# Материалы для проведения заключительного этапа

# XL ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

## 2013–2014 учебный год

## Ярославль, 24–30 апреля 2014 г.

Москва, 2014

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XL Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Акопян, А. В. Антропов, Д. А. Белов, А. Я. Белов-Канель, С. Л. Берлов, Н. В. Богачёв, И. И. Богданов, С. Г. Волчёнков, А. И. Гарбер, А. А. Глазырин, А. И. Голованов, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, С. А. Дориченко, Л. А. Емельянов, Г. М. Иванов, Ф. А. Ивлев, Д. В. Карпов, Д. Д. Карпушкин, П. А. Кожевников, М. А. Кунгожин, А. Д. Матушкин, И. В. Митрофанов, А. В. Пастор, О. К. Подлипский, А. А. Полянский, А. М. Райгородский, И. С. Рубанов, Р. С. Садыков, В. А. Сендеров, А. Б. Скопенков, М. Б. Скопенков, К. А. Сухов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, В. З. Шарич.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.

*Желаем успешной работы!*

*Авторы и составители сборника*

# Условия и решения задач

## 9 класс

9.1. По кругу расставлены 99 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа отличаются или на 1, или на 2, или в два раза. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3. (*С. Берлов*)

**Решение.** Пусть ни одно из чисел не делится на 3. Тогда каждое число даёт остаток 1 или 2 при делении на 3. Но числа, дающие одинаковые ненулевые остатки при делении на 3, не могут отличаться на 1 или на 2; не могут они и отличаться в два раза. Значит, соседние числа дают различные остатки при делении на 3, то есть остатки 1 и 2 чередуются. Но тогда общее количество чисел должно быть чётным, что не так. Противоречие.

9.2. Серёжа выбрал два различных натуральных числа $a$ и $b$. Он записал в тетрадь четыре числа: $a$, $a+2$, $b$ и $b+2$. Затем он выписал на доску все шесть попарных произведений чисел из тетради. Какое наибольшее количество точных квадратов может быть среди чисел на доске? (*С. Берлов*)

**Ответ.** Два.

**Решение.** Заметим, что никакие два квадрата натуральных чисел не отличаются на 1, ибо $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$, где вторая скобка больше единицы. Значит, числа $a(a+2)=(a+1)^2-1$ и $b(b+2)=(b+1)^2-1$ квадратами не являются. Более того, числа $ab$ и $a(b+2)$ не могут одновременно являться квадратами, иначе их произведение $a^2\cdot b(b+2)$ также было бы квадратом, а тогда и число $b(b+2)$ тоже. Аналогично, из чисел $(a+2)b$ и $(a+2)(b+2)$ максимум одно может быть квадратом. Итого, квадратов на доске не больше двух.

Два квадрата могут получиться, например, при $a=2$ и $b=16$: тогда $a(b+2)=6^2$ и $(a+2)b=8^2$.

**Замечание.** Существуют и другие примеры, например, $a=6$ и $b=96$.

9.3. В выпуклом $n$-угольнике проведено несколько диагоналей. Проведённая диагональ называется *хорошей*, если она пересекается (по внутренним точкам) ровно с одной из других проведённых диагоналей. Найдите наибольшее возможное количество хороших диагоналей. (*С. Берлов*)

**Ответ.** $n-2$ при чётных $n$, $n-3$ при нечётных $n$.

**Решение.** Мы будем пользоваться следующей известной леммой.

**Лемма.** *В выпуклом $n$-угольнике нельзя провести более $n-3$ диагоналей, не имеющих общих внутренних точек.*

Сначала докажем индукцией по $n$, что количество хороших диагоналей не превосходит $n-2$, если $n$ чётно, и $n-3$, если $n$ нечётно. При этом мы будем считать, что отрезок является 2-угольником без диагоналей. При $n=2,3$ утверждение очевидно. Пусть $n\geqslant 4$; обозначим наш многоугольник через $P=A_1A_2\ldots A_n$.

Если никакие две хороших диагонали не пересекаются, то по лемме их количество не превосходит $n-3$. Пусть теперь найдутся две пересекающихся хороших диагонали $A_iA_k$ и $A_jA_\ell$ ($i<j<k<\ell$). Тогда каждая из них не пересекается с другими проведёнными диагоналями. Выбросим $A_iA_k$ и $A_jA_\ell$ из рассмотрения. Каждая оставшаяся проведённая диагональ $d$ является диагональю или стороной ровно в одном из многоугольников $Q_1=A_i\ldots A_j$, $Q_2=A_j\ldots A_k$, $Q_3=A_k\ldots A_\ell$ или $Q_4=A_\ell\ldots A_nA_1\ldots A_i$ (см. рис. 1). При этом, если $d$ является стороной одного из них, то она не может пересекаться с другими диагоналями (и не является хорошей).

Пусть $n$ чётно. По предположению индукции, среди всех диагоналей, попавших в какой-то многоугольник $Q_s$, хороших не больше, чем количество вершин в нём, уменьшенное на 2. Значит, общее количество хороших диагоналей в $P$ не превосходит

$$2+(j-i-1)+(k-j-1)+(\ell-k-1)+(n-\ell+i-1)=n-2, \quad (*)$$

что и требовалось.

При нечётном $n$ сумма количеств вершин в многоугольниках $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$ равна нечётному числу $n+4$; значит, число вершин в одном из них нечётно. А тогда соответствующее слагаемое в сумме (∗) уменьшится на 1, и мы получим, что общее число хороших диагоналей не превосходит $n-3$. Переход индукции завершён.

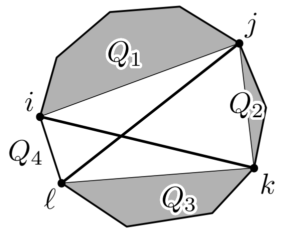


Рис. 1

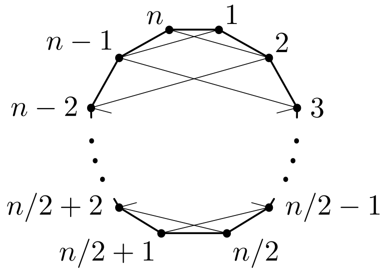


Рис. 2

Осталось привести примеры, показывающие точность оценки. При чётном $n$ достаточно провести в многоугольнике $A_1 \ldots A_n$ диагонали $A_iA_{n-i}$ и $A_{i+1}A_{n-i+1}$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n/2-1$ (см. рис. 2); они разбиваются на пары пересекающихся хороших диагоналей. При нечётном $n$ достаточно провести такие же диагонали в чётноугольнике $A_1 \ldots A_{n-1}$.

**Замечание.** При нечётном $n$ существуют и принципиально другие примеры — например, можно взять все диагонали из точки $A_1$ (они будут хорошими) и добавить к ним диагональ $A_2A_n$.

9.4. Точка $M$ — середина стороны $AC$ остроугольного треугольника $ABC$, в котором $AB > BC$. Окружность $\Omega$ описана около треугольника $ABC$. Касательные к $\Omega$, проведённые в точках $A$ и $C$, пересекаются в точке $P$. Отрезки $BP$ и $AC$ пересекаются в точке $S$. Пусть $AD$ — высота треугольника $ABP$. Окружность $\omega$, описанная около треугольника $CSD$, пересекает окружность $\Omega$ в точке $K \neq C$. Докажите, что $\angle CKM = 90^\circ$. *(В. Шмаров)*

**Решение.** Поскольку $\angle AMP = \angle ADP = 90^\circ$, точки $M$ и $D$ лежат на окружности $\gamma$ с диаметром $AP$. Поскольку $PA$ — касательная к $\Omega$, имеем $\angle KAP = \angle ACK$. Так как точки $C$, $K$, $D$ и $S$ лежат на окружности $\omega$, имеем $\angle ACK = \angle KDP$. Значит, $\angle KAP = \angle ACK = \angle KDP$, то есть точки $A$, $D$, $K$ и $P$ лежат на одной окружности. Итак, точка $K$ лежит на $\gamma$, и $\angle AKP = 90^\circ$ (см. рис. 3).

