Материалы для проведения

заключительного этапа

XLII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2015–2016 учебный год

Санкт-Петербург,

21–29 апреля 2016 г.

Москва, 2016

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Е. В. Бакаев, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, С. Г. Волчёнков, А. А. Гаврилюк, А. А. Гайфуллин, Н. А. Гладков, А. С. Голованов, М. А. Григорьев, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, С. А. Дориченко, Л. А. Емельянов, Г. К. Жуков, А. П. Зимин, Е. Ю. Иванова, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, П. В. Мартынов, А. Д. Матушкин, В. В. Мокин, Е. Г. Молчанов, О. С. Нечаева, В. А. Омельяненко, А. В. Пастор, О. К. Подлипский, И. А. Решетников, И. С. Рубанов, Р. Р. Садыков, М. Б. Скопенков, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Н. В. Чернега, К. В. Чувилин, О. И. Южаков, А. Г. Якубов.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензенты: д. ф.-м. н. Р. Н. Карасёв, к. ф.-м. н. Б. В. Трушин.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, К. В. Чувилин.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Запрещается публикация или размещение в сети Интернет условий или решений задач олимпиады.

Условия и решения задач

9 класс

9.1. У менялы на базаре есть много ковров. Он согласен взамен ковра размера $a \times b$ дать либо ковёр размера $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$, либо два ковра размеров $c \times b$ и $\frac{a}{c} \times b$ (при каждом таком обмене число c клиент может выбрать сам). Путешественник рассказал, что изначально у него был один ковёр, стороны которого превосходили 1, а после нескольких таких обменов у него оказался набор ковров, у каждого из которых одна сторона длиннее 1, а другая — короче 1. Не обманывает ли он? (По просьбе клиента меняла готов ковёр размера $a \times b$ считать ковром размера $b \times a$.) (*Г. Жуков*)

Ответ. Обманывает.

Решение. Назовём ковёр, все стороны которого больше 1, *большим*, а ковёр, все стороны которого меньше 1, — *маленьким*. Таким образом, изначально у путешественника был один большой ковёр. Докажем, что общее число больших и маленьких ковров у путешественника не уменьшается; отсюда следует, что описанная ситуация невозможна. Для этого достаточно рассмотреть только случай, когда путешественник отдаёт меняле большой или маленький ковёр.

При обменах первого вида большой ковёр меняют на маленький, а маленький — на большой. Поэтому общее количество больших и маленьких ковров не уменьшается.

Рассмотрим обмены второго вида. При обмене большого ковра $a \times b$ путешественник получит ковры $a_1 \times b$ и $a_2 \times b$. Если $0 < a_1, a_2 \leqslant 1$, то $a = a_1 a_2 \leqslant 1$, что неверно. Учитывая неравенство $b > 1$, получим, что хотя бы один из новых ковров будет большим. Аналогично, при обмене маленького ковра хотя бы один из новых ковров будет маленьким. Значит, при таком обмене общее количество больших и маленьких ковров также не уменьшается.

9.2. Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C. Прямая ℓ пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает ℓ в точках P и Q. Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности.

(*И. Богданов, П. Кожевников*)

Решение. Если $\ell \parallel BC$, утверждение очевидно в силу симметрии относительно серединного перпендикуляра к BC.

Пусть теперь прямые ℓ и BC пересекаются в точке X (см. рис. 1). Из параллельности получаем $\frac{XB}{XT} = \frac{XK}{XL} = \frac{XS}{XC}$, откуда $XT \cdot XS = XB \cdot XC$. Поскольку точки B, C, P и Q лежат на ω, имеем $XB \cdot XC = XP \cdot XQ$. Получаем, что $XT \cdot XS = XP \cdot XQ$; это и означает, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности.

Замечание. Можно показать, что полученная окружность касается прямых KS и LT в точках S и T соответственно.

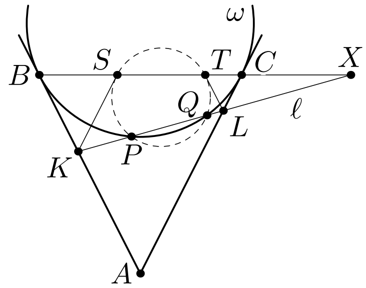


Рис. 1

9.3. Саша выбрал натуральное число $N > 1$ и выписал в строчку в порядке возрастания все его натуральные делители: $d_1 < \ldots < d_s$ (так что $d_1 = 1$ и $d_s = N$). Затем для каждой пары стоящих рядом чисел он вычислил их наибольший общий делитель; сумма полученных $s-1$ чисел оказалась равной $N-2$. Какие значения могло принимать N? (*А. Кузнецов*)

Ответ. $N = 3$.

Решение. Заметим сразу, что $d_{s+1-i} = N/d_i$ при всех $i = 1, 2, \ldots, s$.

