Тренировочный вариант ЕГЭ № 236 с сайта: alexlarin.net

Задание 1.

Одна таблетка лекарства весит 40 мг и содержит 6% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,2 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте четырёх месяцев и весом 6 кг в течение суток?

Решение:

В одной таблетке активного вещества: 40*0,06=2,440*0,06=2,4мг

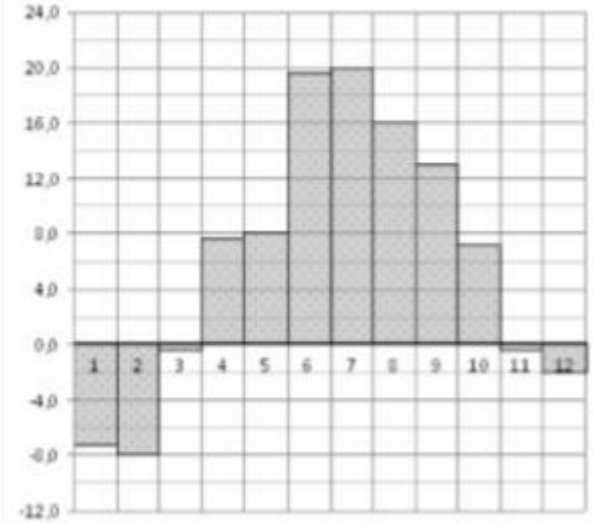
Ребёнку на 6 кг массы активного вещества: 6*1,2=7,26*1,2=7,2мг

Количество таблеток: $n=\frac{7,2}{2,4}=3$

Ответ: 3.

Задание 2.

На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в СанктПетербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с положительной среднемесячной температурой.



Решение:

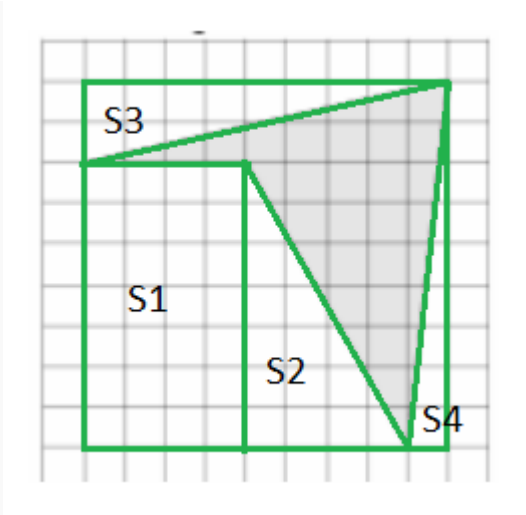
Положительная среднемесячная температура была с 4 по 10 месяц включительно, то есть 7 месяцев.

Ответ: 7.

Задание 3.

Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

Решение:

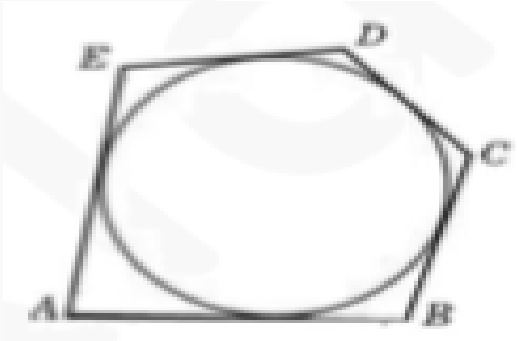


S1=4*7=28 см^2
S2=$\frac{1}{2}$*4*7=14 см^2
S3=$\frac{1}{2}$*2*9=9 см^2
S4=$\frac{1}{2}$*1*9=4,5 см^2
S=9*9-28-14-9-4,5=25,5 см^2
Ответ: 25,5

Задание 4.
Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 6 очков в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 4 очка, в случае ничьей – 2 очка, если проигрывает – 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,3.
Решение:
Вероятность ничьи 1-0,3-0,3=0,4
2 победы: 0,3*0,3=0,09
Победа и ничья: может быть два варианта - сначала победа, потом ничья и наоборот: 0,3*0,4+0,4*0,3=0,24
Тогда итоговая вероятность: P=0,09+0,24=0,33
Ответ: 0,33

Задание 5.
Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{2x+5}$=-3
Решение:
$\sqrt[3]{2x+5}$=-3. Возведём обе части в куб
2x+5=-27
2x=-27-5 => 2x=-32 => x=-16
Ответ: -16
Задание 6.

