

Вариант ЕГЭ по математике (профильный уровень).
Тренировочный вариант ЕГЭ № 239 с сайта: alexlarin.net

Задание 1.

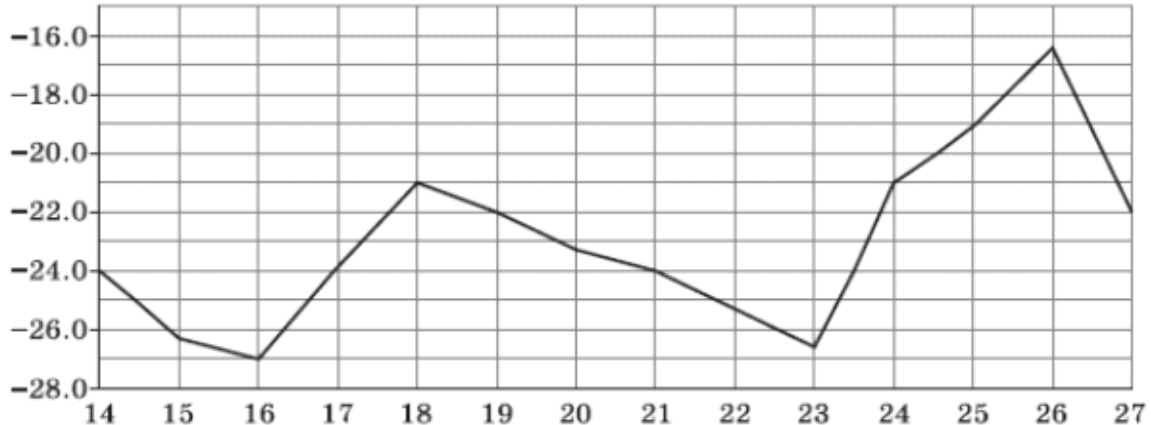
Подготовка книги к печати стоит 30 тыс. р. Печать одного экземпляра стоит 30 р. Сеть книжных магазинов покупает эту книгу у издательства по 70 р. за экземпляр. При каком наименьшем тираже книги издательство окажется не в убытке?

Решение:

Выручка с одной книги: $70 - 30 = 40$ рублей, тогда количество книг: $\frac{30000}{40} = 750$.
Ответ: 750.

Задание 2.

На рисунке изображён график среднесуточной температуры в г. Омске в период с 14 по 27 января 1974 г. На оси абсцисс откладываются числа месяца, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Определите по графику, какой была наибольшая среднесуточная температура в период с 14 по 21 января 1974 г. Ответ дайте в градусах Цельсия.

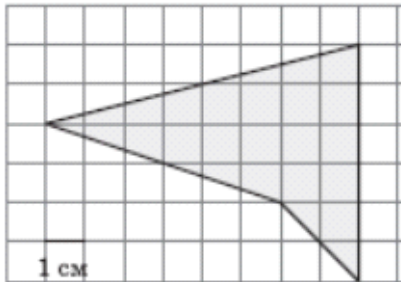


Решение:

Наибольшая температура на данном временном отрезке была 18 числа и составила -21.
Ответ: -21.

Задание 3.

На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см х 1 см изображён четырёхугольник. Найдите его площадь. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение:

Поместим данную фигуру в прямоугольник и вычтем из его площади лишние фигуры:

$$S = 6 \cdot 8 - \frac{1}{2}(2 \cdot 8 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 2) - 2 \cdot 6 = 20.$$

Ответ: 20.

Задание 4.

Поставщик заказывает опоры двигателя у двух фабрик. Первая фабрика выпускает 80% этих опор, вторая — 20 %. Первая фабрика выпускает 1 % бракованных опор, а вторая — 5 %. Найдите вероятность того, что случайно заказанная у поставщика опора двигателя будет исправной.

Решение:

Вероятность, что опора будет без брака на первой фабрике: 0,99, на второй фабрике : 0,95. Вероятность того, что опора будет с первой фабрики и без брака: $0,8 \cdot 0,99$, со второй: $0,2 \cdot 0,95$. Тогда, вероятность получить не бракованную опору : $0,8 \cdot 0,99 + 0,2 \cdot 0,95 = 0,982$.

Ответ: 0,982.

Задание 5.