Число $d_{i+1} - d_i$ делится на НОД(d_i, d_{i+1}), так что НОД$(d_i, d_{i+1}) \leqslant d_{i+1} - d_i$. При $i = 1, \ldots, s-1$ обозначим $r_i = (d_{i+1} - d_i) - \text{НОД}(d_i, d_{i+1}) \geqslant 0$. Согласно условию,

$$(d_2 - d_1) + (d_3 - d_2) + \ldots + (d_s - d_{s-1}) = d_s - d_1 = N - 1$$

и

$$\text{НОД}(d_1, d_2) + \text{НОД}(d_2, d_3) + \ldots + \text{НОД}(d_{s-1}, d_s) = N - 2.$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем $r_1 + \ldots + r_{s-1} = 1$. Это означает, что $r_k = 1$ для некоторого k, а все остальные r_i равны нулю.

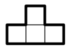
Итак, $1 = (d_{k+1} - d_k) - \text{НОД}(d_k, d_{k+1})$. Правая, а потому и левая часть этого равенства делится на НОД(d_k, d_{k+1}), поэтому НОД$(d_k, d_{k+1}) = 1$ и $d_{k+1} - d_k = 2$. Это возможно, только если каждое из чисел d_k и d_{k+1} нечётно.

Так как d_k и d_{k+1} — два последовательных делителя числа N, то $\frac{N}{d_{k+1}}$ и $\frac{N}{d_k}$ — тоже два последовательных делителя числа N. Поэтому, если $\frac{N}{d_{k+1}} = d_m$, то $\frac{N}{d_k} = d_{m+1}$. При этом

$$\text{НОД}(d_m, d_{m+1}) = \frac{N}{\text{НОК}(d_k, d_{k+1})} = \frac{N \cdot \text{НОД}(d_k, d_{k+1})}{d_k d_{k+1}} < \frac{N(d_{k+1} - d_k)}{d_k d_{k+1}} = d_{m+1} - d_m.$$

Значит, $r_m > 0$, что возможно лишь при $k = m$ (и, следовательно, $s = 2k$).

Итак, $d_{k+1} = \frac{N}{d_k}$, то есть число $N = d_k d_{k+1}$ нечётно. Но тогда $d_{s-1} \leqslant \frac{N}{3}$, откуда НОД$(d_{s-1}, d_s) \leqslant d_{s-1} \leqslant \frac{N}{3}$. Следовательно, $1 \geqslant r_{s-1} \geqslant \frac{2N}{3} - \frac{N}{3} = \frac{N}{3}$, т. е. $N \leqslant 3$. Поскольку $N > 1$, получаем единственно возможное значение $N = 3$, которое, как легко убедиться, удовлетворяет условию.

9.4. Из клетчатого бумажного квадрата 100×100 вырезали по границам клеток 1950 двуклеточных прямоугольников. Докажите, что из оставшейся части можно вырезать по границам клеток четырёхклеточную фигурку вида  — возможно, повёрнутую. (Если такая фигурка уже есть среди оставшихся частей, считается, что её получилось вырезать.) (*С. Берлов*)

Первое решение. Представим себе, что доминошки (прямоугольники 1×2) ещё не вырезаны, и будем вырезать их по одной. В каждый момент процесса назовём *ценой* ещё не вырезанной клетки число её невырезанных соседей по стороне, уменьшенное на 2 (например, цена неугловой клетки, лежащей на границе квадрата, изначально равна 1). Тогда исходная цена каждой клетки есть $2-t$, где t — количество отрезков периметра квадрата, находящихся на границе этой клетки. Значит, исходная суммарная цена всех клеток равна $2 \cdot 100^2 - 400 = 19\,600$.

Проследим, как изменяется суммарная цена S всех невырезанных клеток после вырезании доминошки. При этом выкидываются две клетки (сумма цен которых не превосходит $2+2=4$), а также уменьшаются на 1 цены клеток, граничащих с доминошкой (которых не больше шести). Поэтому после вырезания доминошки S уменьшается не более, чем на 10.

Итак, после вырезания 1950 доминошек S станет не меньше, чем $19\,600 - 1950 \cdot 10 = 100$. Значит, найдётся невырезанная клетка k, цена которой положительна. Это значит, что у k не менее трёх невырезанных соседей. Тогда k вместе с этими тремя соседями образует требуемую фигурку.

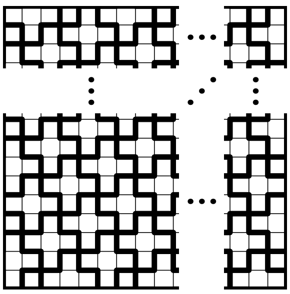


Рис. 2

Второе решение. Назовём требуемую фигурку T-*тетрамино*.

Мысленно разобьём наш квадрат на фигурки (см. рис. 2). Нетрудно подсчитать, что вне «полных» крестов окажется ровно $4 \cdot 100 = 400$ клеток, из которых 320 будут находиться в T-тетрамино разбиения. Итого, в разбиении есть $(100^2 - 400)/5 = 1920$ полных крестов и ещё 80 T-тетрамино.

