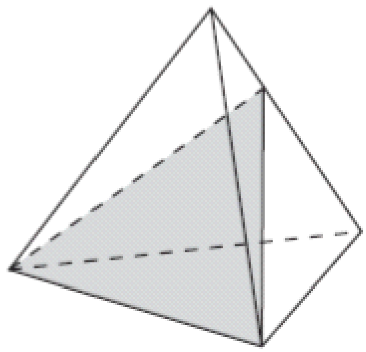


В этих точках функция должна убывать по графику. Тогда таких точек 6 штук, они отмечены на графике.

Ответ: 6

***Задание* 8.**

Объем треугольной пирамиды равен 15. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении 1:2, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объемов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.



Решение:
*Высота нижней тогда составляет 2/3 от высоты исходной. Т.к. основания одинаковы, то и объем 2/3 от исходной: V=2/3 * 15 = 10*
Ответ: 10

Задание 9.

Найдите значение выражения $\dfrac{f(x-7)}{f(x-6)}$, если $f(x) = 5^x$

Решение: f(x-7)/f(x-6)=5^x-7/5^x-6=1/5=0,2
Ответ: 0,2

Задание 10.
Напряжение, выраженное в вольтах, на участке цепи постоянного тока с сопротивлением R (в Омах) выражается по формуле U=√50AR/
3t, где A - работа в кДж(килоджоулях), совершенная за время t минут. Какую максимальную работу совершает электрический ток в пылесосе, если при напряжении 120 вольт сопротивление равно 1200 Ом, а технические характеристики этого участка цепи постоянного тока позволяют включить пылесос на время не более 2 минут? Ответ запишите в килоджоулях.
Решение:
$A=U^2\times3t/50R$; $A=120^2*3*2/50*1200=120*120*3*2/50*1200=1{,}44$
Ответ: 1,44

***Задание* 11.**
Два пешехода вышли одновременно из пунктов А и В навстречу друг другу. Когда первый прошел половину пути, второму до конца пути оставалось еще 24 км. Когда второй прошел половину пути, первому до конца оставалось еще 15 км. Сколько километров останется пройти второму до А после того, как первый дойдет из А в В?

Решение:

Пусть расстояние между пунктами A и B равно S км, скорость первого (из A) x км/ч, второго - y км/ч.

Первый прошел полпути за (S/2)/x часов. За это время второй прошел ((S/2)/x)*y=S*y/(2*x) км, и ему осталось пройти S-S*y/(2*x)=S*(2*x-y)/(2*x) км, что составляет 24 км. Получаем первое уравнение: S*(2*x-y)/(2*x)=24 (1).

Второй прошел полпути за (S/2)/y часов. За это время первый прошел ((S/2)/y)*x=S*x/(2*y) км, и ему осталось пройти S-S*x/(2*y)=S*(2*y-x)/(2*y) км, что составляет 15 км. Получаем второе уравнение: S*(2*y-x)/(2*y)=15 (2).

Поделим почленно уравнение (1) на уравнение (2), получим (2*x-y)/(2*y-x)=1,6*x/y.

Поделим числитель и знаменатель последнего уравнения на y, и обозначим x/y=t.

Получим: (2*t-1)/(2-t)=1,6*t. Решаем: 2*t-1=3,2*t-1,6*t^2, 1,6*t^2-1,2*t-1=0

8*t^2-6*t-5=0 t=(3/8)(+-)√(9/64+5/8)=(3/8)+-7/8. t(1)=-1/2), t(2)=5/4.

Очевидно, что подходит только положительное значение. Тогда имеем: x/y=5/4 или y=0,8*x. Подставив это в уравнение (1) или (2) получим S=40 км.

Значит за время, когда первый прошел полпути, второй прошел 40-24=16 км. Когда первый дойдет до пункта B, второму останется пройти до A 24-16=8 км.

Ответ: 8

Задание 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{250+50x-x^3}{x}$ на отрезке $[-10;-1]$

Решение:

$y=250+50x-x^3/x$;

$y'=(50-3x^2)x-(250+50x-x^3)/x^2=50x-3x^3-250-50x+x^3/x^2=-2x^3-250/x^2=0$;

$x^3 = -125 \Rightarrow x = -5$;

$y(-5)=250+50*(-5)-(-5)^3/(-5)=125/-5=-25$

Ответ: -25

Задание 13.