Решите уравнение $7^{3x-2} \cdot 7^{x-1} = 7$

Решение:

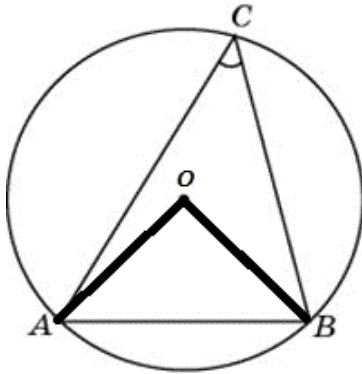
$$7^{3x-2} \cdot 7^{x-1} = 7 \Rightarrow 7^{3x-2+x-1} = 7^1 \Rightarrow 4x - 3 = 1 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1.$$

Ответ: 1.

Задание 6.

Радиус окружности равен 19. Найдите величину острого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $19\sqrt{2}$. Ответ дайте в градусах.

Решение:

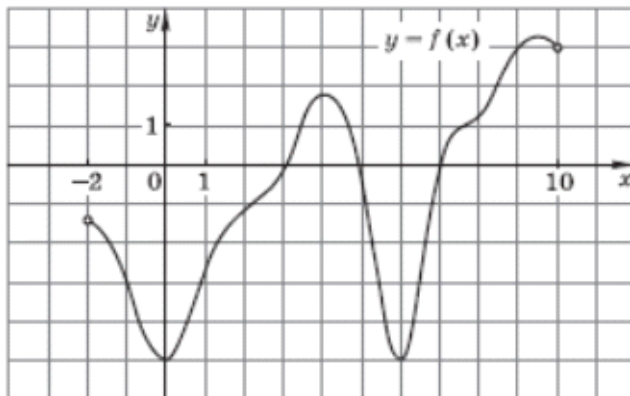


Из треугольника AOB : $\cos O = \frac{OB^2 + OA^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = \frac{19^2 + 19^2 - (19\sqrt{2})^2}{2 \cdot 19 \cdot 19} = 0$. Следовательно, угол O составляет 90. Угол ACB - вписанный, опирается на ту же дугу, что и AOC, следовательно, в два раза меньше, то есть 45.

Ответ: 45.

Задание 7.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 10)$. Определите количество точек с целыми абсциссами, в которых производная функции отрицательна.



Решение:

Производная функции отрицательна там, где сама функция убывает. На данном рисунке это промежутки $x \in (-2; 0) \cup (4; 6) \cup (9; 10)$. Целых значений, входящих в эти промежутки всего два: -1 ; 5.

Ответ: 2.

Задание 8.

В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 42, высота равна $7\sqrt{6}$. Найдите плоский угол при вершине пирамиды. Ответ дайте в градусах.

Решение:

AD-высота, медиана биссектриса $\triangle ABC$. $\angle CBD = 30^\circ$ так как $\triangle ABC$ - правильный. все углы по 60° . $CD = 0,5BC = 21$ см. Точка O делит BD в отношении 2:1 считая от вершины B. $BD^2 = BC^2 - CD^2 = 42^2 - 21^2 = 1764 - 441 = 1323$; $BD = 21\sqrt{3}$. $OD = 21\sqrt{3} / 3 = 7\sqrt{3}$ см. $\triangle OMD$. $MD^2 = OD^2 + OM^2 = 49 \cdot 6 + 49 \cdot 3 = 49 \cdot 9 = 441$; $MD = 21$ см. $\triangle MCD$ - прямоугольный равнобедренный, $CD = MD$, значит $\angle CMD = 45^\circ$, а так как MD биссектриса $\angle AMC$, то $\angle AMC = 90^\circ$.

Ответ: 90.

Задание 9.

Найдите значение выражения: $\frac{6\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}} - \frac{5\sqrt{x}}{x} + 3x - 6$ при $x=6$

Решение:

$$\frac{6\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}} - \frac{5\sqrt{x}}{x} + 3x - 6 = \frac{6\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}} - \frac{5}{\sqrt{x}} + 3x - 6 = \frac{6\sqrt{x}+5-5}{\sqrt{x}} + 3x - 6 = \frac{6\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + 3x - 6 = 6 + 3x - 6 = 3x = 18.$$

Ответ: 18.

Задание 10.

Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела (Вт) вычисляется по формуле $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,8 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 \text{ К}^4$ постоянная, S — площадь поверхности тела (м^2), T — температура тела (К). Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = 10^{20} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P не менее $2,28 \cdot 10^{25} \text{ Вт}$. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Ответ дайте в градусах Кельвина.

Решение:

$$P = \sigma ST^4 \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{P}{\sigma S}} = \sqrt[4]{\frac{2,28 \cdot 10^{25}}{5,8 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{64} \cdot 10^{20}}} = \sqrt[4]{\frac{228 \cdot 10^{23} \cdot 64}{58 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{20}}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 10^{23} \cdot 64}{10^{11}}} = \sqrt[4]{4^4 \cdot 10^{12}} = 4 \cdot 10^3 = 4000.$$

Ответ: 4000.

Задание 11.

Часы со стрелками показывают 11 ч 00 мин. Через сколько минут минутная стрелка в двенадцатый раз поравняется с часовой стрелкой?

Решение:

Первоначально минутная стрелка отстает от часовой на $\frac{11}{12}$ окружности (так как часовая стоит на 11 часах, а минутная на 0 часах). Тогда, разница в пройденном расстоянии минутной и часовой стрелками, к моменту, когда они первый раз поравняются (это будет в отметке 0 часов) будет составлять те самые $\frac{11}{12}$ окружности. Далее же минутная стрелка с каждым разом будет опережать на один полный круг каждый раз, когда догонит часовую, и так должно произойти еще 11 раз. Если взять, что длина окружности круга равна 1, тогда минутная стрелка пройдет больше часовой на $11 + \frac{11}{12}$ кругов. Выразим скорость минутной и часовой стрелки в частях окружности в минуту: один круг составляет 60 минут, следовательно, скорость минутной $\frac{1}{60}$ кругов в минуту. С другой стороны, круг составляет 12 часов по 60 минут, следовательно, скорость часовой $\frac{1}{12 \cdot 60}$ кругов в минуту. Пусть t - время, за которое минутная обгонит часовую 12 раз, тогда:

$$t \cdot \frac{1}{60} - t \cdot \frac{1}{12 \cdot 60} = 11 + \frac{11}{12} \Rightarrow t \cdot \left(\frac{12-1}{12 \cdot 60} \right) = \frac{12 \cdot 11 + 11}{12} \Rightarrow t = \frac{13 \cdot 11}{12} : \frac{11}{12 \cdot 60} \Rightarrow t = 780.$$

Ответ: 780.

Задание 12.

Найдите точку максимума функции $y = 10x \cos x - 7 \cos x - 10 \sin x - 4$, принадлежащую промежутку $(0; \frac{\pi}{2})$.

Решение:

Найдем производную данной функции:

$$y' = (10x)' \cos x + 10x (\cos x)' - 7 (\cos x)' - 10 (\sin x)' = 0$$

$$10 \cos x - 10x \sin x + 7 \sin x - 10 \cos x = 0 \Rightarrow$$

$$\sin x (7 - 10x) = 0 \Rightarrow 10x = 7 \Rightarrow x = 0,7$$

Отметим на координатной прямой полученные корни (учитываем, что корней вида $\pi \cdot n$ бесконечно, потому отметим те, которые наиболее близко расположены к промежутку $(0; \frac{\pi}{2})$). В итоге точкой максимума на данном промежутке является $x = 0,7$.

Ответ: 0,7.

Задание 13.

а) Решите уравнение $\sin x = \cos^2 x + \frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{6} \right)} \right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Решение:

$$\text{а) } \sin x = \cos^2 x + \frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{6}} \right) \iff \sin x = 1 - \sin^2 x + \frac{1}{2} \frac{\log_2 2}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}} \iff \sin^2 x + \sin x - 2 = 0.$$

Пусть $t = \sin x$, тогда $t^2 + t - 2 = 0 \iff (t - 1)(t + 2) = 0$. Поскольку $E(\sin) = [-1; 1]$, имеем: $\sin x = 1$, т.е. $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) Очевидно, $x = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}$.

Задание 14.

В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $|AB| = 4$, $|BC| = \sqrt{33}$, все боковые рёбра равны 4. На диагонали BD основания отмечена точка E , а на ребре AS — точка F так, что $|SF| = |BE| = 3$.