Рассмотрим теперь, куда попадают клетки вырезанных доминошек. Предположим, что из каждого полного креста было вырезано хотя бы по две клетки, а из каждого T-тетрамино разбиения — хотя бы одна. Тогда общее число вырезанных клеток было бы не меньше, чем $1920 \cdot 2 + 80 = 2 \cdot 1960$, что неверно.

Значит, либо из некоторого T-тетрамино не вырезано ни одной клетки, либо из некоторого креста вырезано не более одной клетки. В первом случае мы уже нашли T-тетрамино, которое можно вырезать. Во втором же случае, если из креста и вырезана одна клетка, то она не может быть центральной (иначе вторая клетка той же доминошки также лежала бы в кресте). Значит, даже если клетка креста вырезана, остаток его как раз и является T-тетрамино. В обоих случаях мы добились требуемого.

9.5. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составлены девять (не обязательно различных) девятизначных чисел; каждая из цифр использована в каждом числе ровно один раз. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться сумма этих девяти чисел? (*Н. Агаханов*)

Ответ. На 8 нулей.

Решение. Покажем, что сумма не может оканчиваться на 9 нулей. Каждое из составленных чисел делится на 9, поскольку сумма его цифр делится на 9. Поэтому их сумма также делится на 9. Наименьшее натуральное число, делящееся на 9 и оканчивающееся на девять нулей, равно $9 \cdot 10^9$, так что сумма наших чисел не меньше $9 \cdot 10^9$. Значит, одно из них не меньше 10^9, что невозможно.

Осталось показать, как составить числа, сумма которых оканчивается на восемь нулей. Например, можно взять восемь чисел, равных 987654321, и одно число 198765432. Их сумма равна $81 \cdot 10^8$.

9.6. Квадрат разбит на $n^2 \geqslant 4$ прямоугольников $2(n-1)$ прямыми, из которых $n-1$ параллельны одной стороне квадрата, а остальные $n-1$ — другой. Докажите, что можно выбрать $2n$ прямоугольников разбиения таким образом, что для любых двух выбранных прямоугольников один из них можно поместить в другой (возможно, предварительно повернув). (*С. Берлов*)

Решение. Назовём пару прямоугольников *вложимой*, если один из них можно вложить в другой.

Пусть горизонтальная сторона квадрата разбилась на отрезки длин $a_1, \ldots, a_n$ (слева направо), а вертикальная — на отрезки длин $b_1, \ldots, b_n$ (сверху вниз). Переставив «столбцы» и «строки», можно считать, что $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Обозначим через $Q_{i,j}$ прямоугольник разбиения со сторонами a_i и b_j. Заметим, что при $i \leqslant k$ и $j \leqslant \ell$ пара $Q_{i,j}$ и $Q_{k,\ell}$ вложима.

Поскольку $a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_n$, найдутся различные индексы i и j такие, что $a_i \geqslant b_i$ и $a_j \leqslant b_j$. Можно считать, что $i < j$. Тогда существует индекс $k \in [i, j]$ такой, что $a_k \leqslant b_k$ и $a_{k-1} \geqslant b_{k-1}$.

Мы утверждаем, что можно выбрать следующие прямоугольники: $Q_{1,1}$, $Q_{1,2}$, $\ldots$, $Q_{1,k-1}$, $Q_{2,k-1}$, $\ldots$, $Q_{k,k-1}$, вкупе с $Q_{k-1,k}$, $Q_{k,k}$, $\ldots$, $Q_{k,n}$, $Q_{k+1,n}$, $\ldots$, $Q_{n,n}$ (см. рис. 3). Их количество равно $2(k-1)+2(n-k+1) = 2n$. Любая пара из них, кроме $(Q_{k,k-1}, Q_{k-1,k})$, вложима по замечанию выше. Наконец, оставшаяся пара также вложима, поскольку $a_k \leqslant b_k$ и $b_{k-1} \leqslant a_{k-1}$ (для вложения один прямоугольник нужно повернуть на 90°).

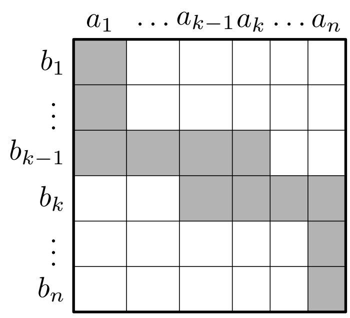


Рис. 3

9.7. Окружность ω вписана в треугольник ABC, в котором $AB < AC$. Вневписанная окружность этого треугольника касается стороны BC в точке A'. Точка X выбирается на отрезке $A'A$ так, что отрезок $A'X$ не пересекает ω. Касательные, проведённые из X к ω, пересекают отрезок BC в точках Y и Z. Докажите, что сумма $XY + XZ$ не зависит от выбора точки X. (*И. Митрофанов*)

Решение. Будем считать, что точка Y лежит ближе к точке B, нежели Z; кроме того, считаем, что сторона BC горизонтальна, а A лежит выше неё (см. рис. 4).