А) Решите уравнение $\dfrac{5}{\cos^2(\frac{13\pi}{2}-x)} + \dfrac{7}{\sin x} - 6 = 0$;

Б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi]$

Решение:

а) По формулам приведения

$\cos(13\pi/2-x)=\cos(6\pi+(\pi/2)-x)=\cos((\pi/2)-x)=\sin x$

(5/sin²x)+(7/sinx) – 6 =0

(5+7sinx–6sin²x)/sin²x=0

{5+7sinx–6sin²x=0
{sin²x ≠ 0 ⇒ sinx ≠ 0 ⇒x ≠ πk, k ∈Z

6sin²x–7sinx–5=0
D=(–7)²–4·6·(–5)=49+120=169
sinx=5/3 – уравнение не имеет корней,
так как |sinx| ≤ 1
5/3 > 1

sinx=–1/2
x=(–1)^k arcsin(–1/2)+πk, k ∈ Z
x=(–1)^k ·(–π/6)+πk, k ∈ Z

можно записать в виде серии двух ответов
x=(–π/6)+2πk или x=π+(π/6)+2πk=(7π/6)+2πk, , k ∈ Z

б) Указанному отрезку принадлежит корень
x=(–π/6)+2π=11π/6

3π/2=9π/6 < 11π/6 < 18π/6=3π
Ответ:

а) $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n, n \in Z$; б) $\dfrac{11\pi}{6}$.

Задание 14.

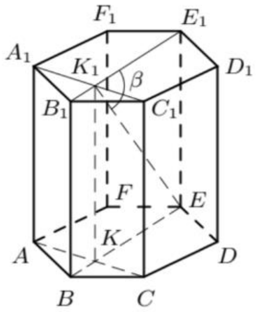
В правильной шестиугольной призме ABCDEFA1B1C1D1E1F1 стороны основания равны 4, а боковые ребра 5.

а) Докажите , что плоскость A1C1E перпендикулярна плоскости BB1E1

б) Найдите угол между плоскостями A1C1E и ABC.

Решение:

а) Рассмотрим указанные плоскости:



$$\begin{cases}(A_1C_1)\perp(B_1E_1)\\(A_1C_1)\perp(BB_1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(A_1C_1)\perp(BB_1E_1)\\(A_1C_1)\subset(A_1C_1E)\end{cases}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (BB_1E_1)\perp(A_1C_1E).$$

Что и требовалось доказать.

б) Пусть $(A_1C_1)\cap(B_1E_1)=K_1$, $(AC)\cap(BE)=K$, тогда $\angle E_1K_1E = = \beta = \angle(A_1C_1E)(ABC)$. Из $\triangle K_1E_1E$ получаем: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{|EE_1|}{|K_1E_1|} = \dfrac{5}{6}$.

Ответ: б) $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{5}{6}$.

Ответ: arctg5/6

Задание 15.

Решите неравенство $\log_{64x} 4 \cdot \log^2_{0,5}(8x) \le 3$

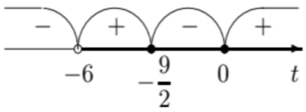
Решение:

Перейдём к основанию 2:

$\log_{64x} 4\log^2_{0,5}(8x) \leqslant 3 \iff \dfrac{2}{6+\log_2 x}\cdot\left(\dfrac{3+\log_2 x}{-1}\right)^2 \leqslant 3$. Заменим переменную: $t=\log_2 x$, тогда:

$$\frac{2}{t+6}\cdot(t^2+6t+9)\leqslant 3 \iff \frac{2t^2+9t}{t+6}\leqslant 0 \iff \frac{t\left(t+\frac{9}{2}\right)}{t+6}\leqslant 0$$

Применим метод интервалов:



Отсюда:

$$\begin{cases}t<6\\-\frac{9}{2}\leqslant t\leqslant 0\end{cases}\iff\begin{cases}\log_2 x<\log_2 2^{-6}\\\log_2\frac{1}{16\sqrt{2}}\leqslant\log_2 x\leqslant\log_2 1\end{cases}\iff\begin{cases}0<x<\frac{1}{64}\\\frac{\sqrt{2}}{32}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{64}\right)\cup\left[\dfrac{\sqrt{2}}{32};1\right]$.

Задание 16.

Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E, AD − биссектриса треугольника ABC.