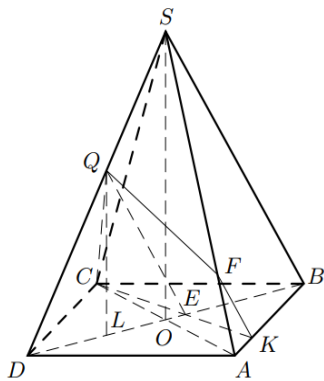
а) Докажите, что плоскость CEF параллельна SB .

б) Пусть плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q . Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC .

Решение:

а) Т.к. $|SA| = |SK| = |SD| = |SC|$, то если $(SO) \perp (ABC)$ и $O \in (ABC)$, то $\triangle AOS = \triangle BOS = \triangle COS = \triangle DOS \Rightarrow O = (BD) \cap (AC)$.

Из $\triangle ABD$: $|BD| = \sqrt{|AD|^2 + |AB|^2} = 7 \Rightarrow E \in [OB]$. Пусть $(CE) \cap (AB) = K$. Тогда, по теореме Менелая для $\triangle OAB$ и прямой CK имеем: $\frac{|BE|}{|EO|} \cdot \frac{|OC|}{|CA|} \cdot \frac{|AK|}{|BK|} = 1 \iff \frac{3}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\frac{2}{7}}{\frac{7}{7}} \cdot \frac{|AK|}{|BK|} = 1 \Rightarrow |BK| = 3|AK| \Rightarrow |BK| = 3$, $|AK| = 1$, $|AF| = 1 \Rightarrow \triangle AFK \sim \triangle ASB \Rightarrow (FK) \parallel (SB) \Rightarrow (EFC) \parallel (SB)$. Что и требовалось доказать.



б) Пусть $(EQ) \parallel (SB)$, $Q \in (DS)$, тогда $Q \in (CEF) \Rightarrow \triangle DSB \sim \triangle DEQ \Rightarrow \frac{|DE|}{|DB|} = \frac{|QD|}{|SD|} \iff \frac{4}{7} = \frac{|QD|}{4} \Rightarrow |QD| = \frac{16}{7}$.

Пусть теперь $(QL) \parallel (SO)$, тогда $(QL) \perp (ABC)$, $\triangle DQL \sim \triangle DSO \Rightarrow \frac{|QL|}{|SO|} = \frac{|DQ|}{|SD|}$. Из

$\triangle DSO$ по теореме Пифагора: $|SO| = \sqrt{|DS|^2 - |DO|^2} = \sqrt{16 - \frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$, следовательно,

из предыдущей пропорции получаем: $|QL| = \frac{|DQ| \cdot |SO|}{|SD|} = \frac{2}{7} \sqrt{15}$.

Ответ: б) $\frac{2}{7} \sqrt{15}$.

Задание 15.

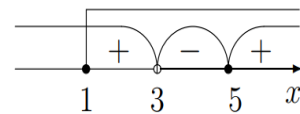
Решите неравенство: $(x^2 - 8x + 15)(2^{x-3} + 2^{3-x} - 2)^{-1}\sqrt{x-1} \leq 0$.

Решение:

Обозначим $t = 2^{x-3}$. Тогда исходное неравенство равносильно следующему:

$$(x-3)(x-5)\frac{1}{(t-1)^2}\sqrt{x-1} \leq 0, \text{ поскольку } t > 0. \text{ Отсюда: } \begin{cases} (x-3)(x-5) \leq 0 \\ x \geq 1 \\ t \neq 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} (x-3)(x-5) \leq 0 \\ x \geq 1 \\ x \neq 3 \end{cases} . \text{ Применим метод интервалов:}$$



Получаем ответ: $\{1\} \cup (3; 5]$.

Ответ: $\{1\} \cup (3; 5]$.

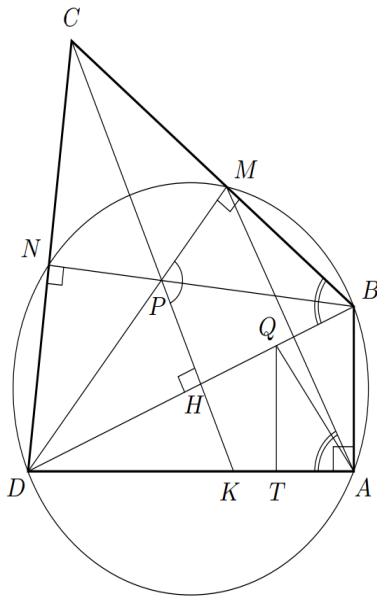
Задание 16.

