

Задание 1.

Бассейн имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Его длина, ширина и глубина равны соответственно 25 м, 12 м и 2 м. Для облицовки дна и стен бассейна решено приобрести плитку по цене 500 р. за квадратный метр. Сколько рублей будет стоить покупка, если по периметру бассейна дополнительно планируется выложить прямоугольную дорожку шириной 1 м из той же плитки?

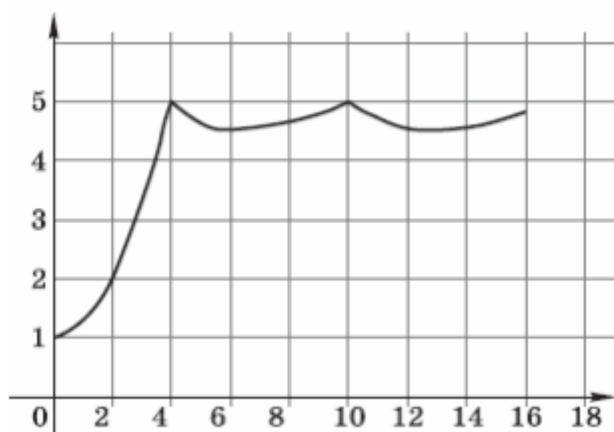
Решение:

Найдем площадь плитки, необходимой на бассейн. У бассейна две пары одинаковых стенок плюс одно дно: $25 \cdot 2 \cdot 2 + 12 \cdot 2 \cdot 2 + 25 \cdot 12$. К нему прибавим площадь дорожки, для этого найдем площадь прямоугольника со сторонами "25+2" и "12+2" и вычтем из нее площадь дна бассейна: $27 \cdot 14 - 25 \cdot 12$. В итоге: $25 \cdot 2 \cdot 2 + 12 \cdot 2 \cdot 2 + 25 \cdot 12 + 27 \cdot 14 - 25 \cdot 12 = 526$. Тогда стоимость покупки составит: $526 \cdot 500 = 263000$.

Ответ: 263000.

Задание 2.

На графике показано изменение давления в паровой турбине после запуска. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — давление в атмосферах. Определите по графику, сколько минут прошло от запуска турбины до момента, когда давление в первый раз достигло наибольшего значения.

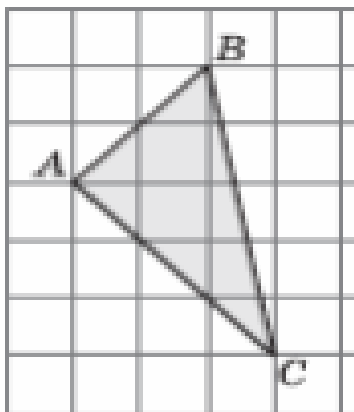


Решение:

По графику видно, что впервые максимальное значение (равное 5) достигается на 4 минуте. Ответ: 4

Задание 3.

Найдите площадь треугольника ABC, если сторона клетки равна 4.



Решение:

Для этого достроим прямоугольник размером 3 на 5, в который поместим треугольник ABC. Далее необходимо из площади прямоугольника вычесть площади "лишних" трех прямоугольных треугольников, чтобы осталась только площадь ABC:

$$S = 3 \cdot 5 - \frac{1}{2}(2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 3) = 6$$

Также следует учитывать, что размер клетки составляет $4 \cdot 4$, то есть площадь одной клетки $4 \cdot 4 = 16$. Тогда итоговая площадь $6 \cdot 16 = 96$.

Ответ: 96.

Задание 4.

На прилавке лежат 8 одинаковых пар перчаток, но у одной пары есть незаметный снаружи брак внутри обеих перчаток. В ходе примерок все перчатки перемешались. Продавец разделил все перчатки случайным образом на 4 группы по 4 штуки. Какова вероятность того, что обе бракованные перчатки находятся в одной группе?

Решение:

Пусть одна перчатка уже находится в какой-то группе, тогда свободных мест в ней (в группе) остается 3. В то же время перчаток остается 15. Следовательно, вероятность того, что вторая перчатка также попадет в эту группу: $P = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0,2$.