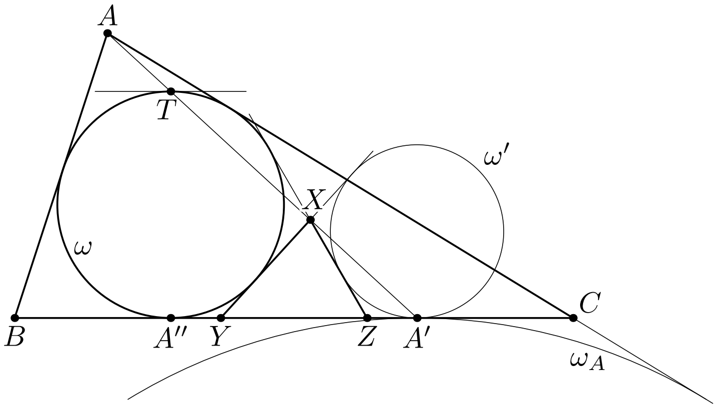


Рис. 4

Обозначим через ω_A вневписанную окружность треугольника ABC, касающуюся стороны BC, а через ω' — вневписанную окружность треугольника XYZ, касающуюся стороны XZ. Пусть ω касается BC в точке A''. Обозначим через T точку пересечения AA' и ω, лежащую ближе к A. Гомотетия с центром A, переводящая ω в ω_A, переводит T в A'; значит, касательная к ω в T параллельна BC.

Поскольку окружности ω и ω' вписаны в вертикальные углы, образованные прямыми XY и XZ, существует гомотетия с центром в X (и отрицательным коэффициентом), переводящая ω в ω'. Пусть при этой гомотетии точка T переходит в точку T'. Тогда T' лежит на прямой AA', касательная к ω' в T' параллельна BC, и ω' лежит выше этой касательной. Такая касательная к ω' — это прямая BC; значит, T' лежит на BC, то есть ω' касается BC в точке A'.

Обозначим полупериметр треугольника XYZ через p. Так как окружности ω и ω' — вневписанные для этого треугольника, имеем $ZA' = YA'' = p - YZ$. Значит,

$$XY + XZ = 2p - YZ = 2(p - YZ) + YZ = ZA' + YZ + YA'' = A'A'',$$

что не зависит от выбора точки X.

Замечание. Тот факт, что ω' касается BC в точке A', можно также доказать, применив теорему о трёх гомотетиях к окружностям ω, ω_A и ω'. Центры гомотетий, переводящих их друг в друга, есть A, X и некоторая точка Q, лежащая на BC (так как BC — внутренняя общая касательная к ω_A и ω'). Получаем, что Q лежит на прямой AX, то есть совпадает с A'. Поскольку ω_A касается BC в $Q = A'$, то и ω' также касается BC в этой же точке.

9.8. Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \leqslant \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}.$$

(*А. Храбров*)

Решение. Домножив доказываемое неравенство на $a^2b^2c^2d^2$, получим
$$a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 \leqslant 1. \qquad (*)$$

Поскольку неравенство симметричное, можно считать, что $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$. По неравенству о средних для чисел a, b и $(c+d)$ имеем
$$ab(c+d) \leqslant \Big(\frac{a+b+(c+d)}{3}\Big)^3 = 1.$$
Следовательно, $a^2b^2(c+d)^2 \leqslant 1$.

Значит, для доказательства $(*)$ достаточно показать, что
$$a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 \leqslant a^2b^2(c+d)^2.$$
После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых остаётся неравенство
$$a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 \leqslant 2a^2b^2cd,$$
которое является суммой двух очевидных неравенств $a^2c^2d^2 \leqslant a^2b^2cd$ и $b^2c^2d^2 \leqslant a^2b^2cd$.

Замечание. Если допустить неотрицательные значения переменных, то в неравенстве $(*)$ равенство достигается лишь тогда, когда три числа равны 1 и одно равно 0.

10 класс

10.1. В Национальной Баскетбольной Ассоциации 30 команд, каждая из которых проводит за год 82 матча с другими командами в регулярном чемпионате. Сможет ли руководство Ассоциации разделить команды (не обязательно поровну) на Восточную и Западную конференции и составить расписание игр так, чтобы матчи между командами из разных конференций составляли ровно половину от общего числа матчей? (*А. Грибалко*)

Ответ. Нет, не сможет.

Решение. Пусть x и y — общее число матчей, сыгранных внутри Восточной и Западной конференций соответственно, а z — число матчей между командами разных конференций. Нам надо доказать, что равенство $z = \frac{x+y+z}{2}$ невозможно.

Каждая из k команд Восточной конференции участвует в 82 играх; значит, $82k = 2x + z$ (коэффициент 2 появился из-за того, что каждый внутренний матч учтён у обеих участвовавших в нём команд). Отсюда число $z = 82k - 2x$ чётно. Но из подсчёта общего числа матчей $x+y+z = \frac{30 \cdot 82}{2}$ следует, что число $\frac{x+y+z}{2} = 15 \cdot 41$ нечётно. Значит, равенство $z = \frac{x+y+z}{2}$ не может выполняться.