Отсюда имеем $\angle MKP = 180^\circ - \angle MAP = 180^\circ - \angle ABC = \angle AKC$. Значит, $\angle MKC = \angle AKC - \angle AKM = \angle MKP - \angle AKM = \angle AKP = 90^\circ$, что и требовалось доказать.





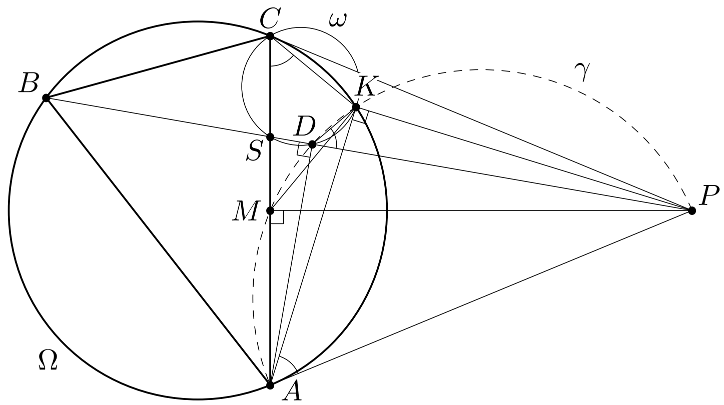


Рис. 3

**Замечание.** Из условия следует, что точка $D$ лежит внутри $\Omega$, но вне $\triangle ABC$.

9.5. К натуральному числу $N$ прибавили наибольший его делитель, меньший $N$, и получили степень десятки. Найдите все такие $N$. *(Н. Агаханов)*

**Ответ.** 75.

**Решение.** Пусть $m$ — наибольший делитель числа $N$, меньший, чем $N$. Тогда $n = mp$, где $p$ — наименьший простой делитель числа $N$. Имеем $N + m = 10^k$, то есть $m(p+1) = 10^k$. Число в правой части не делится на 3, поэтому $p > 2$. Отсюда следует, что $N$ — нечётное число, а тогда и $m$ нечётно. Значит, поскольку $10^k$ делится на $m$, получаем $m = 5^s$. Если $m = 1$, то $N = p = 10^k - 1$, что невозможно, так как $10^k - 1$ делится на 9, то есть не является простым. Значит, $s \geqslant 1$, число $N$ делится на 5, и потому $p \leqslant 5$. Если $p = 3$, то получаем равенство $4 \cdot 5^s = 10^k$, откуда $k = 2$, $m = 25$ и $N = 75$. Если же $p = 5$, то $p + 1 = 6$, и число $10^k$ делится на 3, что невозможно.

9.6. Трапеция $ABCD$ с основаниями $AB$ и $CD$ вписана в окружность $\Omega$. Окружность $\omega$ проходит через точки $C$, $D$ и пересекает отрезки $CA$, $CB$ в точках $A_1$, $B_1$ соответственно. Точки $A_2$ и $B_2$ симметричны точкам $A_1$ и $B_1$ относительно середин отрезков $CA$ и $CB$ соответственно. Докажите, что точки $A$, $B$, $A_2$ и $B_2$ лежат на одной окружности. (*И. Богданов*)

**Первое решение.** Утверждение задачи эквивалентно равенству $CA_2 \cdot CA = CB_2 \cdot CB$. Поскольку $AA_1 = CA_2$ и $BB_1 = CB_2$, достаточно доказать, что $AA_1 \cdot AC = BB_1 \cdot BC$.

Пусть $D_1$ — вторая точка пересечения $\omega$ с $AD$ (см. рис. 4). Из симметрии имеем $AD = BC$ и $AD_1 = BB_1$. Из теоремы о произведении длин отрезков секущих теперь получаем $AA_1 \cdot AC = AD_1 \cdot AD = BB_1 \cdot BC$, что и требовалось доказать.

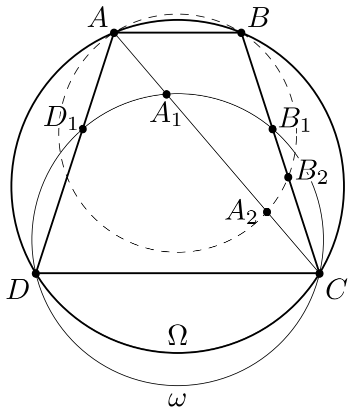

Рис. 4

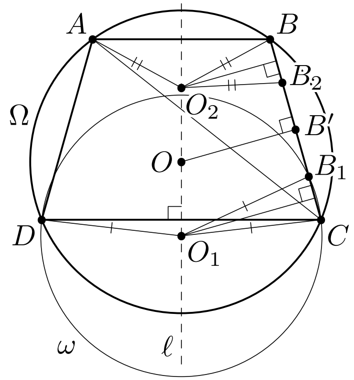

Рис. 5

**Второе решение.** Обозначим через $O_1$ и $O$ центры окружностей $\omega$ и $\Omega$ соответственно; оба этих центра лежат на серединном перпендикуляре $\ell$ к основаниям трапеции. Пусть $O_2$ — точка, симметричная $O_1$ относительно $O$ (см. рис. 5). Тогда $O_2$ также лежит на $\ell$, то есть $O_2A = O_2B$. Далее, проекции точек $O_2$ и $O_1$ на $BC$ симметричны относительно проекции точки $O$, т. е. относительно середины $B'$ отрезка $BC$. Так как проекция точки $O_1$ является серединой отрезка $CB_1$, из симметрии относительно $B'$ получаем, что проекция точки $O_2$ — это середина отрезка $BB_2$. Значит, $B_2O_2 = BO_2$. Аналогично показывается, что $A_2O_2 = AO_2 = BO_2 = B_2O_2$. Итак, точки $A$, $B$, $A_2$, $B_2$ лежат на окружности с центром $O_2$.

9.7. В республике математиков выбрали число $\alpha > 2$ и выпустили





монеты достоинствами в 1 рубль, а также в $\alpha^k$ рублей при каждом натуральном $k$. При этом $\alpha$ было выбрано так, что достоинства всех монет, кроме самой мелкой, иррациональны. Могло ли оказаться, что любую сумму в натуральное число рублей можно набрать этими монетами, используя монеты каждого достоинства не более 6 раз? (*И. Богданов, С. Берлов*)

**Ответ.** Могло.

**Решение.** Покажем, что математики могли выбрать число $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{29}}{2}$; это число является корнем уравнения $\alpha^2 + \alpha = 7$. Ясно, что $\alpha > 2$. Нетрудно видеть, что при натуральных $m$ мы имеем $(2\alpha)^m = a_m + b_m\sqrt{29}$, где $a_m$ и $b_m$ — целые числа, причём $a_m < 0 < b_m$ при нечётных $m$ и $a_m > 0 > b_m$ при чётных $m$. Значит, число $\alpha^m$ иррационально.