Дан выпуклый четырёхугольник ABCD с прямым углом A. Окружность, проходящая через вершины A, B и D пересекает стороны BC и CD в точках M и N соответственно. Прямые BN и DM пересекаются в точке P, а прямая CP пересекает сторону AD в точке K.

а) Докажите, что точки A, M, P и K лежат на одной окружности. б) Найдите радиус этой окружности, если известно, что прямая СК параллельна прямой АМ и $|AB| = |AK| = |KD| = 4\sqrt{5}$.

Решение:

а) Так как $\angle DAB = 90^\circ$ по условию, то DB — диаметр окружности, описанной около треугольника ABD . Тогда P — ортоцентр в $\triangle BDC$, так как $\angle DNB = \angle DMB = 90^\circ$. Следовательно, $(CP) \perp (DB)$. Пусть $(CP) \cap (DB) = H$. Поскольку в четырёхугольнике $HPMB$ $\angle PHB + \angle PMB = 180^\circ$, то $\angle KPM + \angle DBM = \angle KPM + \angle DAM = 180^\circ$. Следовательно, около четырёхугольника $AKPM$ можно описать окружность. Что и требовалось доказать.



б) $(AM) \parallel (KP) \Rightarrow (AM) \perp (BH)$. Пусть $(AM) \cap (DB) = L$, тогда $\angle DAL = \angle ABL = \angle LBM \Rightarrow (BD)$ — серединный перпендикуляр к $[AM]$. Пусть $T \in (DA)$ и $|KT| = |AT|$ и $(TQ) \perp (DA)$, $Q \in (DB)$. Тогда Q — центр искомой окружности, а $R = |AQ|$ — её радиус. $\triangle DTQ \sim \triangle DAB \Rightarrow \frac{|TQ|}{|AB|} = \frac{|DT|}{|DA|} = \frac{3}{4} \Rightarrow |TQ| = 3\sqrt{5}$. Из прямоугольного треугольника ATQ по теореме Пифагора: $R = \sqrt{|AT|^2 + |TQ|^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (3\sqrt{5})^2} = \sqrt{65}$.

Ответ: $\sqrt{65}$.

Задание 17.

Банк планирует на один год вложить 30 % имеющихся у него средств в проект А, а остальные 70 % — в проект В. В зависимости от обстоятельств, проект А может принести от 32 % до 37 % годовых, а проект В — от 22 % до 27 % годовых. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им процент по заранее установленной ставке, уровень которой находится от 10 % до 20 % годовых. Определите, какую наименьшую и наибольшую прибыль в процентах годовых от суммарных вложений в проекты А и В может при этом получить банк.

Решение:

Очевидно, что наибольшая прибыль банка будет получена при максимальных доходах от проектов и наименьших возможных выплатах клиентам, а наименьшая прибыль банка случится при условии минимальных доходов от проектов при наибольших возможных выплатах. Пусть Δ — прибыль банка, S — имеющиеся в распоряжении банка средства. Тогда:

$$\max \Delta = 0,3S \cdot 0,37 + 0,7S \cdot 0,27 - 0,1S = 0,2S$$

$$\min \Delta = 0,3S \cdot 0,32 + 0,7S \cdot 0,22 - 0,2S = 0,05S$$

Следовательно, наименьшая возможная прибыль банка равна 5 %, а наибольшая — 20 %.

Ответ: Наименьшая возможная прибыль банка равна 5 %, а наибольшая — 20 %.

Задание 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(|2x + 1 - a| + |2x + 1 + a| - 2a)(|x^2 - 2x + a| + |x^2 - 2x - a| - 2a) = 0$$

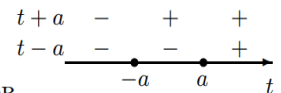
имеет ровно 4 целых решения.

Решение:

Данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\begin{cases} |2x + 1 - a| + |2x + 1 + a| = 2a \\ |((x - 1)^2 - 1) - a| + |((x - 1)^2 - 1) + a| = 2a \end{cases}$$

Отсюда следует, что решения существуют только для $a \geq 0$. Оба уравнения совокупности имеют вид: $|t - a| + |t + a| = 2a$. При $a = 0$ такое уравнение имеет единственное решение $t = 0$, т.е. совокупность имеет ровно три решения: $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$, $x = 2$. Таким образом, получаем, что $a > 0$ для того, чтобы совокупность могла иметь иное количество решений.



