

Вариант ЕГЭ по математике (профильный уровень).

Тренировочный вариант ЕГЭ № 237 с сайта: alexlarin.net

Задание 1.

Спидометр автомобиля показывает скорость в милях в час. Какую скорость (в милях в час) показывает спидометр, если автомобиль движется со скоростью 120 км в час? (Считайте, что 1 миля равна 1,6 км.)

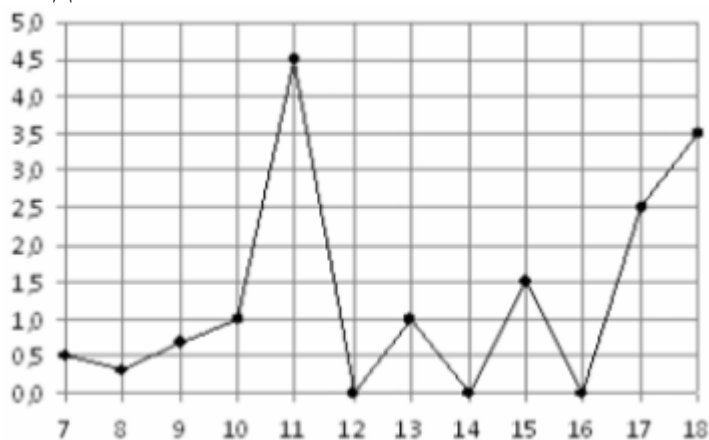
Решение:

Скорость автомобиля: $V = \frac{120}{1,6} = 75$ миль в час.

Ответ: 75.

Задание 2.

На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Элисте с 7 по 18 декабря 2001 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней за данный период не выпадало осадков.



Решение:

По графику видно, что осадки отсутствовали 12, 14 и 16 числа, то есть 3 дня.

Ответ: 3.

Задание 3.

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



Решение:

Проведем диаметр данной окружности - он будет равен 5, следовательно, радиус равен 2,5 ($R = \frac{D}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$)

Ответ: 2,5.

Задание 4.

При изготовлении подшипников диаметром 61 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше, чем на 0,01 мм, равна 0,976. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше, чем 60,99 мм, или больше, чем 61,01 мм.

Решение:

Вероятность того, что будет отличаться менее, чем на 0,01 составляет 0,976, следовательно, вероятность противоположного события что отличаться будет более чем на 0,01: $P = 1 - 0.976 = 0,024$

Ответ: 0,024

Задание 5.

Найдите корень уравнения $362x + 1 = \frac{1}{6}$

Решение:

$$362x + 1 = \frac{1}{6} \Rightarrow (62)2x + 1 = 6 - 1 \Rightarrow 4x + 2 = -1 \Rightarrow 4x = -3 (:4) \Rightarrow x = -0,75$$

Ответ: -0,75

Задание 6.

Один из углов прямоугольного треугольника равен 69° . Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



Решение:

$$\angle CHB = 69^\circ \Rightarrow \angle HCB = 90 - 69 = 21^\circ \text{ (CHB - прямоугольный)}$$

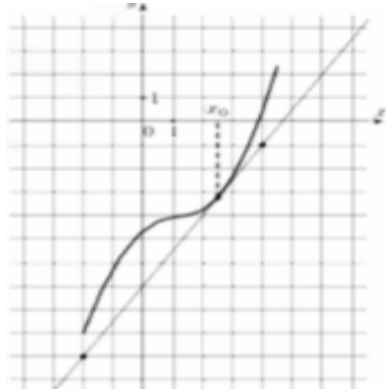
$$\angle DCB = \frac{90}{2} = 45 \text{ (CD - биссектриса)}$$

$$\angle DCH = 45 - 21 = 24^\circ$$

Ответ: 24.

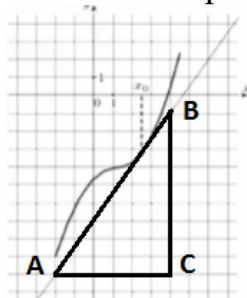
Задание 7.

На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $y'=f'(x)$ в точке x_0 .