Осталось показать, что для любого натурального числа $n$ сумму в $n$ рублей можно набрать требуемым способом. Рассмотрим все способы набрать $n$ рублей выпущенными монетами (хотя бы один такой способ существует: можно взять $n$ рублёвых монет). Выберем из них способ, в котором наименьшее число монет. Предположим, что какая-то монета достоинства $\alpha^i$ ($i \geqslant 0$) встречается в этом способе хотя бы 7 раз. Тогда можно заменить 7 монет по $\alpha^i$ монетами достоинств $\alpha^{i+1}$ и $\alpha^{i+2}$. При этом суммарное достоинство монет не изменится (поскольку $\alpha^{i+1} + \alpha^{i+2} = 7\alpha^i$), а их количество уменьшится. Это невозможно по выбору нашего способа. Итак, этот способ удовлетворяет условию.

**Замечание.** Как нетрудно видеть, для любого искомого числа $\alpha$ сумма в 7 рублей может набраться лишь как $7 = \alpha + \alpha^2$. Значит, предъявленное значение $\alpha$ — единственное.

9.8. В государстве $n$ городов, и между каждыми двумя из них курсирует экспресс (в обе стороны). Для любого экспресса цены билетов «туда» и «обратно» равны, а для любых разных экспрессов эти цены различны. Докажите, что путешественник может выбрать начальный город, выехать из него и проехать последовательно на $n-1$ экспрессах, платя за проезд на каждом следующем меньше, чем за проезд на предыдущем. (Путешественник может попадать несколько раз в один и тот же город.)

(*И. Богданов*)

**Первое решение.** Уберём все экспрессы, а затем начнём запускать их обратно по одному в порядке возрастания цены (т. е. первым запустим самый дешёвый, вторым — самый дешёвый из остальных, и т. д.). В каждый момент в каждом городе будем писать максимальное количество экспрессов, на которых можно последовательно проехать, начав из этого города, так, чтобы цены проезда монотонно убывали.

В начальный момент все числа в городах равны нулю. Пусть в некоторый момент мы вводим экспресс, соединяющий города $A$ и $B$, в которых до этого были написаны числа $a$ и $b$ соответственно. После введения нового экспресса в $A$ будет число, не меньшее $b+1$ (ибо теперь из $A$ можно проехать новым экспрессом в $B$, а затем по маршруту длины $b$, начинавшемуся из $B$). Аналогично, в $B$ будет написано число, не меньшее $a+1$. Поэтому сумма чисел в $A$ и $B$ увеличится хотя бы на 2, а числа в остальных городах не уменьшатся. Значит, и сумма всех чисел в городах увеличится хотя бы на 2.

Таким образом, когда все $n(n-1)/2$ экспрессов будут введены, сумма чисел в городах станет не меньше, чем $2\cdot n(n-1)/2 = n(n-1)$. Значит, хотя бы в одном городе будет число, не меньшее $n-1$. Это и означает наличие требуемого маршрута из этого города.

**Замечание.** При любом чётном $n$ можно построить пример, показывающий, что монотонного маршрута из $n$ экспрессов может и не существовать.

**Второе решение.** Разделим каждый экспресс, курсирующий между $A$ и $B$, на два — идущий из $A$ в $B$, и идущий из $B$ в $A$. Получились $n(n-1)$ *полуэкспрессов*. Мы построим $n$ *выделенных маршрутов* (по одному, начинающемуся в каждом городе) так, чтобы цена поездки на каждом монотонно убывала, и каждый полуэкспресс содержался бы хотя бы в одном выделенном маршруте. Тогда один из выделенных маршрутов будет содержать не менее $n-1$ полуэкспресса, что и требовалось.





Выделенный маршрут, начинающийся в городе $A$, выглядит так. Пусть $A_0 = A$. Рассмотрим все полуэкспрессы $A_0X$, выходящие из $A_0$, и выберем из них полуэкспресс $A_0A_1$ максимальной цены $a_1$. Затем рассмотрим все полуэкспрессы $A_1Y$, выходящие из $A_1$, цена которых меньше $a_1$; если такие есть, выберем из них полуэкспресс $A_1A_2$ максимальной цены $a_2$, и т. д. Маршрут заканчивается полуэкспрессом $A_{k-1}A_k$, если из $A_k$ не выходит полуэкспрессов с ценой, меньшей $a_k$.

Осталось показать, что каждый полуэкспресс $BC$ попадёт хотя бы в один из выделенных маршрутов. Положим $B_1 = B$, $B_0 = C$, и пусть $b_1$ — цена $BC$. Рассмотрим все полуэкспрессы $XB_1$, ведущие в $B_1$, с ценой, большей $b_1$. Если такие есть, то выберем из них полуэкспресс $B_2B_1$ наименьшей цены $b_2$. Далее рассмотрим все полуэкспрессы $YB_2$, ведущие в $B_2$, с ценой, большей $b_2$. Выберем из них полуэкспресс $B_3B_2$ наименьшей цены $b_3$, и т. д. Этот процесс выбора закончится, когда при некотором $k$ полуэкспресс $B_kB_{k-1}$ — это полуэкспресс максимальной цены, выходящий из $B_k$. Тогда, согласно нашему построению, выделенный маршрут, выходящий из $B_k$, последовательно пройдёт через $B_{k-1}, \ldots, B_1, B_0$, то есть будет содержать экспресс $BC$, что и требовалось.

**Замечание.** На самом деле, каждый полуэкспресс попадёт ровно в один из выделенных маршрутов.

## 10 класс

10.1. Назовём натуральное число *хорошим*, если среди его делителей есть ровно два простых числа. Могут ли 18 подряд идущих натуральных чисел быть хорошими? (*О. Подлипский*)

**Ответ.** Не могут.

**Решение.** Предположим, что нашлись 18 хороших чисел подряд. Среди них найдутся три числа, делящихся на 6. Пусть это числа $6n$, $6(n+1)$ и $6(n+2)$. Поскольку эти числа — хорошие, и в разложение каждого из них на простые множители входят двойка и тройка, других простых делителей у них быть не может.

Далее, лишь одно из трёх подряд идущих натуральных чисел $n$, $n+1$, $n+2$ может делиться на 3. Значит, остальные два являются степенями двойки. Но пары степеней двойки, отличающихся не более чем на два — это только $(1,2)$ и $(2,4)$; поэтому $n \leqslant 2$. Однако тогда среди наших 18 чисел есть простое число 13 (так как $6n \leqslant 13 \leqslant 6(n+2)$), не являющееся хорошим. Противоречие.

10.2. Дана функция $f$, определённая на множестве действительных чисел и принимающая действительные значения. Известно, что для любых $x$ и $y$ таких, что $x > y$, верно неравенство $(f(x))^2 \leqslant f(y)$. Докажите, что множество значений функции содержится в промежутке $[0,1]$. *(А. Храбров)*

**Решение.** По условию $f(y) \geqslant (f(y+1))^2 \geqslant 0$ для любого $y$, поэтому все значения функции неотрицательны.

Пусть теперь $f(x_0) = 1 + a > 1$ для некоторого $x_0$. Докажем индукцией по $n$, что для любого $y < x_0$ верно неравенство $f(y) > 1 + 2^n a$. При $n = 1$ имеем $f(y) \geqslant (f(x_0))^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$. Для перехода от $n$ к $n+1$ заметим, что $y < \dfrac{x_0+y}{2} < x_0$, и потому $f\left(\dfrac{x_0+y}{2}\right) > 1 + 2^n a$ по предположению индукции. А тогда $f(y) \geqslant \left(f\left(\dfrac{x_0+y}{2}\right)\right)^2 = 1 + 2^{n+1}a + (2^n a)^2 > 1 + 2^{n+1}a$, что и требовалось.