Рассмотрим уравнение $|t - a| + |t + a| = 2a$ используя метод интервалов.

При $t < -a$ получаем: $-t + a - t - a = 2a \Rightarrow t = -a$, что невозможно.

При $t > a$ получаем: $t - a + t + a = 2a \Rightarrow t = a$, что невозможно.

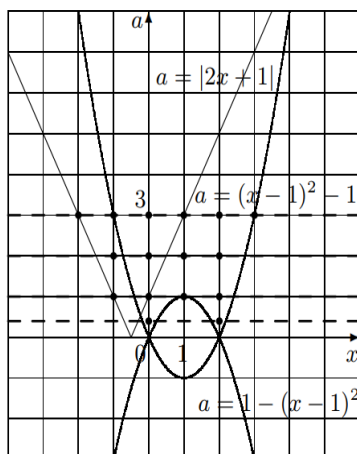
Наконец, при $t \in [-a; a]$ уравнение обращается в тождество.

Таким образом, первое уравнение совокупности равносильно двойному неравенству:

$$-a \leq 2x + 1 \leq a \iff \begin{cases} a \geq 2x + 1 \\ a \geq -2x - 1 \end{cases} . \text{ Аналогично, второе уравнение эквивалентно}$$

системе: $\begin{cases} a \geq (x - 1)^2 - 1 \\ a \geq 1 - (x - 1)^2 \end{cases}$. На плоскости $(x; a)$ эти системы несложно построить:

Возможные решения систем неравенств лежат в области, ограниченной изображённым углом, или в области, ограниченной параболой, ветви которой направлены вверх, выше области, ограниченной второй параболой. Целые решения находятся на вертикальных прямых с целыми координатами. Получаем: при $0 < a < 1$ имеются два целых решения; при $1 \leq a < 3$ — 4 целых решения, при $a \geq 3$ — более четырёх целых решений (точки с целыми абсциссами выделены на рисунке крупными кругами).



Ответ: $a \in [1; 3)$.

Задание 19.

Пусть $K(n)$ обозначает сумму квадратов всех цифр натурального числа n .

а) Существует ли такое трёхзначное число n , что $K(n) = 171$?

б) Существует ли такое трёхзначное число n , что $K(n) = 172$?

в) Какое наименьшее значение может принимать $4K(n) - n$, если n — трёхзначное число?

Решение:

а) Все цифры не могут быть одновременно чётными, иначе бы сумма их квадратов тоже была бы чётной. Следовательно, среди цифр имеются нечётные. Три семёрки в сумме квадратов дают $147 < 171$, поэтому среди цифр должна быть хотя бы одна 9-ка. Тогда сумма квадратов двух остальных равна 90, что достижимо: $3^2 + 9^2 = 90$. Ответ на вопрос а): Да, например 399, 939, 993.

б) 172 — число, делящееся на 4. Поэтому среди цифр есть хотя бы одна чётная, т.е. 0, 2, 4, 6 или 8. Сумма квадратов оставшихся двух цифр также должна делиться на 4. Но квадраты любых цифр или делятся на 4, или дают в остатке 1 при делении на 4. Следовательно, остальные цифры также должны быть чётными. Следовательно, сумма квадратов трёх цифр, меньших 5, должна быть равна 43, что невозможно. Ответ на этот пункт: Не существует.

в) $4K(n) - n = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 100a - 10b - c = 4\left(a - \frac{25}{2}\right)^2 + 4\left(b - \frac{5}{4}\right)^2 + 4\left(c - \frac{1}{8}\right)^2 - 25 - \frac{25}{4} - \frac{1}{16}$. Для того, чтобы это выражение приняло минимальное значение при условии, что a, b и c — цифры, достаточно минимизировать выражения в скобках. Очевидно, что цифры, минимизирующие эти выражения есть соответственно: $a = 9, b = 1, c = 0$. В этом случае получаем минимальное значение, равное $4(9^2 + 1^2 + 0^2) - 910 = -582$.

Ответ: а) Существуют; б) Не существуют; в) -582.