10.2. Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Точка Q выбрана на отрезке BC так, что $PQ \perp AC$. Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, описанных около треугольников APD и BQD, параллельна прямой AD. (*А. Кузнецов*)

Решение. Выберем на прямой QP точку T такую, что $DT \perp DA$ (см. рис. 5).

Поскольку $\angle APT = 90^\circ = \angle ADT$, точки A, P, D и T лежат на одной окружности. Значит, центр окружности ω_1, описанной около треугольника APD, лежит на серединном перпендикуляре ℓ к отрезку DT.

Так как четырехугольник $ABCD$ вписан, имеем $\angle QBD = \angle PAD$. Четырехугольник $APDT$ также вписан, откуда $\angle PAD = \angle QTD$. Итак, $\angle QBD = \angle PAD = \angle QTD$; значит, точки B, Q, D и T лежат на одной окружности. Поэтому центр окружности ω_2, описанной около треугольника BQD, также лежит на серединном перпендикуляре ℓ к отрезку DT. Таким образом, прямая ℓ проходит через центры ω_1 и ω_2. Поскольку $\ell \perp DT$ и $AD \perp DT$, получаем $\ell \parallel AD$, что и требовалось.

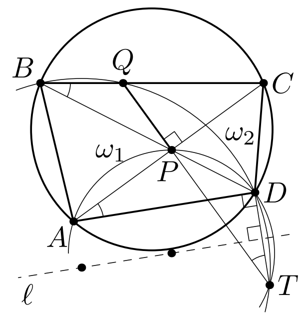


Рис. 5

10.3. Дан кубический многочлен $f(x)$. Назовём *циклом* тройку различных чисел (a, b, c) таких, что $f(a) = b$, $f(b) = c$ и $f(c) = a$. Известно, что нашлись восемь циклов (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2, \ldots, 8$, в которых участвуют 24 различных числа. Докажите, что среди восьми чисел вида $a_i + b_i + c_i$ есть хотя бы три различных. (*А. С. Голованов*)

Решение. Предположим противное; тогда у каких-то четырёх циклов (a_i, b_i, c_i) суммы чисел одинаковы и равны некоторому s. Для каждого из этих циклов имеем

$$s = a_i + b_i + c_i = a_i + f(a_i) + f(f(a_i)) = \\ = b_i + f(b_i) + f(f(b_i)) = c_i + f(c_i) + f(f(c_i)).$$

Итак, все 12 чисел наших четырёх циклов — корни многочлена $g(x) = x + f(x) + f(f(x)) - s$. Однако все эти 12 чисел по условию различны, а степень многочлена $g(x)$ равна 9; значит, у него не может быть больше 9 различных корней. Противоречие.

10.4. Внутри выпуклого 100-угольника выбрана точка X, не лежащая ни на одной его стороне или диагонали. Исходно вершины многоугольника не отмечены. Петя и Вася по очереди отмечают ещё не отмеченные вершины 100-угольника, причём Петя начинает и первым ходом отмечает сразу две вершины, а далее каждый своим очередным ходом отмечает по одной вершине. Проигрывает тот, после чьего хода точка X будет лежать внутри многоугольника с отмеченными вершинами. Докажите, что Петя может выиграть, как бы ни ходил Вася. (*С. Берлов, Ф. Петров*)

Решение. Раскрасим стороны 100-угольника в чёрный и белый цвета так, чтобы любые две соседних стороны имели разные цвета. Рассмотрим две одноцветных стороны AB и CD, образующие выпуклый четырёхугольник $ABCD$; пусть его диагонали AC и BD пересекаются в точке K. Предположим, что точка X лежит в треугольнике KBC (см. рис. 6). Покажем, как Петя может выиграть в этом случае.

Пусть он выберет первым ходом вершины B и C. После этого оба игрока могут выбирать только вершины, лежащие в другой полуплоскости от прямой BC, нежели точка X. Этих вершин чётное число, поскольку они разбиваются на пары вершин, образующих стороны того же цвета, что и AB. Поэтому последний ход будет за Петей.

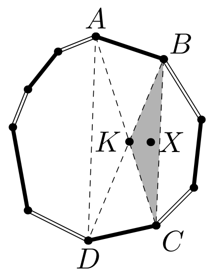


Рис. 6

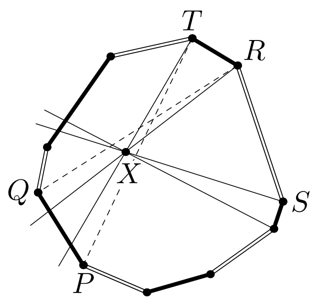


Рис. 7

Осталось показать, что такие стороны AB и CD найдутся. Пусть это не так. Рассмотрим любую вершину T. Предположим, что луч TX пересекает чёрную сторону PQ (см. рис. 7). Пусть TR — чёрная сторона, выходящая из T; можно считать, что $TRPQ$ — выпуклый четырёхугольник. Если точка X лежит внутри треугольника TRQ, то требуемый четырёхугольник $RTQP$ найден; в противном случае луч RX тоже должен пересекать отрезок PQ.