Около окружности, радиус которой равен 2, описан многоугольник, периметр которого равен 36. Найдите его площадь.



Решение:

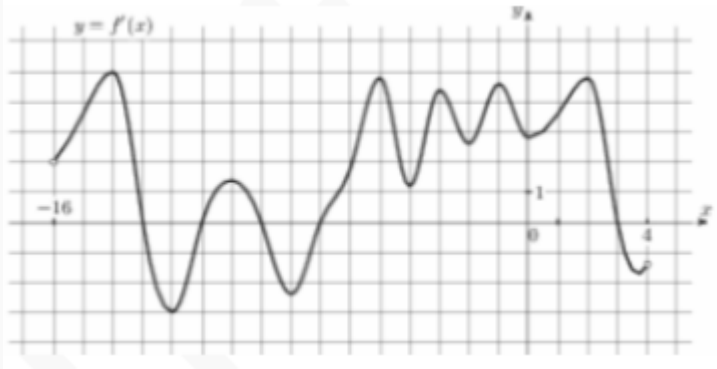
Воспользуемся формулой площади фигуры через её полупериметр и радиус вписанной окружности:

$S=pr \Rightarrow S=\frac{36}{2}*2=36$

Ответ: 36

Задание 7.

На рисунке изображен график y=f'(x)$y=f'(x)$ – производной функции y = f(x), определенной на интервале (−16; 4). Найдите количество точек экстремума функции y = f(x), принадлежащих отрезку [−14; 2].



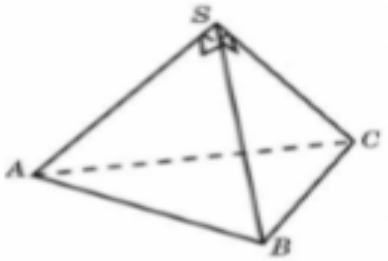
Решение:

Экстремумы функции расположены там, где производная функции равна 0, то есть там, где график производной пересекает ось Ох. На заданном отрезке таких точек 4(с абсциссами: -13; -11; -9; -7)

Ответ: 4

Задание 8.

Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 3. Найдите объем пирамиды.



Решение:
Объем пирамиды находиться как треть произведения площади основания, на проведенную к нему высоту. Примем за основание грань ABS, тогда высота к ней будет SC. В таком случае объем:
$V=\frac{1}{3}*\frac{1}{2}*3*3*3=4,5$
Ответ: 4,5

Задание 9.
Найдите значение выражения $\sin\frac{7\pi}{6}*\cos\frac{5\pi}{3}$
Решение:
$\sin\frac{7\pi}{6}*\cos\frac{5\pi}{3}=\sin(\pi+\frac{\pi}{6})*\cos(2\pi-\frac{\pi}{3})=-\sin\frac{\pi}{6}*\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}*\frac{1}{2}=-0,25$
Ответ: -0,25

Задание 10.
Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой f_0=490 Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(v)=\frac{f0}{1-\frac{v}{c}}$, где c-скорость звука в воздухе (в м\с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловозесли человек смог различить сигналы. Считать, что с = 340 м\с. Ответ выразите в м/с.
Решение:
Частота второго должна быть выше минимум на 10 Гц, тогда:
$500=\frac{490}{1-\frac{v}{340}}$. Перемножим "крест-накрест"
$500-\frac{500v}{340}=490$
$\frac{500v}{340}=10$
$v=\frac{340*10}{500}=6,8$ *Ответ:* 6,8

Задание 11.