Ответ: 0,2.

Задание 5.

Решите уравнение $\sqrt{x^2 + 16} = 3x - 4$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из корней.

Решение:

Для данного уравнения необходимо будет делать проверку или же писать ОДЗ (так как дан корень четной степени). Будем делать проверку. Возведем обе части уравнения в квадрат, тогда: $(\sqrt{x^2 + 16})^2 = (3x - 4)^2 \Rightarrow x^2 + 16 = 9x^2 - 24x + 16 \Rightarrow 8x^2 - 24x = 0 \Rightarrow 8x(x - 3) = 0$. Тогда $x_1 = 0$; $x_2 = 3$. Первый корень не подходит, так как получится при подстановке $4 = -4$.

Ответ: 3.

Задание 6.

Найдите острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.

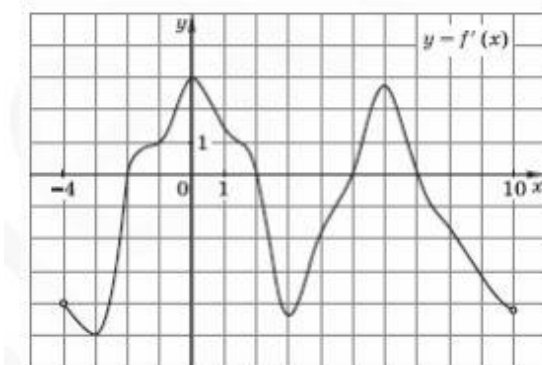
Решение:

Пусть один угол острый равен $2x$, второй равен $2y$, тогда по свойству углов прямоугольного треугольника: $2x + 2y = 90 \Rightarrow x + y = 45$. То есть сумма острых углов получившегося тупоугольного треугольника составляет 45. Тогда и угол между этими биссектрисами (как внешний угол не смежный с данными острыми углами для тупоугольного треугольника) составляет 45.

Ответ: 45.

Задание 7.

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ - производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 10)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x$ или совпадает с ней.



Решение:

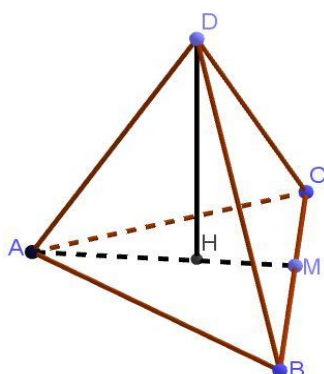
Раз касательная к графику параллельна графику функции $y=x$, то значения коэффициента при x у нее должно быть равно 1 (Графики линейных функций $y = k_1x + b_1$; $y = k_2x + b_2$ параллельны при $k_1 = k_2$. А это значение и есть значение производной. То есть необходимо найти количество точек, где значение производной равно 1 (чертим прямую $y=1$ и находим количество пересечений с графиком функции). Их будет 4.

Ответ: 4.

Задание 8.

Высота правильной треугольной пирамиды втрое меньше стороны основания. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

Решение:



Пусть $DH = a$, тогда $AB = 3a$. Из треугольника равностороннего ABC : $AM = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{3\sqrt{3}a}{2}$. Точка H - точка пересечения медиан треугольника ABC , тогда $AH = \frac{2}{3} AM = \sqrt{3}a$. Из треугольника AHD : $\operatorname{tg} \angle DAN = \frac{DH}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, тогда сам угол составляет 30 градусов.

Ответ: 30.

Задание 9.

Найдите значение выражения $x + 2^{3x+2} \cdot 8^{-x}$ при $x = 6$.

Решение:

Упростим данное выражение: $x + 2^{3x+2} \cdot 8^{-x} = x + 2^{3x+2} \cdot 2^{-3x} = x + 2^2$.

Подставим имеющиеся значения: $6 + 2^2 = 6 + 4 = 10$.

Ответ: 10.

Задание 10.