Пусть RS — следующая за TR сторона 100-угольника. Если луч SX пересекает белую сторону, то аналогично доказывается, что луч RX также должен её пересекать, что не так. Значит, SX пересекает какую-то чёрную сторону, и можно повторить предыдущие рассуждения для вершины S. Рассуждая так и дальше, мы получим, что для каждой чёрной стороны $T'R'$ найдётся чёрная сторона $P'Q'$, которую пересекают оба луча $T'X$ и $R'X$. Однако это неверно для чёрной стороны PQ (лучи PX и QX пересекают участки контура QT и RP соответственно) — противоречие.

10.5. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составлены девять (не обязательно различных) девятизначных чисел; каждая из цифр использована в каждом числе ровно один раз. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться сумма этих девяти чисел? (*Н. Агаханов*)

Решение. См. решение задачи 9.5.

10.6. Квадрат разбит на $n^2 \geqslant 4$ прямоугольников $2(n-1)$ прямыми, из которых $n-1$ параллельны одной стороне квадрата, а остальные $n-1$ — другой. Докажите, что можно выбрать $2n$ прямоугольников разбиения таким образом, что для любых двух выбранных прямоугольников один из них можно поместить в другой (возможно, предварительно повернув). (*С. Берлов*)

Решение. См. решение задачи 9.6.

10.7. На доске написаны четыре попарно различных целых числа, модуль каждого из которых больше миллиона. Известно, что не существует натурального числа, большего 1, на которое бы делилось каждое из четырех написанных чисел. Петя записал в тетрадку шесть попарных сумм этих чисел, разбил эти шесть сумм на три пары и перемножил числа в каждой паре. Могли ли все три произведения оказаться равными? (*И. Богданов*)

Ответ. Да, могли.

Первое решение. Подходят, например, числа

$$x = N^2 - 3N + 1, \qquad y = N^2 - N + 1,$$
$$z = -3N^2 + 3N - 1, \qquad t = N^2 + N - 1,$$

где N — натуральное число, большее миллиона.

Нетрудно видеть, что эти числа также больше миллиона по модулю и попарно различны. Их попарными суммами являются числа

$$x + y = 2(N-1)^2, \quad x + z = -2N^2, \quad y + z = -2N(N-1),$$
$$z + t = -2(N-1)^2, \quad y + t = 2N^2, \quad x + t = 2N(N-1),$$

и они разбиваются на три группы с равными произведениями:

$$(x+y)(x+z) = (y+t)(z+t) = (x+t)(y+z) = -4N^2(N-1)^2.$$

Осталось проверить, что числа x, y, z, t взаимно просты в совокупности. Если у них есть общий натуральный делитель d, то d также делит $x + y = 2(N-1)^2$ и $y + t = 2N^2$; значит, $d \leqslant \text{НОД}(2N^2, 2(N-1)^2) = 2$. Случай $d = 2$ невозможен, поскольку $y = N(N-1) + 1$ нечётно. Итак, $d = 1$, что и требовалось.

Замечание 1. Этот пример является частным случаем следующего, более общего. Выберем два взаимно простых числа m и n и потребуем, чтобы попарные суммы исходных шести чисел были равны $\pm 2mn$, $\pm 2m^2$ и $\pm 2n^2$. Эта шестёрка чисел хороша тем, что она разбивается на три пары чисел с равными (нулевыми) суммами, а также на другие три пары чисел с равными произведениями: $2mn \cdot (-2mn) = 2m^2 \cdot (-2n^2) = 2n^2 \cdot (-2m^2)$. Заметим, что каждая шестёрка целых чисел, обладающая первым свойством, является шестёркой попарных сумм каких-то четырёх (рациональных) чисел.

В решении использованы значения $m + 1 = n = N$. Подробнее о том, как найти этот пример, см. в замечании 3.

Второе решение. Идеологически другой пример получается, если положить

$$x = N^3 - N^2 + 1, \qquad y = N^3 - 3N^2 + 2N - 1,$$
$$z = -N^3 + N^2 - 2N + 1, \qquad t = -N^3 + N^2 + 2N - 1,$$

где N — натуральное число, большее миллиона. Опять же, эти числа больше миллиона по модулю и попарно различны. Их попарными суммами являются числа

$$x + y = 2N(N-1)^2, \quad x + z = -2(N-1), \quad y + z = -2N^2,$$
$$z + t = -2N^2(N-1), \quad y + t = -2(N-1)^2, \quad x + t = 2N,$$

и они разбиваются на три группы с равными произведениями:

$$(x+y)(x+t) = (x+z)(z+t) = (y+z)(y+t) = 4N^2(N-1)^2.$$

Проверка их совокупной взаимной простоты проводится аналогично такой же проверке в предыдущем решении.