Имеется два сосуда. Первый содержит 100 кг, а второй – 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 67% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 77% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

Решение:

Пусть x - концентрация первого, y- концентрация второго, тогда в первом кислоты 100x кг, во втором - 20y кг. Получили третий раствор массой 120 кг, в котором 120*0,67 кг кислоты. Во втором случае смешаем равные(по 20 кг) массы растворов, тогда:

$$\begin{cases} 100x + 20y = 0{,}67 * 120 \\ 20x + 20y = 0{,}77 * 40 \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе:

80x=80,4-30,8=49,6

80x=49,6

Разделим обе части на 80:

x=0,62

Тогда масса кислоты в первом: 0,62*100 = 62 кг

Ответ: 62

Задание 12.

Найдите наименьшее значение функции $y=(x^2-4x+4)*e^2$ на отрезке [-1;3][−1;3]

Решение:

Найдем производную данной функции и приравняем её к нулю:

$y'=(2x-4)e^x+e^x(x^2-4x+4)=0$

$e^x(2x-4+x^2-4x+4)=0$

Число e^x всегда положительно, поэтому можем его убрать:

$x^2-2x=0$

Тогда x=0; x=2

Начертим координатную прямую, расставим знаки производной и получим, что x=2 - точка минимума, то есть в ней будет наименьшее значение функции на заданном в условии отрезке:

$y(2)=(2^2-4*2+4)e^2=0$

Ответ: 0

Задание 13.

Дано уравнение $\frac{1}{cos2x*cosx}=\frac{1}{sin2x*sinx}$

А) Решите уравнение.

Б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$

Решение:

ОДЗ:
{cos2x ≠ 0⇒ 2x≠ $(\frac{\pi}{2})$+ πm, m ∈ Z⇒ x≠$(\frac{\pi}{4})$+$(\frac{\pi}{2})$·m, m ∈ Z
{cos ≠ 0 ⇒x≠ $(\frac{\pi}{2})$+ πm, m ∈ Z
{sinx ≠ 0 ⇒ x≠ π, s ∈ Z
{sin2x ≠ 0 ⇒ 2x≠ πs, s ∈ Z⇒ x≠ $(\frac{\pi}{2})$s, s ∈ Z

ОДЗ: x ≠$(\frac{\pi}{4})$m, m∈ Z

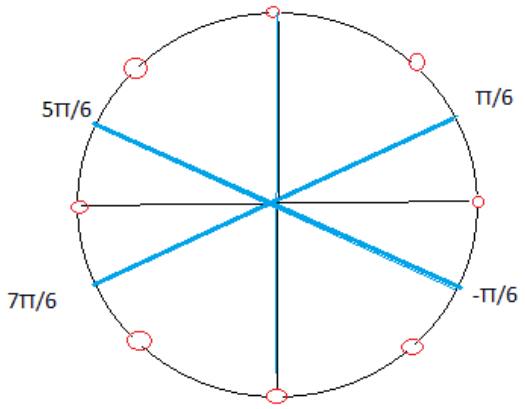
В условиях ОДЗ перемножаем крайние и средние члены пропорции

sin2x·sinx=cos2x·cosx

cos2x·cosx–sin2x·sinx=0
cos(2x+x)=0
cos3x=0 ⇒ 3x=$(\frac{\pi}{2})$+πn, n ∈ Z
⇒ **x=$(\frac{\pi}{6})$+$(\frac{\pi}{3})$·n, n ∈ Z**
С учетом ОДЗ (см. рис.) получаем ответ
x= ±$(\frac{\pi}{6})$ + πk, k ∈ Z

О т в е т.
А) ±$(\frac{\pi}{6})$ + πk, k ∈ Z

Б) Указанному отрезку принадлежат корни
$(-\frac{\pi}{6})$
$(\frac{\pi}{6})$–π = $-\frac{5\pi}{6}$
$(-\frac{\pi}{6})$–π= $-\frac{7\pi}{6}$
$-2\pi+(\frac{\pi}{4})=-\frac{11\pi}{6}$



Ответ: а)$\pm(\frac{\pi}{6})$ + πk, k ∈ Z; б) $-\frac{11\pi}{6}$;- $\frac{7\pi}{6}$;- $\frac{5\pi}{6}$.

Задание 14.