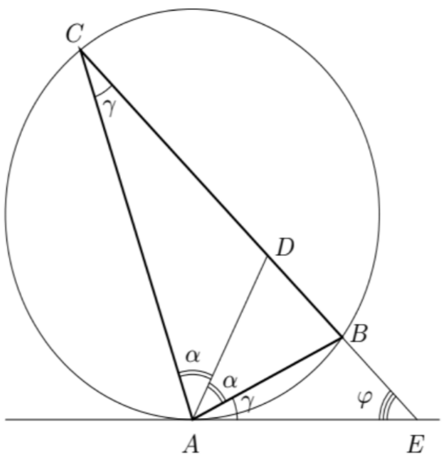
А) Докажите, что $AE = ED$

Б) Известно, что точка E лежит на луче CB и $CE = 9$, $BE = 4$, $\cos AED = \frac{9}{16}$.

Найдите расстояние от вершины B до прямой AC

Решение:

а) $\gamma = \angle ACB = \frac{1}{2} \smile AB = \angle BAE$. Пусть $\angle BAC = 2\alpha$. $\angle BAE$ — внешний угол для треугольников ABC и ADB. Следовательно, $\angle ABE = 2\alpha + \gamma = \angle DAB + \angle ADB = \alpha + \angle ADB \Rightarrow \angle ADB = \alpha + \gamma = \angle DAE \Rightarrow \triangle ADE$ — равнобедренный и $|AE| = |DE|$. Что и требовалось доказать.



б) По теореме о касательной и секущей: $|AE| = \sqrt{|CE| \cdot |BE|} = 6$. Из $\triangle ABE$ по теореме косинусов: $|AD| = \sqrt{|AE|^2 + |BE|^2 - 2|AE| \cdot |BE| \cos\varphi} = \sqrt{16 + 36 - 27} = 5$.

Из $\triangle ABE$ по теореме синусов: $\sin\gamma = 4\frac{\sin\varphi}{5} = \frac{4}{5}\frac{5\sqrt{7}}{16} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Из $\triangle ABC$: $h = |BC| \sin\gamma = 5 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{5\sqrt{7}}{4}$.

Ответ: б) $\frac{5\sqrt{7}}{4}$.

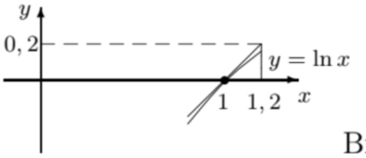
Задание 17.

Аристарх Луков-Арбалетов хочет купить пакет акций быстрорастущей компании. В начале года у Аристарха совсем не было денег, а пакет стоил 100 000 рублей. В середине каждого месяца Аристарх откладывает на покупку пакета акций одну и ту же сумму, а в конце каждого месяца пакет дорожает на 20%. Какую наименьшую сумму нужно откладывать Аристарху каждый месяц, чтобы через некоторое время купить вожделенный пакет акций?

Решение:

Обозначим исходную стоимость пакета через M. Тогда в конце n-го месяца стоимость пакета будет составлять $g(n) = 1,2^n \cdot M$ рублей. В середине $n+1$-го месяца у Аристарха будет $\varphi(n+1) = (n+1)A(n)$ рублей, где $A(n)$ — сумма, откладываемая Аристархом ежемесячно. При этом, необходимо, чтобы через n месяцев отложенная сумма была не меньше стоимости пакета, поэтому $\varphi(n+1) \geqslant g(n)$. Следовательно: $A(n) \geqslant \dfrac{1,2^n}{n+1} \cdot M$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1,2^x}{x+1} \cdot M$. Найдём ближайшее к точке минимума этой функции целое число n. Имеем: $f'(x) = \dfrac{(x+1)\cdot 1,2^x \ln 1,2 - 1,2^x}{(x+1)^2} \cdot M$. Точкой минимума будет $x = \dfrac{1}{\ln 1,2} - 1$.



Сделаем оценку числа ln 1.2. Видим, что $\ln 1,2 < \dfrac{1}{5} \Rightarrow x \geqslant 5-1 = 4$. При $n = 5$ получаем: $A(n) \geqslant \dfrac{1,2^5}{6} \cdot 1000000 = 20000 \cdot 1,2^4 = 41\,472$ рубля.

Ответ: 41472

Задание 18.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(x^2 - 5 + \ln(x+a))^2 = (x^2-5)^2 + \ln^2(x+a)$$

имеет единственное решение на отрезке $[0;3]$.