После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик определяет его, измеряя время падения t небольших камушков в колодец и рассчитывая по формуле $h = 5t^2$. До дождя время падения камушков составляло 1,4 с. На какую минимальную высоту должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось больше чем на 0,2 с?

Решение:

Найдем значение высоты при времени 1,4 секунды и при времени, на 0,2 секунды меньше (то есть 1,2).

$$h_1 = 5 \cdot 1.4^2 = 9,8$$

$$h_2 = 5 \cdot 1.2^2 = 7,2$$

Тогда изменение высоты составит: $h_1 - h_2 = 9,8 - 7,2 = 2,6$.

Ответ: 2,6.

Задание 11.

Из точки А круговой трассы одновременно начинают равномерное движение в противоположных направлениях два тела. К моменту их встречи первое тело проходит на 200 м больше, чем второе, и возвращается в точку А через 25 мин после встречи. Найдите длину трассы в метрах, если второе тело возвращается в точку А через 36 мин после встречи.

Решение:

Пусть S км - расстояние от В до места встречи. Тогда $S+0,2$ км расстояние от А до места встречи. Пусть x км/ч - скорость тела из А, y км/ч - скорость тела из В. Время движения до встречи у них одинаковое, тогда: $\frac{S+0,2}{x} = \frac{S}{y}$. Время, за которое первое тело доедет до В 25 минут или $\frac{5}{12}$ часа: $\frac{S}{x} = \frac{5}{12}$. Аналогично время, за которое второе доедет до А после встречи 36 минут или $\frac{3}{5}$ часа: $\frac{S+0,2}{y} = \frac{3}{5}$.

Выразим во втором и третьем уравнении x и y через S : $x = \frac{12S}{5}$; $y = \frac{5(S+0,2)}{3}$. Подставим полученные выражения в первое уравнение: $\frac{5(S+0,2)}{12S} = \frac{3S}{5(S+0,2)} \Rightarrow 25(S+0,2)^2 = 36S^2 \Rightarrow 11S^2 - 10S - 1 = 0$.

Решим данное уравнение и получим, что $S_1 = 1$; $S_2 < 0$. В таком случае полное расстояние в км составит $1 + 0,2 + 1 = 2,2$, что в метрах 2200.

Ответ: 2200.

Задание 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x^2 - 8x + 64}{x}$ на отрезке $[4; 18]$.

Решение:

Найдем производную данной функции и приравняем ее к нулю:

$$y' = \frac{(x^2 - 8x + 64)' \cdot x - x' \cdot (x^2 - 8x + 64)}{x^2} = 0$$

$$y' = \frac{2x^2 - 8x - x^2 + 8x - 64}{x^2} = 0$$

$$\frac{x^2 - 64}{x^2} = 0$$

$$x_1 = -8; x_2 = 8$$

Отметим полученные значения на координатной прямой и расставим знаки производной, получим, что x_2 является точкой минимума. Тогда наименьшее значение функции на заданном отрезке будет именно в этой точке:

$$y(8) = \frac{8^2 - 8 \cdot 8 + 64}{8} = 8$$

Ответ: 8.

Задание 13.

а) Решите уравнение $\sin 2x = \sin x - 2\cos x + 1$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{3\pi}{2}; 3\pi]$

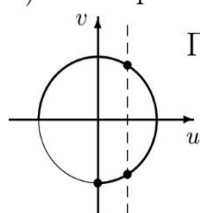
Решение:

а) Выполним стандартные преобразования:

$$\sin 2x = \sin x - 2 \cos x + 1 \iff 2 \sin x \cos x - \sin x + 2 \cos x - 1 = 0 \iff (2 \cos x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \end{cases} \text{ где } n, k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберём корни с помощью тригонометрической окружности.