Итак, для любого фиксированного $y < x_0$ имеем $f(y) > 1 + 2^n a$ при любом натуральном $n$. Но это невозможно, так как существует $n$, при котором $2^n > \dfrac{f(y)-1}{a}$. Стало быть, $f(x) \leqslant 1$ при всех $x$.

10.3. В сейфе $n$ ячеек с номерами от 1 до $n$. В каждой ячейке первоначально лежала карточка с её номером. Вася переложил карточки в некотором порядке так, что в $i$-й ячейке оказалась карточка с числом $a_i$. Петя может менять местами любые две карточки с номерами $x$ и $y$, платя за это $2|x-y|$ рублей. Докажите, что Петя сможет вернуть все карточки на исходные места, заплатив не более $|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \ldots + |a_n - n|$ рублей. *(И. Богданов, Г. Иванов)*

**Первое решение.** Пусть $(b_1, \ldots, b_n)$ — произвольное расположение карточек (здесь $b_i$ — число на карточке в $i$-й ячейке). Назовём его *ценой* число $|b_1 - 1| + |b_2 - 2| + \ldots + |b_n - n|$.

**Лемма.** *Для любого расположения* $(b_1, \ldots, b_n)$, *в котором не все карточки лежат на своих местах, можно поменять местами некоторые две карточки* $b_i$ *и* $b_j$ *так, что цена уменьшится ровно на* $2|b_i - b_j|$.

**Доказательство.** Заметим, что при нашем действии цена уменьшается на
$$|b_i - i| + |b_j - j| - |b_i - j| - |b_j - i| = (|b_i - i| - |b_j - i|) + (|b_j - j| - |b_i - j|). \qquad (*)$$
Нетрудно видеть, что для того, чтобы выражение $(*)$ было равно $2|b_i - b_j|$, достаточно выполнения неравенств $i \leqslant b_j < b_i \leqslant j$: тогда каждая из скобок в $(*)$ будет равна $|b_i - b_j|$. Осталось найти такие индексы $i$ и $j$.

Пусть $j$ — наибольшее число на карточке, лежащей не в своей ячейке. Карточка с числом $b_j$ также лежит не в своей ячейке, так что $b_j < j$. Отметим первые $b_j$ ячеек. У нас есть ровно $b_j$ карточек с числами, не превосходящими $b_j$, и одна из них (карточка с числом $b_j$) уже лежит в неотмеченной ячейке с номером $j > b_j$. Значит, найдётся такая отмеченная ячейка $i$, что $b_i > b_j$. По выбору номера $j$, имеем $b_i \leqslant j$, откуда и следует цепочка неравенств $i \leqslant b_j < b_i \leqslant j$. $\square$

Итак, для любого расположения, отличного от требуемого, можно уменьшить его цену на некоторое число $a$, заплатив ровно $a$. Продолжая такие действия, мы в результате придём к расположению с нулевой ценой, заплатив в процессе ровно цену исходного расположения, что и требовалось.

**Замечание.** Каждая скобка в выражении $(*)$ не превосходит $|b_i - b_j|$. Значит, цену расположения нельзя уменьшить на число большее, чем количество заплаченных рублей. Таким образом, цена расположения — это наименьшее число рублей, которое надо заплатить, чтобы привести его к требуемому.

**Второе решение.** Приведём другое доказательство леммы. Для каждого $k$ обозначим через $c_k$ номер ячейки, в которой лежит карточка с числом $k$ (таким образом, $c_{b_k} = k = b_{c_k}$).

Пусть $s$ — наименьшее число такое, что $c_s < s$; такое число найдётся, поскольку $c_1 + \ldots + c_n = 1 + \ldots + n$. Тогда карточка с числом $c_s$ лежит не в своей ячейке. Пусть теперь $t$ — максимальный номер ячейки, меньший $s$ и такой, что $c_t \neq t$. Тогда обязательно $c_t > t$, ибо $t < s$; кроме того, $t \geqslant c_s$ из максимальности $t$. Поскольку при всех $t < k < s$ имеем $k = c_k \neq c_t$, из неравенства $c_t > t$ следует $c_t \geqslant s$. Итак, мы получили $c_s \leqslant t < s \leqslant c_t$. Полагая $i = c_s$, $j = c_t$, приходим к требуемому неравенству $i \leqslant b_j < b_i \leqslant j$.

**Замечание.** Существуют и другие способы доказательства леммы.

10.4. Треугольник $ABC$ ($AB > BC$) вписан в окружность $\Omega$. На сторонах $AB$ и $BC$ выбраны точки $M$ и $N$ соответственно так, что $AM = CN$. Прямые $MN$ и $AC$ пересекаются в точке $K$. Пусть $P$ — центр вписанной окружности треугольника $AMK$, а $Q$ — центр вневписанной окружности треугольника $CNK$, касающейся стороны $CN$. Докажите, что середина дуги $ABC$ окружности $\Omega$ равноудалена от точек $P$ и $Q$. *(М. Кунгожин)*

**Первое решение.** Мы будем использовать следующую известную *лемму о трезубце*.

**Лемма.** *Пусть $L$ — середина дуги $YZ$ (не содержащей точку $X$) описанной окружности треугольника $XYZ$. Пусть $I$ — центр вписанной окружности треугольника $XYZ$, а $I_x$ — центр вневписанной окружности этого треугольника, касающейся стороны $YZ$. Тогда $LY = LZ = LI = LI_x$.*

Пусть $S$ — середина дуги $ABC$ окружности $\Omega$. Имеем $SA = SC$ (так как $S$ лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $AC$), $AM = CN$ и $\angle BCS = \angle BAS$ (как вписанные, опирающиеся на одну дугу). Значит, треугольники $AMS$ и $CNS$ равны, и они совмещаются поворотом $\Phi$ с центром в точке $S$ на угол $\angle ASC = \angle ABC$. Отсюда, в частности, получаем $SM = SN$ и $\angle MSN = \angle ABC$. Из последнего равенства углов следует, что четырехугольник $MSBN$ вписан в некоторую окружность $\gamma$ (см. рис. 6).

Окружности $\Omega_a$ и $\Omega_c$, описанные соответственно около треугольников $AMS$ и $CNS$, также совмещаются поворотом $\Phi$.





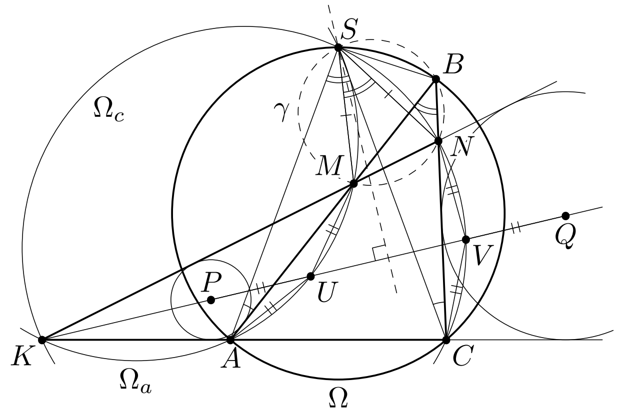


Рис. 6

Пусть $U$ и $V$ — середины дуг $AM$ и $CN$ (не содержащих $S$) этих окружностей. Из поворота $\Phi$ получаем $SU = SV$ (то есть точка $S$ лежит на серединном перпендикуляре к $UV$) и $UA = VC$. Далее, из окружностей $\Omega$ и $\gamma$ имеем $\angle SAK = \angle SBC = \angle SMK$, то есть $K$ лежит на $\Omega_a$. Аналогично, $K$ лежит на $\Omega_c$.