Замечание 2. Этот пример также является частным случаем более общего. В нём попарными суммами четырёх исходных чисел являются числа $2ab^2$, $2a^2b$, $2bc^2$, $2b^2c$, $2ca^2$ и $2c^2a$, где a, b, c — попарно взаимно простые целые числа с нулевой суммой. Свойства этой шестёрки такие же, как и у шестёрки из прошлого решения (для проверки равенства сумм достаточно заметить, что $2ab^2 + 2a^2b = 2(a+b)ab = -2abc$; другие подобные суммы также равны $-2abc$).

В решении использованы значения $a = N$, $b = 1 - N$, $c = -1$.

Замечание 3. Опишем метод поиска четвёрок *рациональных* чисел, удовлетворяющих требованиям задачи. (Из таких четвёрок можно получить требуемые четвёрки умножением на НОК знаменателей и делением на НОД числителей.)

Для начала перейдём (как и в предыдущих замечаниях) к поиску *шестёрок попарных сумм* наших трёх чисел. Единственным существенным условием на такую шестёрку является то, что она разбивается на три пары чисел с равными суммами: $(x+y)+(z+t) = (x+z)+(y+t) = (x+t)+(y+z)$. Действительно, если числа $n_1, \ldots, n_6$ таковы, что $n_i + n_{7-i} = s$ при всех $i = 1, 2, 3$, то числами, дающими эти попарные суммы, являются, например, $\frac{n_1+n_2-n_3}{2}$, $\frac{n_1+n_3-n_2}{2}$, $\frac{n_2+n_3-n_1}{2}$, $s - \frac{n_1+n_2+n_3}{2}$ (есть и ещё *одна* четвёрка с такими же попарными суммами — какая?).

Итак, от нас требуется найти шестёрку чисел вида p, q, r, $s-p$, $s-q$, $s-r$ такую, что её элементы разбиваются на три пары чисел с равными произведениями. При этом числа шестёрки должны быть различными, кроме, разве что, совпадения чисел в одной паре вида $(t, s-t)$ (иначе два из исходных четырёх чисел также совпадут). Есть три существенно различных способа осуществить такое разбиение.

1) Пусть $p(s-p) = q(s-q) = r(s-r) = \alpha$. Тогда числа p, q и r являются тремя различными корнями квадратного (относительно u) уравнения $u^2 - su + \alpha = 0$, что невозможно.

2) Пусть $p(s-q) = q(s-p) = r(s-r) = \alpha$. Тогда $ps = qs$, что, в силу $p \neq q$, возможно лишь при $s = 0$. Итого, наши шесть сумм есть $\pm p$, $\pm q$, $\pm r$; при этом они должны разбиваться на пары с равными произведениями. Это легко приводит к примеру из замечания 1.

3) Пусть $p(s-q) = q(s-r) = r(s-p)$. Тогда $0 = p(s-q) - q(s-r) = s(p-q) - q(p-r)$, то есть $\frac{s}{q} = \frac{p-r}{p-q}$. Аналогично, $\frac{s}{p} = \frac{r-q}{r-p}$ и $\frac{s}{r} = \frac{q-p}{q-r}$. Перемножая эти три равенства, получаем $s^3 = -pqr$. Исследуя эти уравнения далее, можно придти к примеру из замечания 2.

10.8. Пусть ABC — остроугольный треугольник, в котором $AC < BC$; пусть M — середина отрезка AB. В окружности Ω, описанной около треугольника ABC, проведен диаметр CC'. Прямая CM пересекает прямые AC' и BC' в точках K и L соответственно. Пусть перпендикуляр к прямой AC', проведенный через точку K, перпендикуляр к прямой BC', проведенный через точку L, и прямая AB образуют треугольник Δ. Докажите, что окружность, описанная около треугольника Δ, касается окружности Ω. *(М. Кунгожин)*

Первое решение. Пусть данные перпендикуляры, проходящие через K и L, пересекают AB в точках U и V соответственно и пересекаются в точке E. Заметим сразу, что обе прямые AC и KE перпендикулярны прямой AC', так что $AC \parallel KE$; аналогично, $BC \parallel LE$. Обозначим через ω окружность, описанную около треугольника EUV. Пусть прямая $C'E$ вторично пересекает окружность Ω в точке X (см. рис. 8). Мы докажем, что X — искомая точка касания окружностей ω и Ω.