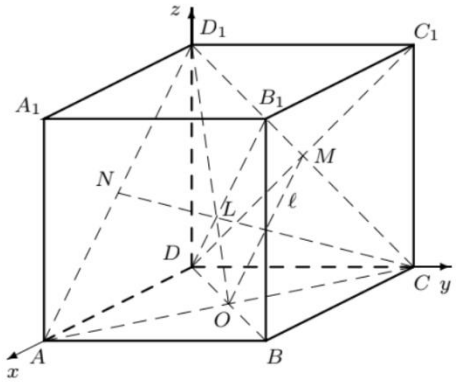
Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть l – линия пересечения плоскостей ACD_1 и BDC_1

А) Докажите, что прямые DB_1 и l перпендикулярны.

Б) Найдите расстояние между прямыми DB_1 и l, если ребро куба равно 2.

Решение:

а) Поместим куб в систему координат с началом в точке D, ось абсцисс — вдоль луча DA, ось ординат — вдоль луча DC, ось аппликат — вдоль луча DD_1. Тогда $\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1}$,



$$\begin{cases} \overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1}) \\ \overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DD_1} - \overrightarrow{DA}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DB_1}(\overrightarrow{DD_1} - \overrightarrow{DA}) = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1})(\overrightarrow{DD_1} - \overrightarrow{DA}) =$$
$$= \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DD_1} - \overrightarrow{DA}^2 + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DD_1} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD_1}^2 -$$
$$-\overrightarrow{DD_1} \cdot \overrightarrow{DA} = 0 \Rightarrow \ell \perp (DB_1).$$

б) Аналогично получаем: $(DB_1) \perp (AD_1C)$. Пусть $(DB_1) \cap (D_1O) = L$, тогда L — центр правильного $\triangle AD_1C$. Согласно условию: $|AC| = 2\sqrt{2}$, $|CN| = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$, где N — середина AD_1. Отсюда $d(\ell; L) = \frac{1}{6}|CN| = \frac{\sqrt{6}}{6} = d(\ell; (DB_1))$.

Ответ: б) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

Задание 15.

Решите неравенство $\log_{x^2}(3-x) \le \log_{x+2}(3-x)$

Решение:

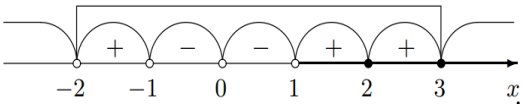
Перейдём к постоянному основанию:

$$\log_{x^2}(3-x) \leqslant \log_{x+2}(3-x) \iff \frac{\ln(3-x)}{\ln x^2} \leqslant \frac{\ln(3-x)}{\ln(x+2)} \iff \frac{\ln(3-x)(\ln x^2 - \ln(x+2))}{\ln x^2 \ln(x+2)} \geqslant 0.$$

Рационализируя:

$$\begin{cases} \dfrac{(2-x)\left(\dfrac{x+2}{x^2}-1\right)}{(x^2-1)(x+1)} \leqslant 0 \\ x < 3 \\ x > -2 \\ x \neq 0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2} \leqslant 0 \\ -2 < x < 3 \\ x \neq 0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$$

. Применим метод интервалов:



Получаем

Ответ: (-1;0) ∪ (0;1) ∪ {2}

Задание 16.

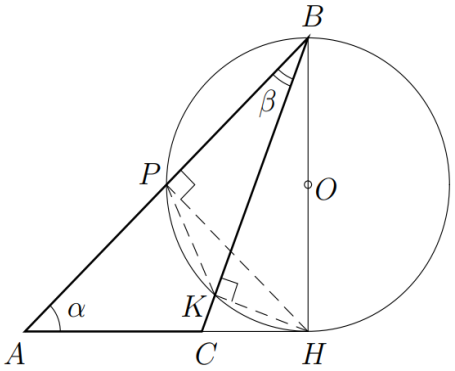
В тупоугольном треугольнике ABC (∠C - тупой) на высоте BH как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AB и CB в точках P и K соответственно.