Решение:

Очевидно, что уравнение может выполняться в одной точке только при следующих условиях:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-5=0 \\ \ln(x+a)\neq 0 \\ 0\leqslant x\leqslant 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-5\neq 0 \\ \ln(x+a)=0 \\ 0\leqslant x\leqslant 3 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt{5} \\ \sqrt{5}+a\neq 1 \\ \sqrt{5}+a>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+a=1 \\ x^2-5\neq 0 \\ 0\leqslant x\leqslant 3 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\neq 1-\sqrt{5} \\ a>-\sqrt{5} \\ x=\sqrt{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x=1-a \\ a\neq 1-\sqrt{5} \\ -2\leqslant a<1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Теперь видно, что некоторые области для a в этой совокупности совпадают. Исключив эти области, найдём те значения a, при которых уравнение имеет единственное решение. А именно: при $a \in [-2; 1-\sqrt{5})$ уравнение имеет два различных решения: $x = \sqrt{5}$ и $x = 1-a$. При $a = 1-\sqrt{5}$ эти решения совпадают. Далее, при $a \in (1-\sqrt{5}; 1]$ также — два решения. Таким образом, получаем: $a \in (-\sqrt{5}; -2) \cup \{1-\sqrt{5}\} \cup (1; +\infty)$.

Ответ: $(-\sqrt{5}; -2) \cup \{1-\sqrt{5}\} \cup (1; +\infty)$.

Задание 19.

По результатам теста по математике ученик получает неотрицательное число баллов. Ученик войдет в группу А, если количество баллов не менее 45. Если количество баллов меньше 45, то ученик войдет в группу Б. Чтобы не расстраивать родителей, решили каждому ученику добавить 8 баллов, поэтому количество учеников группы А увеличилось.

А) Мог ли после этого понизиться средний балл учеников группы Б?

Б) Мог ли после этого понизиться средний балл учеников группы Б, если при этом средний балл учеников группы А тоже понизился?

В) Пусть первоначально средний балл группы А был 52 балла, группы Б – 34 балла, а средний балл всех учеников составил 46 баллов. После добавления средний балл группы А стал равен 58 баллов, группы Б – 38. При каком наименьшем числе участников возможна такая ситуация?

Решение:

А) Ответ – Да!

Почему?

Например, пусть у нас было 100 баллов, 44 балла и 0 баллов, т.е. 3 человека всего было.

Тогда получается в группе Б изначально общий балл был (44+0) / 2 = 22. Далее по 8 баллов надбавляем, человек с 44 баллами уходит в группу А уже с 44+8 баллами, соответственно в группе Б остается только человек с баллом 0+8, ну и его значение будет средним для группы. Как видим, значение понизилось с 22 до 8.

Б) Давайте рассмотрим то же самое значение, что у нас было. У нас в А первоначально был 1 человек со 100 баллами ну и следовательно средний балл был так же 100. Ну а далее что происходит.

Мы к 100 прибавляем 8, у нас перешел еще второй человек, у которого было 44+8.

Новый средний балл: (100+8+44+8) / 2 = 80.

Как видим, понизился балл у А, и у Б, в пункте А) мы рассмотрели, тоже понизился. Поэтому, да, такой вариант возможен.

В) Первоначально было А: 52, Б: 34, А+Б: 46

Стало А: 58, Б: 38, ну а в А+Б что получается, мы каждому же по 8 прибавляем, поэтому и средний балл тоже увеличивается на 8, т.е. А+Б: 54.

И давайте введем обозначения.

Пусть N у нас было всего учеников, в группе А сначала у нас было X, тогда в Б сначала у нас было N–X учеников.

Потом в А стало, например, Y учеников, в Б тогда стало N–Y.

Ну и собственно распишем с учетом среднего балла, т.е. возможный суммарный балл. Что у нас получается.

$46 \cdot N$ – это первоначальный балл всех учеников. Он складывается из $34 \cdot (N-X)$ и $52 \cdot X$. Ну и аналогично после надбавки $52 \cdot N = 38 \cdot (N-Y) + 58 \cdot Y$.

Получаем систему уравнений

$\{46 \cdot N = 34 \cdot (N-X) + 52 \cdot X$

$\{52 \cdot N = 38 \cdot (N-Y) + 58 \cdot Y;$

Что получается, в первом уравнении у нас $12 \cdot N = 18 \cdot X$, во втором $16 \cdot N = 20 \cdot Y$.

Т.е. $X = 2 \cdot N / 3$, и $Y = 4 \cdot N / 5$

С учетом того, что X, Y и N – это числа натуральные, то N однозначно должно делиться нацело на 3 и на 5, наименьшее такое число – это 15.

Ответ: А)Да; Б)Да; В)15.