Решение:

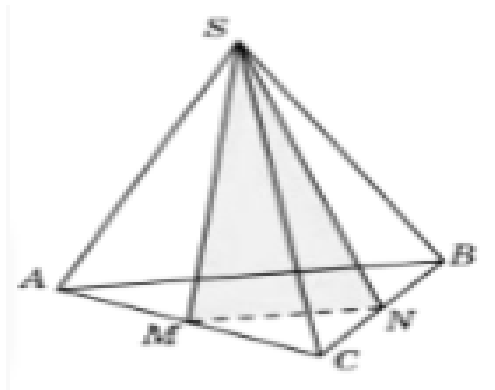
Значение производной в точке равно значению тангенса угла между касательной, проведенной в эту точку, и осью ОХ. Построим треугольник прямоугольный как показано на рисунке:



$$\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{9}{6} = 1,5 \text{ Ответ: } 1,5.$$

Задание 8.

От треугольной пирамиды, объем которой равен 12, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.



Решение:

Объем пирамиды находится как треть произведения площади основания пирамиды на высоту. У начальной и отсеченной пирамиды высота одинаковая, различаться будут площади основания. Треугольник MNC подобен треугольнику ABC (MN - средняя линия), и коэффициент подобия у данных треугольников $\frac{1}{2}$. Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия:

$$\frac{S_{MNC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$S_{MNC} = \frac{1}{4} S_{ABC}$$

$$\text{Тогда и } V_{MNCS} = \frac{1}{4} S_{ABC} \cdot h = 3$$

Ответ: 3.

Задание 9.

Найдите значение выражения $\log_2 5 \cdot \log_5 0,25$

Решение:

$$\log_2 5 \cdot \log_5 0,25 = \log_2 5 \cdot \log_5 2^{-2} =$$

$$\log_2 5 \cdot (-2) \log_5 2 = -2 \cdot \log_2 5 \cdot \frac{1}{\log_5 2} = -2$$

Ответ: -2

Задание 10.

В розетку электросети подключен прибор, общее сопротивление которого 80 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите (в омах) наименьшее возможное сопротивление этого обогревателя,

если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 сопротивление задается формулой $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормальной работы электросети общее сопротивление в ней должно быть не менее 30 Ом.

Решение:

Подставим известные значения в уравнение:

$$30 = \frac{80 \cdot R_2}{80 + R_2} \Rightarrow 30 \cdot (80 + R_2) = 80 \cdot R_2 \Rightarrow$$

$$2400 + 30 \cdot R_2 = 80 \cdot R_2 \Rightarrow$$

$$2400 = 50 \cdot R_2 \quad (:50) \Rightarrow$$

$$R_2 = 48$$

Ответ: 48.

Задание 11.

Расстояние между городами А и В равно 450 км. Из города А в город В выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 70 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 240 км от города А. Ответ дайте в км/ч.

Решение:

Расстояние от города В: $SB = 450 - 240 = 210$ км

Время авто из города В: $\frac{210}{70} = 3$ ч

Время авто из города А: $3 + 1 = 4$ ч

Скорость авто из города А: $\frac{240}{4} = 60$ км/ч

Ответ: 60.

Задание 12.

Найдите точку максимума функции $y = (x - 4)^2 \cdot e^x$

Решение:

Найдем производную этой функции и приравняем её к нулю:

$$y' = ((x - 4)^2)' e^x + (e^x)' (x - 4)^2 = 0$$

$$y' = 2(x - 4)e^x + e^x(x - 4)^2 = 0$$

$$e^x(x - 4)(2 + x - 4) = 0$$

$$x = 4; x = 2$$

Начертим координатную прямую, отметим полученные точки и расставим знаки, которые принимает производная на полученных промежутках.



Тогда $x = 2$ - точка максимума

Ответ: 2.

Задание 13.

Дано уравнение $2 \cdot 8 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \left(\frac{1}{2}\right) \cos 2x$

А) Решите уравнение.

Б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$

Решение:

а) $2 \cdot 8 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \left(\frac{1}{2}\right) \cos 2x$

$2 \cdot (2^3)^{\sin(x)} = (2^{-1})^{\cos 2x} \Rightarrow 2^{1+3\sin x} = 2^{-\cos 2x} \Rightarrow$