А) Докажите, что sin∠ABC=$\frac{PH}{BC}-\frac{KH}{BA}$

Б) Найдите длину отрезка PK, если известно, что BA=13, BC = 8, sin$\angle ABC=\frac{7\sqrt{3}}{26}$

Решение:

Обозначим $\angle ABC = \beta$, $\alpha = \angle BAC$. Поскольку BH — диаметр, то $\angle BPH = \angle BKH = 90°$. Из $\triangle ABC$ имеем:



$$\sin\beta = \frac{2S_{\triangle ABC}}{|AB|\cdot|BC|} = \frac{2S_{\triangle ABH} - 2S_{\triangle CBH}}{|AB|\cdot|BC|} = \frac{|AB|\cdot|PH| - |BC|\cdot|KH|}{|AB|\cdot|BC|} = \frac{|PH|}{|BC|} - \frac{|KH|}{|AB|},$$ что и требовалось доказать.

б) Из $\triangle PBK$: $\frac{|PK|}{\sin\beta} = |BH| \Rightarrow |PK| = |BH|\sin\beta$. Т.к. β — острый угол по условию, то $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{49\cdot 3}{26^2}} = \frac{23}{26}$. По теореме косинусов, из треугольника ABC получаем:

$|AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB|\cdot|BC|\cos\beta} = \sqrt{169+64-184} = 7$. Теперь, по теореме синусов:

$$\sin\alpha = \frac{|BC|}{|AC|}\sin\beta = \frac{8}{7}\cdot\frac{7\sqrt{3}}{26} = \frac{4\sqrt{3}}{13},$$ и, наконец:

$$|PK| = |AB|\sin\alpha\sin\beta = 13\cdot\frac{4\sqrt{3}}{13}\cdot\frac{7\sqrt{3}}{26} = \frac{42}{13}.$$

Ответ: б) $\frac{42}{13}$

Задание 17.

Иван Иванович попросил у своего соседа Ивана Никифоровича взаймы на несколько дней 648 тысяч рублей, пообещав вернуть долг с процентами. Иван Никифорович заявил, что если он даст в долг на n дней S рублей, то сосед должен будет вернуть сумму, равную S(1+$\frac{n}{300}$)+$\frac{S}{n^2}$. После недолгих раздумий, Иван Иванович согласился на предложенные условия. Через сколько дней Ивану Ивановичу следует рассчитаться с долгом, чтобы вы- плата оказалась наименьшей? Сколько в этом случае составит переплата сверх взятой в долг суммы?

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x) = 1 + \frac{x}{300} + \frac{1}{x^2}$. Тогда $f'(x) = \frac{1}{300} - \frac{2}{x^3}$ и $f'(x) = 0 \iff$ $\iff \frac{x^3 - 600}{300x^2} = 0$, откуда $x = 2\sqrt[3]{75}$. Очевидно, это - точка минимума функции. Поскольку $4 < \sqrt[3]{75} < 5$, то $x = 8$ или $x = 9$ — возможные целочисленные точки минимума. Сравним значения функции в этих точках:

$f(8) = 1 + \frac{8}{300} + \frac{1}{64}$, $f(9) = 1 + \frac{9}{300} + \frac{1}{81}$, отсюда: $f(9) - f(8) = \frac{1}{300} - \frac{81-64}{81 \cdot 64} = \frac{1}{300} - \frac{17}{81 \cdot 64} =$ $= \frac{64 \cdot 81 - 17 \cdot 300}{300 \cdot 64 \cdot 81} > 0$. Следовательно, наименьшая сумма будет выплачена через 8 дней, а переплата составит в этом случае $648\,000 \cdot \left(\frac{2}{75} + \frac{1}{64}\right) = 27\,405$ рублей.

Ответ: 27405

Задание 18.