Отсюда следует, что точки $U$ и $V$ вместе с точками $P$ и $Q$ лежат на биссектрисе угла $\angle CKN$. По лемме о трезубце (для треугольников $KAM$ и $KCN$) имеем $UP = UA$ и $VQ = VC$. Так как $UA = VC$, это означает, что точки $P$ и $Q$ симметричны относительно серединного перпендикуляра к $UV$, на котором лежит точка $S$. Значит, $S$ равноудалена от $P$ и $Q$, что и требовалось.

**Замечание.** Точка $S$ — это *точка Микеля* для четвёрки прямых $BA$, $BC$, $AC$, $MN$.

**Второе решение.** Пусть $S$ — середина дуги $ABC$, а $R$ и $T$ — середины отрезков $AC$ и $MN$ соответственно. Как и в прошлом решении, получаем, что треугольники $AMS$ и $CNS$ равны, в частности, $SA = SC$ и $SM = SN$. Тогда из равнобедренных треугольников $SAC$ и $SMN$ имеем $\angle SRK = \angle STK = 90°$, то есть точки $R$ и $T$ лежат на окружности $\Gamma$ с диаметром $SK$ (см. рис. 7). Пусть $\Gamma$ пересекает биссектрису $PQ$ угла $AKM$ вторично в точке $D$. Поскольку четырёхугольник $KRDT$ вписан в $\Gamma$, получаем $DR = DT$ и $\angle ARD = \angle DTN$.

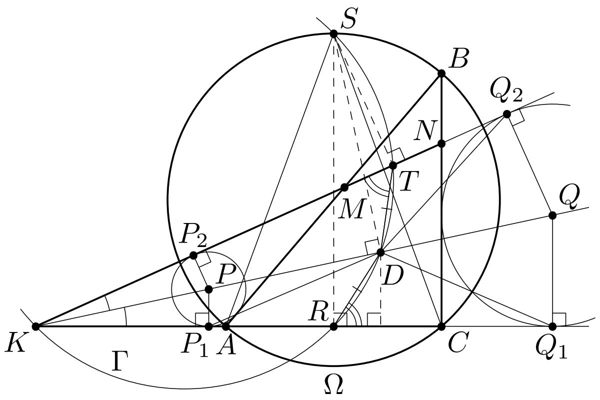


Рис. 7

Пусть $P_1$ и $P_2$ — точки касания вписанной окружности треугольника $AKM$ с прямыми $KA$ и $KM$ соответственно, а $Q_1$ и $Q_2$ — точки касания вневписанной окружности треугольника $CKN$ с теми же прямыми. Из равенства отрезков касательных имеем $RP_1+TP_2 = RA+AP_1+MP_2+TM = RA+AM+TM$. Аналогично, $RQ_1 + TQ_2 = RC + CN + TN$, откуда

$$RP_1 + TP_2 = RQ_1 + TQ_2.$$

С другой стороны, из симметрии имеем

$$RP_1 + RQ_1 = P_1Q_1 = P_2Q_2 = TP_2 + TQ_2.$$

Из полученных равенств следует, что $RP_1 = TQ_2$ и $RQ_1 = TP_2$.

Итак, мы имеем $DR = DT$, $RP_1 = TQ_2$ и $\angle P_1RD = \angle Q_2TD$. Значит, треугольники $DTQ_2$ и $DRP_1$ равны, и $DP_1 = DQ_2$. Поскольку из симметрии $DQ_2 = DQ_1$, получаем, что треугольник $DP_1Q_1$ равнобедренный, его высота из точки $D$ является медианой, и поэтому она также является средней линией прямоугольной трапеции $PQQ_1P_1$. Значит, $DP = DQ$, и в треугольнике $PSQ$ высота $SD$ является медианой. Отсюда $SP = SQ$.

10.5. К натуральному числу $N$ прибавили наибольший его делитель, меньший $N$, и получили степень десятки. Найдите все такие $N$.

(*Н. Агаханов*)

**Ответ.** 75.

**Решение.** См. решение задачи 9.5.

10.6. Точка $M$ — середина стороны $AC$ треугольника $ABC$. На отрезках $AM$ и $CM$ выбраны точки $P$ и $Q$ соответственно таким образом, что $PQ = AC/2$. Окружность, описанная около треугольника $ABQ$, пересекает сторону $BC$ в точке $X \neq B$, а окружность, описанная около треугольника $BCP$, пересекает сторону $AB$ в точке $Y \neq B$. Докажите, что четырёхугольник $BXMY$ — вписанный.

(*Ф. Ивлев, Ф. Нилов*)





**Первое решение.** Из вписанности четырёхугольников $BCPY$ и $BAQX$ следует, что $\angle APY = \angle ABC = \angle CQX$. Пусть прямая, проходящая через $M$ параллельно $QX$, пересекает прямую $BC$ в точке $K$, а прямая, проходящая через $M$ параллельно $PY$, пересекает прямую $AB$ в точке $L$ (см. рис. 8). Тогда $\angle AML = \angle ABC = \angle CMK$, откуда $\angle ALM = 180^\circ - \angle LAM - \angle AML = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = \angle ACB$. Значит, треугольники $MAL$ и $MKC$ подобны по двум углам.

Из условия имеем $AP = AM - PM = PQ - PM = MQ$; аналогично, $CQ = PM$. Отсюда $AY/YL = AP/PM = MQ/QC = KX/XC$. Значит, $Y$ и $X$ — соответственные точки в подобных треугольниках $MAL$ и $MKC$. Следовательно, $\angle MXC = \angle MYL = \angle MYB$. Это и означает, что четырёхугольник $BYMX$ вписан.

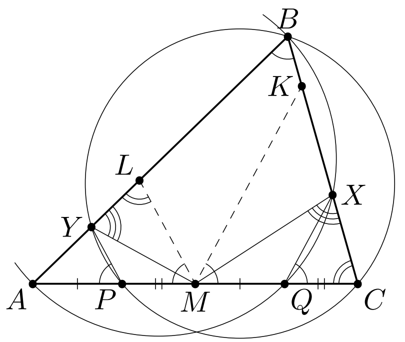


Рис. 8

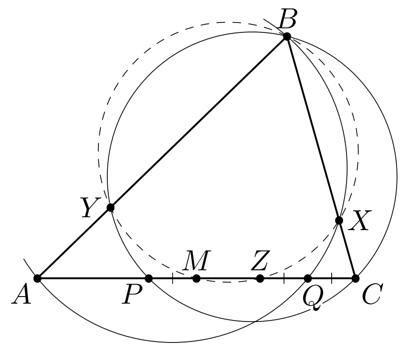


Рис. 9

**Второе решение.** Выберем на отрезке $PQ$ точку $Z$ такую, что $CQ = QZ$ (см. рис. 9). Тогда, так как $AC = 2PQ$, имеем $AP + QC = AC - PQ = PQ$, откуда $PZ = PQ - QZ = PQ - QC = AP$.

Из вписанности четырёхугольника $BYPC$ имеем $AB \cdot AY =$

$= AP \cdot AC = 2AP \cdot \frac{AC}{2} = AZ \cdot AM$. Аналогично получаем, что $CX \cdot CB = CZ \cdot CM$. Если $Z \neq M$, полученные равенства означают, что каждая из четвёрок точек $B$, $Y$, $Z$, $M$ и $B$, $X$, $Z$, $M$ лежит на одной окружности, то есть точки $X$ и $Y$ лежат на окружности, описанной около треугольника $BMZ$. Отсюда и следует требуемое.

Наконец, если $Z = M$, то те же равенства означают, что точки $X$ и $Y$ лежат на (единственной!) окружности, проходящей через $B$ и касающейся $AC$ в точке $M$, откуда опять же следует требуемое.