$1 + 3\sin x + \cos 2x = 0 \Rightarrow$

$1 + 3\sin x + 1 - 2\sin^2 x = 0 \Rightarrow$

$2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0 \Rightarrow$

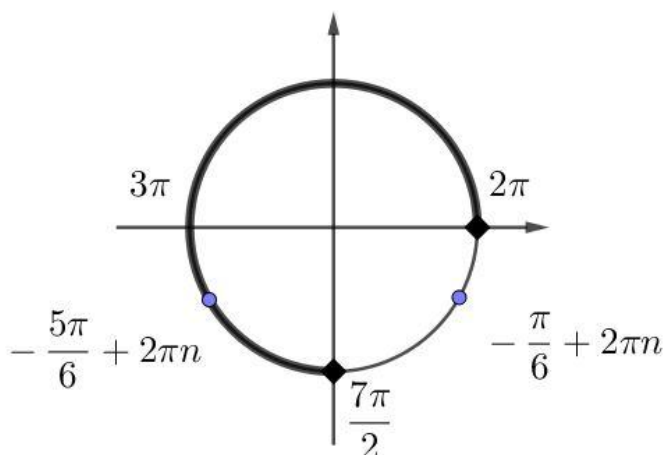
$D = 9 + 16 = 25 = 5^2$

$\sin x_1 = \frac{3+5}{4} = 2 \Rightarrow \emptyset$

$\sin x_2 = \frac{3-5}{4} = -0,5 \Rightarrow$

$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

б) Начертим единичную окружность и отметим полученные корни и данный отрезок на ней:



Как видим $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi$ попадает в данный отрезок. Чтобы найти частный случай этого корня мы должны к 3π прибавить $\frac{\pi}{6}$. Тогда получим $\frac{19\pi}{6}$.
 Ответ: а) $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{19\pi}{6}$.

Задание 14.

В конусе с вершиной в точке Р высота $PO = \sqrt{7}$. В его основании проведена хорда АВ, отстоящая от точки О на расстоянии, равном 3. Известно, что радиус основания конуса равен 5.

А) Докажите, что расстояние от точки Р до прямой АВ вдвое меньше длины отрезка АВ.

Б) Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды РОАВ.

Решение:

А) Проведем образующие РВ и РА, высоту РН $\triangle APB$. Так как $RH \perp AB$, то по теореме о трех перпендикулярах $OH \perp AB$. Если по условию $AO = 5$, $OH = 3$, то: $AH = 4$. Аналогично $BH = 4$. Следовательно, $AB = 8$. Очевидно, $RH^2 = PO^2 + OH^2 = 7 + 9 = 16$; $RH = 4$. Поскольку РН по способу построения есть расстояние от точки В до прямой АВ, верное числовое равенство $8 = 4 \cdot 2$ и доказывает требуемое. Б) Поместим заданный конус в декартову систему координат, как показано на

рисунке. Имеем: $O(0;0;0)$, $P(0;0;\sqrt{7})$, $A(4;3;0)$, $B(-4;3;0)$. Уравнение сферы радиуса R, описанной около пирамиды РОАВ, имеет вид:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$, где $(a;b;c)$ - тройка соответствующих координат центра этой сферы. Поскольку координаты вершин пирамиды обязаны удовлетворить указанному уравнению, будет верна система уравнений

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = R^2 \\ a^2 + b^2 + (\sqrt{7} - c)^2 = R^2 \\ (-4 - a)^2 + (3 - b)^2 + c^2 = R^2 \\ (4 - a)^2 + (3 - b)^2 + c^2 = R^2 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = R^2 \\ a^2 + b^2 + (\sqrt{7} - c)^2 = R^2 \\ (4 + a)^2 + (3 - b)^2 + c^2 = R^2 \\ (4 - a)^2 + (3 - b)^2 + c^2 = R^2 \end{cases} \cdot (4)-(3):$$

$$(4 - a)^2 - (4 + a)^2 = 0 \Rightarrow a = 0. \text{ Но тогда: } \begin{cases} b^2 + c^2 = R^2 \\ b^2 + (\sqrt{7} - c)^2 = b^2 + c^2 \\ 16 + 9 - 6b + b^2 + c^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2 + c^2 = R^2 \\ 7 - 2\sqrt{7}c = 0 \\ 16 + 9 - 6b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R^2 = b^2 + c^2 \\ c = \sqrt{7}/2 \\ b = 25/6 \end{cases} \cdot R^2 = \frac{625}{36} + \frac{7}{4} = \frac{625+63}{36} = \frac{688}{36} = \frac{172}{9}; R = \frac{2\sqrt{43}}{3}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{43}}{3}$.

Задание 15.