Получаем: $x \in \left\{ \frac{3}{2}\pi; \frac{5}{3}\pi; \frac{7}{3}\pi \right\}.$

а) $\left\{ \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ где } n, k \in \mathbb{Z} \right\};$ б) $\left\{ \frac{3}{2}\pi; \frac{5}{3}\pi; \frac{7}{3}\pi \right\}.$

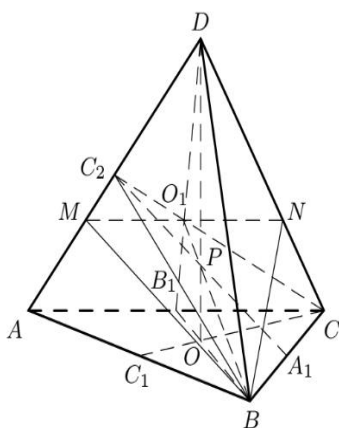
Ответ:

Задание 14.

В треугольной пирамиде $ABCD$ длины всех рёбер равны. Точка P равноудалена от вершин A и D , причём известно, что $PB = PC$ и прямая PB перпендикулярна высоте треугольника ACD , опущенной из вершины D . а) Докажите, что точка P лежит на пересечении высот пирамиды $ABCD$. б) Вычислите объём пирамиды $ABCD$, если известно, что $PB = \sqrt{\frac{3}{2}}$

Решение:

а) По условию, пирамида



$ABCD$ — правильная. Следовательно, $(AD) \perp (BC)$. Пусть $C_2 \in (AD)$ и $|AC_2| = |C_2D|$. Тогда $(AD) \perp (BC_2C) \Rightarrow P \in (BC_2C)$. Пусть $B_1 \in (AC)$ и $|AB_1| = |B_1C|$. $|PB| = |PC|$, $|DC| = |AC| \Rightarrow P \in (ADA_1)$, где $A_1 \in (BC)$ и $|A_1C| = |A_1B| \Rightarrow P \in (A_1C_2)$.

Пусть, далее, $(BO_1) \perp (DB_1)$, $O_1 \in (DB_1)$, и $(MN) \ni O_1$, $(MN) \parallel (AC)$. Тогда $(BMN) \perp (DB_1)$. Тогда $P \in (BMN)$. Но $(BMN) \cap (BC_2C) = (BO_1) \Rightarrow P \in (BO_1)$ — высоте пирамиды $ABCD$, опущенной из вершины B . С другой стороны, $P \in (AA_1D) \cap (B_1BD) = (DO)$ — высоте пирамиды $ABCD$, опущенной из вершины D . Следовательно, P — точка пересечения высот, что и требовалось доказать.

б) Рассмотрим треугольник B_1DB . По теореме Менелая имеем:

$$\frac{|D_1O_1|}{|B_1O_1|} \cdot \frac{|B_1O|}{|OB|} \cdot \frac{|OP|}{|PO|} = 1 \iff |DP| = 3|OP| \Rightarrow |BP| = |DP| = \frac{3}{4}h \Rightarrow h = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

С другой стороны, $|BO| = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}.$

Ответ: б) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Задание 15.

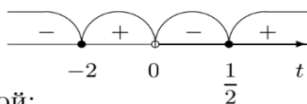
Решите неравенство $(\log_x 2 - 1) \log_2 2x \leq \frac{3}{2}$

Решение:

Пусть $t = \log_2 x$, тогда

$$(\log_x 2 - 1) \log_2(2x) \leq \frac{3}{2} \iff \left(\frac{1}{t} - 1\right)(t + 1) \leq \frac{3}{2} \iff$$

$$\iff \frac{t^2 - 1}{t} + \frac{3}{2} \geq 0 \iff \frac{2t^2 + 3t - 2}{t} \geq 0 \iff \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)(t + 2)}{t} \geq 0.$$



Применим метод интервалов:

Возвращаясь к исходной переменной:

$$\begin{cases} -2 \leq \log_2 x < 0 \\ \log_2 x \geq \log_2 \sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{4} \leq x < 1 \\ x \geq \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right) \cup [\sqrt{2}; +\infty).$$

Ответ: б) $\left[\frac{1}{4}; 1\right) \cup [\sqrt{2}; +\infty).$

Задание 16.