Найдите все значения параметра *a,* при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax + 2ay \le 0, \\ x^2 + y^2 + 6ax + 8ay \le 1 - 10a \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Решение:

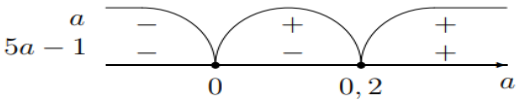
Перепишем исходную систему в виде:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y+a)^2 \leqslant 2a^2 \\ (x+3a)^2 + (y+4a)^2 \leqslant (5a-1)^2 \end{cases}.$$

Имеем очевидную графическую интерпретацию задачи: два круга с центрами в точках $(a; -a)$ и $(-3a; -4a)$ и, соответственно, радиусами: $|a|\sqrt{2}$ и $|5a-1|$ пересекаются в одной точке. Для этого достаточно, чтобы сумма радиусов кругов была равна расстоянию между центрами. Кроме того, возможен ещё случай, когда один из кругов является точкой (своим центром), который принадлежит второму кругу. Рассмотрим эти возможности.

1) Два круга пересекаются в одной точке:

$\sqrt{(4a)^2 + (3a)^2} = \sqrt{2}|a| + |5a-1| \iff 5|a| = \sqrt{2}|a| + |5a-1| \iff (5-\sqrt{2})|a| = |5a-1|$.



Знаки подмодульных выражений указаны в соответствующих строках рисунка. Рассмотрим интервалы по отдельности:

а) $a < 0 \Rightarrow -(5-\sqrt{2})a = 1 - 5a \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a \in \varnothing$

б) $0 \leqslant a < 0,2 \Rightarrow (5-\sqrt{2})a = 1 - 5a \Rightarrow a = \frac{1}{10-\sqrt{2}} = \frac{10+\sqrt{2}}{98}$.

в) $a \geqslant 0,2 \Rightarrow (5a - a\sqrt{2} = 5a - 1 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Первый круг является точкой при $a = 0$. Получаем точку $(0, 0)$, которая удовлетворяет второму неравенству системы.

Второй круг является точкой при $a = 0,2$. Получаем точку $(-0,6; -0,8)$. Тогда первое неравенство принимает вид: $(-0,6 - 0,2)^2 + (-0,8 + 0,2)^2 \leqslant 2 \cdot 0,2^2$, т.е. $0,64 + 0,36 \leqslant 0,08$, что неверно.

Ответ: $a \in \left\{0; \frac{\sqrt{2}}{2}; ; \frac{10+\sqrt{2}}{98}\right\}$

Задание 19.

Из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составлена дробь А, числитель и знаменатель которой — пятизначные числа (каждая цифра использована ровно один раз). а) Какое наибольшее значение может принимать А? б) Может ли значение А оказаться целым числом? в) Найдите такое А, чтобы значение |А − 1| было наименьшим.

Решение:

а) Пусть A — наибольшее из возможных. Тогда $A = \frac{a}{b}$, где b — наименьшее и a — наименьшее из пятизначных чисел, удовлетворяющих условию, т.е. $A = \frac{98765}{10234}$.

б) Может. Например: $A = \frac{96270}{48135} = 2$.

в) $|A-1| = \left|\frac{a}{b} - 1\right| = \frac{|a-b|}{b} = B$. Легко видеть, что нас интересует случай минимально возможного числителя при соответственно наибольшем возможном знаменателе. Заметим, что числитель может быть уменьшен до трёхзначного числа, что на два порядка меньше пятизначного. Таким образом, главное влияние на величину B оказывает числитель, роль знаменателя — второстепенна. Для того, чтобы разность $|b-a|$ была наименьшей, числа a и b должны различаться как можно меньше. Возможны следующие варианты: $b = 80\,123$, $a = 79\,654$, тогда получаем число $B = \frac{469}{79\,654}$, или $b = 70\,123$, $a = 69\,854$, тогда $B = \frac{269}{70\,123}$ или $b = 60\,123$, $a = 59\,874$, тогда $B = \frac{249}{60\,123}$, или $b = 50\,123$, $a = 49\,876$, тогда $B = \frac{247}{50\,123}$. Дальнейшее уменьшение b не приводит к уменьшению числа B. Из указанных значений B наименьшим является $\frac{269}{70\,123}$ при $A = \frac{69\,854}{70\,123}$.

Ответ: А) $\frac{98765}{10234}$*; Б)**Да,*** $\frac{41358}{20679}$***=2;*** *В)*$\frac{69854}{70123}$