Решите неравенство

$$\frac{(\log_2 x^4 + 1) \cdot (\log_2 x - 3) - \log_2 x + 2}{\log_2^2 x - 5 \log_2 x + 6} \geq \frac{\log_2^2 x - \log_2 x^3 + 1}{3 - \log_2 x}$$

Решение:

Пусть $\log_2 x = t$. Тогда: $\frac{(4t+1) \cdot (t-3) - (t-2)}{(t-3)(t-2)} + \frac{t^2 - 3t + 1}{t-3} \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(4t+1)(t-3)}{(t-3)(t-2)} - \frac{t-2}{(t-3)(t-2)} + \frac{t(t-3)}{t-3} + \frac{1}{t-3} \geq 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{4t+1}{t-2} - \frac{1}{t-3} + t + \frac{1}{t-3} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 3 \\ \frac{4t+1}{t-2} + t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 3 \\ \frac{4t+1+t^2-2t}{t-2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 3 \\ \frac{t^2+2t+1}{t-2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 3 \\ \frac{(t+1)^2}{t-2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 3 \\ t = -1. \\ t > 2 \end{cases}$$

Перейдем к переменной x . $\log_2 x \neq 3 \Leftrightarrow x \neq 8$. $\log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = 1/2$. $\log_2 x > 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x > 4. \text{ Окончательно: } x \in \left\{ \frac{1}{2} \right\} \cup (4; 8) \cup (8; +\infty).$$

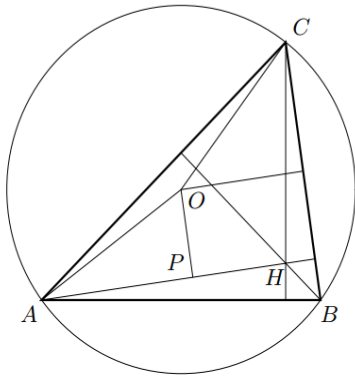
Ответ: $\{0,5\} \cup (4;8) \cup (8; +\infty)$.

Задание 16.

В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H , точка O — центр описанной окружности, точка K — середина BC . а) Докажите, что $|AH|$ вдвое длиннее отрезка OK ; б) Найдите длину отрезка OH , если известно, что $|AB| = 5$, $|BC| = 6$, $|AC| = 7$.

Решение:

а) Рассмотрим гомотегию (центральное подобие) с центром в точке пересечения M медиан треугольника ABC : $M = (AK) \cap (CL)$, где $L \in [AB]$ и $|LA| = |LB|$, и коэффициентом $-\frac{1}{2}$. Тогда $H_M^{-\frac{1}{2}}(C) = L$;



$H_M^{-\frac{1}{2}}(A) = K$. При гомотегии углы сохраняются, следовательно $H_M^{-\frac{1}{2}}((BC)) \parallel (BC)$; $H_M^{-\frac{1}{2}}((AH)) \parallel (AH)$. Следовательно, (AH) отображается в (OK) ; (CH) отображается в (OL) , следовательно, $H_M^{-\frac{1}{2}}(H) = O \Rightarrow |AH| = 2|OK|$, что и требовалось доказать.

$$\begin{aligned} \text{б) Из } \triangle ABC: \cos \beta &= \frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{2|AB| \cdot |AC|} = \\ &= \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin \beta = \frac{2\sqrt{6}}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Пусть AA_1 — высота, $(OP) \perp (AA_1)$, $P \in (AA_1)$. Тогда OKA_1P — прямоугольник. Из $\triangle HCA_1$ $|HA_1| = \frac{|CA_1|}{\operatorname{tg} \beta}$. Из $\triangle ABA_1$ $|AA_1| = |AB| \sin \beta = 2\sqrt{6}$, $|CA_1| = \sqrt{|AC|^2 - |AA_1|^2} =$

$$= \sqrt{49 - 24} = 5, \text{ следовательно, } |A_1H| = \frac{5}{2\sqrt{6}}. \text{ Поскольку } R = |OC| = \frac{|AC|}{2 \sin \beta} = \frac{7}{2 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5}} =$$

$$= \frac{35}{4\sqrt{6}}, \text{ то } |OK| = \sqrt{R^2 - |CK|^2} = \sqrt{\frac{35^2}{96} - 9} = \frac{19}{4\sqrt{6}}.$$