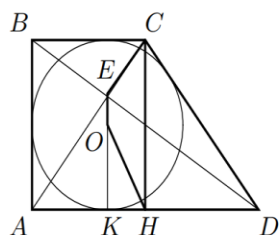
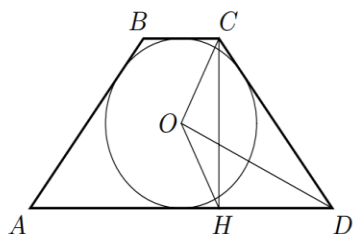
В трапецию ABCD с основаниями BC и AD вписана окружность с центром O, CH – высота трапеции, E – точка пересечения диагоналей.

А) Докажите, что $\angle OHC = \frac{1}{2} \angle ADC$

Б) Найдите площадь четырехугольника CEOH, если известно, что $\angle BAD = 90^\circ$, BC = 9, AD = 18.

Решение:

а) Пусть $\angle ADC = \delta$, тогда $\angle BCD = 180^\circ - \delta$. $\angle OCD = \frac{1}{2}(180^\circ - \delta) = 90^\circ - \frac{\delta}{2}$, $\angle OCH = \angle OCD = \angle HCD = 90^\circ - \frac{\delta}{2} - (90^\circ - \delta) = \frac{\delta}{2} = \angle OHC$. Что и требовалось доказать.



б) Из $\triangle CDH$: $|HD| = 9$, $|DC| = 27 - 2r$, поскольку $P_{ABCD} = 54$.
 $|CH| = \sqrt{(27 - 2r)^2 - 9^2}$. $S_{ABCD} = 27r = \frac{27}{2}\sqrt{(27 - 2r)^2 - 9^2}$,
откуда $(27 - 4r) \cdot 27 = 9^2 \Rightarrow r = 6$. Теперь, из $\triangle AED \sim \triangle BEC$
имеем: $\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|AD|}{|BC|} = 2$, следовательно, $|AE| = 10$, так как
(из $\triangle ABC$) $|AC| = 15$. Пусть $(EK) \parallel (AB)$, $K \in (AD)$. Тогда
 $|EK| = \frac{2}{3}|CH| = 8 \Rightarrow |AK| = 6$, следовательно, $(EK) \parallel (AB) \parallel (CH)$, т.е. $OECH$ — трапеция. $|EO| = 2$, $|CH| = 12$, $|KM| = 9 - 6 = 3 \Rightarrow S_{OECH} = \frac{2 + 12}{2} \cdot 3 = 21$.

Ответ: б) 21.

Задание 17.

В июле планируется взять кредит банке на сумму 20 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 47 млн рублей?

Решение:

Пусть A — размер кредита, B — величина снижения размера долга за год, n — продолжительность кредитования в годах. Вычислим выплаты сверх основной части кредита:

$$0,3A \left(1 + \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \dots + \frac{2}{n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{0,3A}{n} (1 + 2 + \dots + n) = 0,15A(n+1).$$

Таким образом, задача свелась к уравнению $0,15 \cdot 20(n+1) = 27$, откуда $n = 8$.

Ответ: 8.

Задание 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство:

$$3a(a - 7) - 8(a - 7)(2x + 1) \leq (8x^2 - 16x)(2x + 1) - 3ax^2 + 6ax$$

имеет решения на промежутке $[-1; 0)$.

Решение:

Выполним несложные преобразования:

$$\begin{aligned} 3a(a - 7) - 8(a - 7)(2^x + 1) &\leq (8x^2 - 16x)(2^x + 1) - 3ax^2 + 6ax \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a - 7)(3a - 8(2^x + 1)) &\leq 8x(x - 2)(2^x + 1) - 3ax(x - 2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a - 7(3a - 8(2^x + 1))) &\leq x(x - 2)(8(2^x + 1) - 3a) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{8}{3}(2^x + 1) - a \right) &(8 - (x - 1)^2 - a) \leq 0. \end{aligned}$$