10.7. В республике математиков выбрали число $\alpha > 2$ и выпустили монеты достоинствами в 1 рубль, а также в $\alpha^k$ рублей при каждом натуральном $k$. При этом $\alpha$ было выбрано так, что достоинства всех монет, кроме самой мелкой, иррациональны. Могло ли оказаться, что любую сумму в натуральное число рублей можно набрать этими монетами, используя монеты каждого достоинства не более 6 раз? *(И. Богданов, С. Берлов)*

**Ответ.** Могло.

**Решение.** См. решение задачи 9.7.

10.8. На плоскости дано $n$ выпуклых попарно пересекающихся $k$-угольников. Любой из них можно перевести в любой другой гомотетией с положительным коэффициентом. Докажите, что на плоскости найдётся точка, принадлежащая хотя бы $1 + \frac{n-1}{2k}$ из этих $k$-угольников. *(А. Акопян)*

**Решение. Лемма.** *Пусть $P$ и $P'$ — пересекающиеся выпуклые многоугольники, гомотетичные с положительным коэффициентом. Тогда одна из вершин одного из них лежит в другом.*

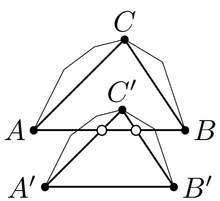

Рис. 10

**Доказательство.** Если один из многоугольников полностью лежит в другом, то утверждение очевидно. В противном случае найдётся сторона $AB$ многоугольника $P$, пересекающая границу $P'$. Если $P'$ содержит одну из точек $A$ или $B$, то утверждение доказано.





В ином случае $P'$ пересекает $AB$ по отрезку, лежащему внутри $AB$.

Заметим, что у $P'$ есть вершины по обе стороны от прямой $AB$. Рассмотрим сторону $A'B'$ многоугольника $P'$, соответствующую $AB$, и произвольную вершину $C'$ многоугольника $P'$, лежащую по другую сторону от прямой $AB$, нежели сторона $A'B'$. Пусть $C$ — вершина многоугольника $P$, соответствующая $C'$. Тогда $C'$ лежит в треугольнике $ABC$, так как относительно каждой из прямых $AB$, $BC$ и $AC$ она находится по ту же сторону, что и этот треугольник (см. рис. 10). Тем самым $C'$ принадлежит $P$. Лемма доказана. □

Пусть $P_1, \ldots, P_n$ — данные $k$-угольники, и пусть $A_{i,1}, \ldots, A_{i,k}$ — вершины многоугольника $P_i$. Для каждой вершины $A_{i,j}$ посчитаем количество $a_{i,j}$ многоугольников $P_s$ ($s \neq i$), в которых она лежит. Ввиду леммы, каждая пара многоугольников вносит единичный вклад хотя бы в одну из величин $a_{i,j}$. Значит, $a_{1,1} + \ldots + a_{n,k} \geqslant \frac{n(n-1)}{2}$. Поэтому одно из чисел $a_{i,j}$ не меньше $\frac{n(n-1)}{2nk} = \frac{n-1}{2k}$. Так как вершина $A_{i,j}$ лежит в многоугольнике $P_i$ и ещё в $a_{i,j}$ других многоугольниках, она принадлежит хотя бы $1 + \frac{n-1}{2k}$ многоугольникам. Значит, эта точка — требуемая.

# 11 класс

11.1. Существует ли такое положительное число $a$, что при всех действительных $x$ верно неравенство
$$|\cos x| + |\cos ax| > \sin x + \sin ax?$$
*(Н. Агаханов)*

**Ответ.** Не существует.

**Первое решение.** Предположим, что $0 < a \leqslant 1$. Тогда при $x = \pi/2$ левая часть примет значение $|\cos(a\pi/2)|$, то есть будет не больше 1, в то время как правая часть будет равна $1 + \sin(a\pi/2)$, то есть она больше 1. Итак, неравенство не выполнено.

Если же $a > 1$, то, обозначив $ax = t$ и $b = 1/a$, мы приведём неравенство из условия к виду $|\cos bt| + |\cos t| > \sin bt + \sin t$, сводя задачу к предыдущему случаю.

**Второе решение.** Выберем такое $x$, что $x(a+1) = \pi/2$. Тогда $x$ и $ax$ лежат в интервале $(0, \pi/2)$, поэтому $|\cos x| = \cos x = \sin ax$ и $|\cos ax| = \cos ax = \sin x$. Значит, для выбранного $x$ имеем $|\cos x| + |\cos ax| = \sin ax + \sin x$.

11.2. Петя и Вася играют в игру на клетчатой доске $n \times n$ (где $n > 1$). Изначально вся доска белая, за исключением угловой клетки — она чёрная, и в ней стоит ладья. Игроки ходят по очереди. Каждым ходом игрок передвигает ладью по горизонтали или вертикали, при этом все клетки, через которые ладья перемещается (включая ту, в которую она попадает), перекрашиваются в чёрный цвет. Ладья не должна передвигаться через чёрные клетки или останавливаться на них. Проигрывает тот, кто не может сделать ход; первым ходит Петя. Кто выиграет при правильной игре? (*Н. Полянский*)

**Ответ.** Петя.

**Решение.** Одна из выигрышных стратегий для Пети состоит в том, чтобы каждым своим ходом делать самый длинный из возможных вертикальных ходов (например, первым ходом он пойдёт по вертикали в другой угол доски). Покажем, что, действуя согласно ей, он выиграет.

Назовём белую клетку *достижимой*, если из текущего положения ладьи в неё можно попасть за несколько ходов по белым клеткам. Покажем, что в любой момент Петя сможет сходить, причём после каждого его хода все достижимые клетки образуют несколько (не более двух) прямоугольников, в каждом из которых число строк больше числа столбцов, причём для каждого из них ладья стоит в клетке, соседней с угловой по горизонтали. Для первого хода Пети это верно.

Далее, если после некоторого его хода это так, то Вася вынужден ходить в один из полученных прямоугольников по горизонтали. Пусть в этом прямоугольнике $r$ строк и $c$ столбцов, а Вася сходит на $v \leqslant c$ клеток. После этого хода клетки остав-





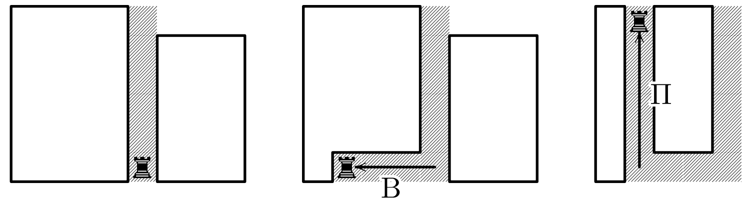


Рис. 11

шегося прямоугольника (если он был) перестанут быть достижимыми (см. рис. 11). Поскольку $r \geqslant c + 1 \geqslant 2$, у Пети остаётся возможность вертикального хода. После этого хода достижимые клетки будут образовывать прямоугольники $r \times (c - v)$ и $(r-1) \times (v-1)$. В каждом из них строк больше, чем столбцов, ибо $r > c > c - v$ и $r - 1 > c - 1 \geqslant v - 1$. При этом ладья стоит в клетке, соседней по горизонтали с угловой в каждом из этих прямоугольников; это и требовалось доказать.

Итак, мы, в частности, доказали, что Петя всегда сможет сделать ход. При этом когда-нибудь игра закончится, ибо количество белых клеток уменьшается. Значит, он выиграет.