Теперь, учитывая, что $|PH| = |PA_1| - |HA_1| = |OK| - |HA_1| = \frac{19}{4\sqrt{6}} - \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{9}{4\sqrt{6}}$, и $|OP| = |CA_1| - |CK| = 5 - 3 = 2$, из $\triangle OPH$ получаем по теореме Пифагора:

$$|OH| = \sqrt{|PH|^2 + |OP|^2} = \sqrt{\frac{81}{96} + 4} = \frac{\sqrt{310}}{8}.$$

II. Другое решение.

Как было показано в п. а), $2\vec{OK} = \vec{AH}$. С другой стороны, $\vec{OK} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC})$. Отсюда получаем: $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{AH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ (формула Гамильтона). Следовательно,

$$\begin{aligned} |OH| &= \sqrt{(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})^2} = \sqrt{3R^2 + 2R^2(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma)} = \\ &= R\sqrt{4(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - 3} = \frac{35}{4\sqrt{6}} \sqrt{4\left(\left(\frac{19}{35}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{7}\right)^2\right) - 3} = \frac{\sqrt{310}}{8}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{310}}{8}$.

Задание 17.

В 2016 году в НИИ «Наномир» работали 20 сотрудников: директор, пять его заместителей, 12 инженеров и две уборщицы. Среднемесячная зарплата директора со

составляла 500 тыс. руб., зама – 200 тыс. руб., инженера 50 тыс. руб., уборщицы – 25 тыс. руб.

С 1 января 2017 года 4 инженера ушли на заслуженный отдых. Чтобы сохранить среднюю зарплату по НИИ на уровне прошлого года, директор решил изменить зарплату только у своих замов.

В конце 2017 года неожиданно выяснилось, что годовой фонд заработной платы НИИ, сформированный в объеме прошлого года, оказался выбран не полностью. В связи с этим все оставшиеся на счету фонда деньги директор перечислил себе в качестве премии.

Определите:

- а) среднюю зарплату по НИИ в 2017 году;
- б) на сколько % изменилась (увеличилась или уменьшилась) зарплата заместителей директора НИИ в 2017 году;
- в) размер премии, полученной директором НИИ в конце 2017 года

Решение:

а) Фонд заработной платы (в месяц): $500 + 5 \cdot 200 + 12 \cdot 50 + 2 \cdot 25 = 2150$ тыс. руб. Следовательно, средняя зарплата по НИИ составляла 107,5 тыс. руб. (как 2016-м, так и в 2017 году).

б) Поскольку количество работников изменилось, обозначив новую зарплату заместителей через x , получим уравнение: $500 + 5x + 8 \cdot 50 + 2 \cdot 25 = 107,5 \cdot 16$, откуда $5x = 770$, т.е. новая зарплата заместителей $x = 154$ тыс. руб. в месяц. Это означает, что зарплата заместителей уменьшилась в 2017 году на 23% по сравнению с 2016 годом.

в) Разница между фондом заработной платы и реальными выплатами составила $2150 - 1720 = 430$ тыс. руб. — эти деньги и есть размер премии, выплаченной в конце 2017 года директору.

Ответ: а) 107,5 тыс. руб. в месяц; б) на 23% процента уменьшилась; в) 430 тыс. руб.

Задание 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $41-x^2 - 3a^2 \cdot 31-x^2 + 3a^3 - a^2 = 0$ имеет ровно два корня.

Решение:

В исходном уравнении $4^{1-x^2} - 3a^2 \cdot 2^{1-x^2} + 3a^3 - a^2 = 0$ выполним замену переменной: $t = 2^{1-x^2}$. Получим уравнение $t^2 - 3a^2t + 3a^3 - a^2 = 0$. В этом уравнении $t > 0$. Поскольку $1 - x^2 \leq 1$, имеем: $2^{1-x^2} \leq 2 \iff t \leq 2$. Если $x_0 \neq 0$ является корнем исходного уравнения, то и $-x_0$ — также является его корнем. Следовательно, преобразованное уравнение должно иметь ровно один корень в промежутке $(0; 2]$. Более того, если 2 — корень преобразованного уравнения, то исходное уравнение имеет нечётное количество корней, т.к. равенство $2^{1-x^2} = 2$ выполняется только при $x = 0$.