Обозначим $f(x) = \frac{8}{3}(2^x + 1)$, $g(x) = 8 - (x - 1)^2$, тогда последнее неравенство примет вид:

$$(f(x) - a)(g(x) - a) \leq 0.$$

При $x = -1$: $f(-1) = 4 = g(-1)$, при $x = 0$: $f(0) = \frac{8}{3} < g(0) = 7$. Обе функции возрастают на промежутке $[-1; 0)$, причём функция f выпукла вниз (подобна экспоненте), а g — выпукла вверх (левая ветвь параболы, ветви направлены вниз). Следовательно, на всем промежутке $(-1; 0)$ график функции g находится выше графика функции f . Следовательно, при $a \geq 7$ и при $a < 4$ множители в последнем неравенстве имеют одинаковый знак, т.е. решений нет.

При $a \in [4; 7)$ решения существуют, т.к. существуют решения уравнения $8 - (x - 1)^2 = a$ в промежутке $[-1; 0)$. Действительно: $x \in [-1; 0) \Leftrightarrow -2 \leq x - 1 < -1 \Leftrightarrow 1 < (x - 1)^2 \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq -(x - 1)^2 < -1 \Leftrightarrow 4 \leq 8 - (x - 1)^2 < 7 \Leftrightarrow 4 \leq g(x) < 7$.

Ответ: $a \in [4; 7)$.

Задание 19.

Для членов последовательности целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_6$ при всех натуральных $k \leq 4$ имеет место неравенство: $a_{k+2} < 3a_{k+1} - 2a_k$. а) Приведите пример такой последовательности, для которой $a_1 = 0$ и $a_6 = 10$. б) Существует ли такая

последовательность, для которой $a_1 = a_3 = a_6$? в) Какое наименьшее значение может принимать a_2 , если $a_1 = 0$ и $a_6 = 1000$?

Решение:

а) В силу указанного соотношения, имеем: $a_3 < 3a_2 - 2a_1 = 3a_2$, т.е. $a_3 = 3a_2 - d_3$, где $d_3 > 0$. Далее: $a_4 < 3a_3 - 2a_2 = 7a_2 - 3d_3$, т.е. $a_4 = 7a_2 - 3d_3 - d_4$, где $d_4 > 0$. Следовательно, $a_5 < 3(7a_2 - 3d_3 - d_4) - 2(3a_2 - d_3) = 15a_2 - 7d_3 - 3d_4$, таким образом, $a_5 = 15a_2 - 7d_3 - 3d_4 - d_5$. Наконец, $a_6 < 3(15a_2 - 7d_3 - 3d_4 - d_5) - 2(7a_2 - 3d_3 - d_4) = 31a_2 - 15d_3 - 7d_4 - 3d_5$. Следовательно, $31a_2 > a_6 + 15d_3 + 7d_4 + 3d_5 \geq a_6 + 25$.

Для случая а) имеем: $a_2 \geq 2$. Таким образом, возможна такая последовательность: 0; 2; 5; 10; 19; 10.

б) Предположим, искомая последовательность существует. Тогда: $a_3 = a_1 < 3a_2 - 2a_1 \iff \iff a_1 < a_2$, т.е. $a_2 = a_1 + d$, где $d > 0$. Тогда $a_4 < 3a_1 - 2(a_1 + d) = a_1 - 2d$, $a_5 < 3a_4 - 2a_1 < 3(a_1 - 2d) - 2a_1 = a_1 - 6d$, т.е. $a_5 = a_1 - 6d - c$, где $c > 0$. Наконец, $a_6 = a_1 < 3(a_1 - 6d - c) - 2(a_1 - 2d) = a_1 - 4d - c \Rightarrow 4d + c < 0$, что невозможно. Следовательно, искомая последовательность не существует.

в) В силу последнего неравенства, полученного при решении пункта а) имеем: $31a_2 > 1025$, откуда получаем, что наименьшее значение $a_2 = 34$.

Ответ: а) Существует, например: 0; 2; 5; 10; 19; 10; б) не существует; в) 34.