11.3. Положительные рациональные числа $a$ и $b$ записаны в виде десятичных дробей, у каждой из которых минимальный период состоит из 30 цифр. У десятичной записи числа $a - b$ длина минимального периода равна 15. При каком наименьшем натуральном $k$ длина минимального периода десятичной записи числа $a + kb$ может также оказаться равной 15? (*А.С. Голованов*)

**Ответ.** $k = 6$.

**Решение.** Домножив, если нужно, числа $a$ и $b$ на подходящую степень десятки, мы можем считать, что десятичные записи чисел $a$, $b$, $a - b$ и $a + kb$ — чисто периодические (то есть периоды начинаются сразу после запятой).

Воспользуемся следующим известным фактом: десятичная запись рационального числа $r$ — чисто периодическая с (не обязательно минимальной) длиной периода $T$ тогда и только тогда, когда $r$ имеет вид $\frac{m}{10^T-1}$ для некоторого целого $m$.

Применительно к условию задачи это значит, что $a = \frac{m}{10^{30}-1}$ и $b = \frac{n}{10^{30}-1}$. Нам также известно, что числа $a - b = \frac{m-n}{10^{30}-1}$ и

$a+kb=\frac{m+kn}{10^{30}-1}$ записываются десятичными дробями с периодом длины 15, то есть могут быть записаны как обыкновенные дроби со знаменателем $10^{15}-1$. Поэтому так может быть записана и их разность $(k+1)b=\frac{(k+1)n}{10^{30}-1}$. Таким образом, число $(k+1)n$ делится на $10^{15}+1$, а число $n$ — не делится (иначе и $b$ записывалось бы дробью с периодом длины 15). Значит, число $k+1$ делится на некоторый простой делитель числа $10^{15}+1$. Наименьший из таких делителей — это 7. Действительно, число $10^{15}+1$ даёт остаток 1 при делении на 2 и на 5, а также остаток 2 при делении на 3. С другой стороны, оно делится на $10^3+1=7\cdot 143$. Итак, $k+1\geqslant 7$ и $k\geqslant 6$.

В некотором смысле минимальный пример чисел, удовлетворяющих условию при $k=6$, получается, если положить $a-b=\frac{1}{10^{15}-1}$ и $a+6b=\frac{2}{10^{15}-1}$. Тогда $a=\frac{8}{7(10^{15}-1)}$ и $b=\frac{1}{7(10^{15}-1)}$. Ясно, что длины минимальных периодов чисел $a-b$ и $a+6b$ равны 15. Далее, длины минимальных периодов чисел $a$ и $b$ больше 15 и делятся на 15 (так как $10^T-1$ должно делиться на $10^{15}-1$). С другой стороны, так как $10^{30}-1 \vdots 7(10^{15}-1)$, числа $a$ и $b$ периодичны с длиной периода 30. Значит, длины их минимальных периодов равны 30.

11.4. Треугольник $ABC$ ($AB>BC$) вписан в окружность $\Omega$. На сторонах $AB$ и $BC$ выбраны точки $M$ и $N$ соответственно так, что $AM=CN$. Прямые $MN$ и $AC$ пересекаются в точке $K$. Пусть $P$ — центр вписанной окружности треугольника $AMK$, а $Q$ — центр вневписанной окружности треугольника $CNK$, касающейся стороны $CN$. Докажите, что середина дуги $ABC$ окружности $\Omega$ равноудалена от точек $P$ и $Q$. *(М. Кунгожин)*

**Решение.** См. решение задачи 10.4.

11.5. Натуральное число $n$ назовём *хорошим*, если каждый его натуральный делитель, увеличенный на 1, является делителем числа $n+1$. Найдите все хорошие натуральные числа. *(С. Берлов)*

**Ответ.** Единица и все нечётные простые числа.

**Решение.** Ясно, что $n=1$ удовлетворяет условию. Также ему удовлетворяют все нечётные простые: если $n=p$, то его





делители, увеличенные на 1, есть 2 и $p+1$; оба они делят $p+1$. С другой стороны, у любого числа $n$, удовлетворяющего условию, есть делитель 1; значит, $n+1$ делится на $1+1$, то есть $n$ нечётно.

Предположим теперь, что какое-то составное $n$ удовлетворяет условию. Имеем $n=ab$, где $a\geqslant b\geqslant 2$. Тогда число $n+1$ делится на $a+1$; кроме того, число $n+b=(a+1)b$ также делится на $a+1$. Значит, и число $b-1=(n+b)-(n+1)$ также делится на $a+1$. Так как $b-1>0$, получаем, что $b-1\geqslant a+1$. Но это противоречит неравенству $b\leqslant a$.

11.6. Сфера $\omega$ проходит через вершину $S$ пирамиды $SABC$ и пересекает рёбра $SA$, $SB$ и $SC$ вторично в точках $A_1$, $B_1$ и $C_1$ соответственно. Сфера $\Omega$, описанная около пирамиды $SABC$, пересекается с $\omega$ по окружности, лежащей в плоскости, параллельной плоскости $(ABC)$. Точки $A_2$, $B_2$ и $C_2$ симметричны точкам $A_1$, $B_1$ и $C_1$ относительно середин рёбер $SA$, $SB$ и $SC$ соответственно. Докажите, что точки $A$, $B$, $C$, $A_2$, $B_2$ и $C_2$ лежат на одной сфере. *(И. Богданов)*

**Первое решение.** Утверждение задачи эквивалентно равенству $SA_2\cdot SA=SB_2\cdot SB=SC_2\cdot SC$. Значит, ввиду равенств $AA_1=SA_2$ и двух аналогичных, достаточно доказать, что $AA_1\cdot AS=BB_1\cdot BS=CC_1\cdot CS$.

Пусть $\ell$ — прямая, проходящая через центры сфер $\Omega$ и $\omega$. Окружность пересечения этих сфер лежит в плоскости, перпендикулярной $\ell$, так что $\ell\perp(ABC)$. Это значит, что при повороте вокруг $\ell$ описанная окружность треугольника $ABC$ переходит в себя, и подходящим таким поворотом можно точку $A$ перевести в $B$. Пусть точки $S$ и $A_1$ при этом повороте переходят в $S'$ и $A_1'$ (они тоже лежат на $\omega$, см. рис. 12). Тогда $AA_1\cdot AS=BA_1'\cdot BS'=BB_1\cdot BS$. Равенство $AA_1\cdot AS=CC_1\cdot CS$ доказывается аналогично.

**Второе решение.** Обозначим через $O_1$ и $O$ центры сфер $\omega$ и $\Omega$ соответственно. Как и в первом решении, введём прямую $\ell$, проходящую через $O$ и $O_1$; тогда $\ell\perp(ABC)$.