1) Преобразованное уравнение имеет единственный корень при $D = 0$, т.е. $D = 9a^4 - 12a^3 + 4a^2 = a^2(3a - 2)^2 = 0$. При $a = 0$ получаем $t = 0 \notin (0; 2)$. При $a = \frac{2}{3}$ получаем:

$$\left(t - \frac{2}{3}\right)^2 = 0 \iff t = \frac{2}{3}, \text{ т.е. } a = \frac{2}{3} \text{ — решение задачи.}$$

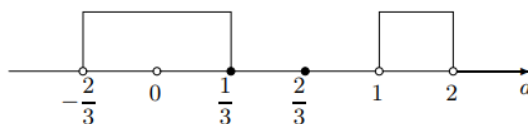
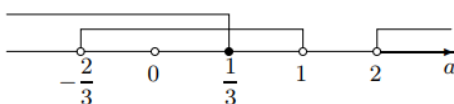
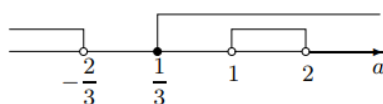
2) Обозначим $f(t) = t^2 - 3a^2t + 3a^3 - a^2$, и рассмотрим теперь промежуток $(0; 2)$ для значений корня преобразованного уравнения. Обозначим $f(t) = t^2 - 3a^2t + 3a^3 - a^2$. Для того, чтобы единственный корень этого уравнения попадал в указанный промежуток, достаточно, чтобы $a \neq 0$ и

$$\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(2) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (a-1)(a-2)\left(a + \frac{2}{3}\right) < 0 \\ a^2\left(a - \frac{1}{3}\right) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(0) < 0 \\ f(2) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (a-1)(a-2)\left(a + \frac{2}{3}\right) > 0 \\ a^2\left(a - \frac{1}{3}\right) < 0 \end{cases}$$

Остаётся рассмотреть случай $a = \frac{1}{3}$. В этом случае преобразованное уравнение принимает вид: $t\left(t - \frac{1}{3}\right) = 0$, откуда $t = \frac{1}{3}$ — единственный корень в промежутке $(0; 2)$, т.е. $a = \frac{1}{3}$ — решение задачи.

Применим метод интервалов.



Окончательно получаем:

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{2}{3}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right] \cup \left\{\frac{2}{3}\right\}.$$

Задание 19.

В ряду чисел $3 * 4 * 5 * 6 * 12 * 13 * 14 * 15$ на месте каждой звездочки поставил и знак «+» или «-»

» (по своему усмотрению) и подсчитали результат. А) Могло ли в результате вычисления получиться число 9? Б) Какое наименьшее натуральное число могло

получиться в результате вычисления? В) В ряду чисел $3 * 4 * 5 * 6 * 12 * 13 * 14 * 15$ на месте каждой звездочки поставили знак « $\times$ » или « $\div$ » (по своему усмотрению) и подсчитали результат. Какое наименьшее натуральное число могло получиться в результате вычисления?

Решение:

а) При любом распределении знаков результат будет выглядеть как $3 \pm 4 \pm 5 \pm 6 \pm 12 \pm 13 \pm 14 \pm 15$. Сумма и разность чётных чисел — чётное число. Сумма и разность любых двух нечётных чисел — также чётна. Следовательно, результат подсчёта при любой расстановке знаков — чётный. 9 — нечётное число. Следовательно, 9 не может быть результатом.

б) Выше было показано, что результат всегда чётный. Наименьшее чётное натуральное число 2. Это число может быть получено, например, следующим образом: $3 - 4 - 5 + 6 - 12 + 13 - 14 + 15 = 2$. Ответ: 2.

в) Результатом вычисления в этом случае является дробь. Для того, чтобы эта дробь была натуральным числом, необходимо, чтобы все делители знаменателя присутствовали в числителе. Поэтому в знаменателе не может быть чисел 13 и 14. Для того, чтобы натуральный результат был наименьшим из возможных, достаточно, чтобы в знаменателе находилось максимально допустимое число. Итак: искомая дробь имеет вид: $\frac{3 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{4 \cdot 6 \cdot 15} = 91$, т.е.: сокращены все множители числителя, за исключением неустраиваемых за счёт сокращения. Таким образом, 91 — наименьшее возможное натуральное число для пункта в). Осталось показать необходимое для этого распределение знаков: $91 = 3 : 4 \times 5 : 6 \times 12 \times 13 \times 14 : 15$.

Ответ: а) Нет; б) 2; в) 91.