Пусть $O_2$ — точка, симметричная $O_1$ относительно $O$. Тогда $O_2$ лежит на $\ell$, откуда $O_2A=O_2B=O_2C$; обозначим $r=O_2A$. Далее, проекции точек $O_2$ и $O_1$ на $SA$ симметричны относи-

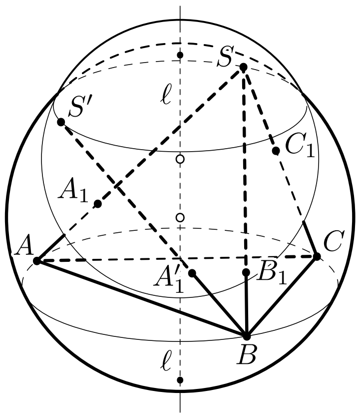


Рис. 12

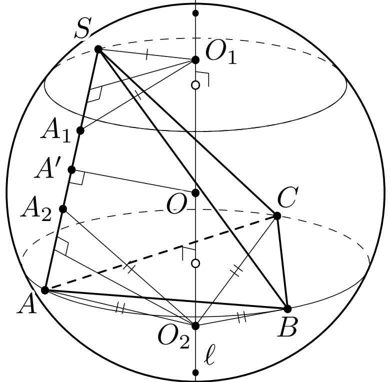


Рис. 13

тельно проекции точки $O$, т. е. относительно середины $A'$ отрезка $SA$. Так как проекция точки $O_1$ является серединой отрезка $SA_1$, из симметрии относительно $A'$ получаем, что проекция точки $O_2$ — это середина отрезка $AA_2$. Значит, $A_2O_2 = AO_2 = r$. Аналогично показывается, что $B_2O_2 = C_2O_2 = r$. Значит, требуемые шесть точек лежат на сфере с центром $O_2$ и радиусом $r$.

11.7. Исходно на доске написаны многочлены $x^3 - 3x^2 + 5$ и $x^2 - 4x$. Если на доске уже написаны многочлены $f(x)$ и $g(x)$, разрешается дописать на неё многочлены $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(g(x))$ и $cf(x)$, где $c$ — произвольная (не обязательно целая) константа. Может ли на доске после нескольких операций появиться многочлен вида $x^n - 1$ (при натуральном $n$)? *(К. Тыщук)*

**Ответ.** Не может.

**Первое решение.** Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — два многочлена, и для некоторой точки $x_0$ выполняются равенства $f'(x_0) = 0$ и $g'(x_0) = 0$. Тогда, очевидно, $(f \pm g)'(x_0) = 0$ и $cf'(x_0) = 0$. Также $(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0) = 0$. Наконец, если $h(x)$ — многочлен, то $(h(g(x_0)))' = h'(g(x_0))g'(x_0) = 0$. Таким образом, если у исходных многочленов в некоторой точке производные обращаются в нуль, то и после разрешенных условием операций также может получиться лишь многочлен, производная которого обращается в нуль в этой точке.





Заметим, что производные обоих исходных многочленов обращаются в нуль при $x = 2$. Действительно, $(x^2 - 4x)' = 2x - 4 = 0$ при $x = 2$, и $(x^3 - 3x^2 + 5)' = 3x^2 - 6x = 0$ при $x = 2$. Однако $(x^n - 1)' = nx^{n-1} = n2^{n-1} \neq 0$ при $x = 2$. Поэтому многочлен вида $x^n - 1$ получить нельзя.

**Второе решение.** Добавим на доску константу 2 и покажем, что даже после этого требуемое невозможно.

Сделаем замену $x = t + 2$: каждому многочлену $f(x)$ сопоставим многочлен $f_2(t) = f(t + 2)$. Тогда многочлены $x^2 - 4x$ и $x^3 - 3x^2 + 5$ переходят в многочлены $t^2 - 4$ и $t^3 + 3t^2 + 1$ соответственно. При этом результаты операций суммы, разности, перемножения многочленов и умножения на константу при такой замене сохранятся. С другой стороны, если $h(x) = f(g(x))$, то $h_2(t) = f(g(t + 2)) = f_2(g_2(t) - 2)$. Таким образом, если многочлен $h(x)$ можно получить из многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то и многочлен $h_2(x)$ можно получить из многочленов $f_2(x)$ и $g_2(x)$ (при наличии константы 2). Значит, если из исходных многочленов можно получить $x^n - 1$, то из многочленов $t^2 - 4$ и $t^3 + 3t^2 + 1$ можно получить многочлен $(t + 2)^n - 1$.

Заметим, что у всех исходных многочленов коэффициент при $t$ равен нулю. Нетрудно видеть тогда, что и у всех получающихся многочленов коэффициент при $t$ также будет нулевым. Однако у многочлена $(t + 2)^n - 1$ этот коэффициент равен $n2^{n-1} > 0$, так что этот многочлен получить нельзя.

**Замечание.** Поскольку все появляющиеся на доске выражения являются многочленами, нетрудно видеть, что операция добавления композиции может быть выражена через остальные операции.

11.8. Двое игроков играют в карточную игру. У них есть колода из $n$ попарно различных карт. Про любые две карты из колоды известно, какая из них бьёт другую (при этом, если $A$ бьёт $B$, а $B$ бьёт $C$, то может оказаться, что $C$ бьёт $A$). Колода распределена между игроками произвольным образом. На каждом ходу игроки открывают по верхней карте из своих колод, и тот, чья карта бьёт карту другого игрока, берёт обе карты и кладёт их в самый низ своей колоды в произвольном порядке по своему усмотрению. Докажите, что при любой исходной раздаче игроки могут, зная расположение карт, договориться и действовать так, чтобы один из игроков остался без карт. (*Е. Лакштанов*)

**Решение.** Выпишем все возможные ситуации, которые могут встретиться в игре (т. е. все возможные пары колод у участников). Назовём ситуацию *финальной*, если все карты у одного игрока; *критической*, если у одного из игроков ровно одна карта; и *регулярной*, если у обоих игроков хотя бы по две карты. Проведём стрелку от каждой ситуации к ситуациям, которые могут из неё получиться после одного хода. Тогда из любой нефинальной ситуации ведут две стрелки, а из любой финальной — ноль. Нам надо доказать, что из каждой нефинальной ситуации по стрелкам можно дойти до финальной.

Выясним, сколько стрелок ведут в каждую ситуацию. Предположим, что она получилась в результате какого-то хода, в котором карты взял первый игрок. Тогда у него оказалось хотя бы две карты, которые лежат в конце колоды; при этом известно, что одна из них — $a$ — бьёт другую — $b$. Значит, в этом случае карта $a$ была у первого игрока, а карта $b$ — у второго, то есть предыдущая ситуация восстанавливается однозначно. Итак, если наша ситуация регулярна, то на предыдущем ходе карты мог получить любой из двух игроков, и в каждом из этих случаев предыдущая ситуация восстанавливается однозначно. Значит, в каждую регулярную ситуацию ведут ровно две стрелки. Аналогично, в каждую нерегулярную ситуацию ведёт ровно одна стрелка.

Предположим, что из некоторой ситуации $S$ нельзя попасть в финальную. Назовём ситуацию *достижимой*, если в неё можно добраться из $S$. Из каждой достижимой ситуации ведут две стрелки в достижимые. С другой стороны, в каждую достижимую ситуацию ведёт не более двух стрелок из достижимых. Это возможно только в том случае, если в каждую достижимую ситуацию ведёт ровно по две стрелки из достижимых. Из этого, в частности, следует, что все достижимые ситуации регулярны. Более того, поскольку в каждую ситуацию ведёт не более двух





стрелок, получаем, что все стрелки, входящие в достижимые ситуации, выходят также из достижимых.

Пусть в ситуации $S$ у первого игрока $k > 1$ карт. Тогда в одной из двух ситуаций, из которых ведут стрелки в $S$, у первого игрока $k-1$ карта — назовём эту ситуацию $S_1$; по показанному выше, она достижима. Аналогично, если $k-1 > 1$, то в одной из двух ситуаций, из которых ведут стрелки в $S_1$, у первого игрока $k-2$ карты; назовём её $S_2$ и продолжим рассуждения. В итоге мы получим цепочку из достижимых ситуаций $S_1, S_2, \ldots, S_{k-1}$, причём в $S_{k-1}$ у первого игрока одна карта, т. е. она критическая, и в неё входит только одна стрелка. Но в каждую достижимую ситуацию должно входить две стрелки — противоречие.