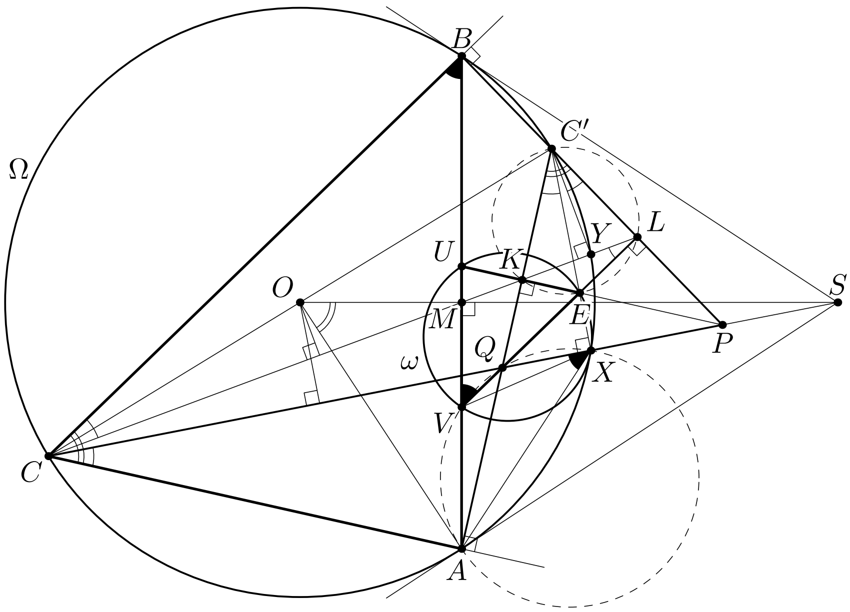


Рис. 8

Поскольку $\angle C'KE = \angle C'LE = 90^\circ$, четырёхугольник $C'KEL$ вписан. Отсюда имеем $\angle ACX = \angle AC'X = \angle KLE = \angle LCB$, то есть $\angle ACX = \angle MCB$ и $\angle BCX = \angle MCA$. Это значит, что прямая CX — *симедиана* треугольника ABC; как известно, она проходит через точку S пересечения касательных к Ω в точках A и B.

Пусть O — центр Ω; обозначим $\gamma = \angle ACB$. Пусть CM вторично пересекает Ω в точке Y. Так как AM — высота в прямоугольном треугольнике OAS, имеем $OM \cdot OS = OA^2 = OC^2$; это значит, что треугольники OMC и OCS подобны. Значит, отношение их высот, опущенных из O, равно $\frac{OM}{OC} = \frac{OM}{OA} = \cos\gamma$. Эти высоты являются средними линиями в прямоугольных треугольниках CYC' и CXC', так что $\frac{C'Y}{C'X} = \cos\gamma$.

Пусть прямые AC' и BC' пересекают CX в точках Q и P соответственно. Заметим, что $\angle PC'Q = \angle ACB = \gamma$. Кроме того, $\angle YC'L = \angle YCB = \angle QC'X$, так что прямоугольные треугольники $YC'L$ и $XC'Q$ подобны. Значит, $\frac{C'L}{C'Q} = \frac{C'Y}{C'X} = \cos\gamma = \cos\angle PC'Q$. Отсюда следует, что QL — высота треугольника PCQ. Итак, точки L, E, Q и V лежат на одной прямой.

Поскольку $\angle QVB = \angle VBC = \angle AXC$, четырехугольник $AVQX$ вписан в некоторую окружность. Поскольку $\angle EKQ = \angle EXQ = 90^\circ$, точки X, E, K и Q также лежат на одной окружности. Из этих двух окружностей получаем $\angle UEX = \angle KEX = \angle AQX = \angle AVX$, то есть точки U, V, E и X лежат на одной окружности ω. Кроме того, $\angle EVX = \angle QAX = \angle C'AX$. Это означает, что градусные меры дуг $C'X$ и EX окружностей Ω и ω равны. Значит, касательные к этим окружностям, проведенные в точке X, совпадают. Тем самым, окружности Ω и ω касаются.

Замечание 1. Догадаться до того, что окружности ω и Ω должны касаться именно в точке X, не очень сложно. Если эти окружности касаются, то точка касания является центром гомотетии, переводящей ω в Ω. Эта гомотетия должна переводить треугольник EUV в треугольник $A'B'C'$, симметричный ABC относительно O; значит, точка касания должна лежать на $C'E$.

Замечание 2. Есть несколько других способов показать, что прямые CX, AC' и EL пересекаются в одной точке (Q) — к примеру, с использованием понятия гармоничности. Напомним, что четвёрка точек (A, B, C, D), лежащих на одной прямой или одной окружности, называется *гармонической*, если $\frac{AB}{AD} \cdot \frac{CD}{CB} = 1$; четвёрка прямых, проходящих через одну точку, *гармоническая*, если четвёрка точек, высекаемая ими на прямой, такова.

Поскольку X — точка пересечения симедианы с описанной окружностью, как известно, четвёрка (C, A, X, B) гармоническая (это следует из подобий $\triangle ACX \sim \triangle MCB$ и $\triangle BCX \sim \triangle MCA$). Значит, четвёрка прямых $C'C$, $C'A$, $C'X$ и $C'B$ — гармоническая. Обозначим $P' = KE \cap C'L$ и $Q' = LE \cap C'K$. Тогда в треугольнике $Q'C'P'$ прямые $Q'L$ и $P'K$ являются высотами, а E — ортоцентр, значит, $C'E \perp Q'P'$ (то есть $Q'P' \parallel CX$). Если $Q'P' \cap KL = \widetilde{C}$, то четверка прямых $C'\widetilde{C}$, $C'Q' = C'A$, $C'E = C'X$ и $C'P' = C'B$ гармоническая. Значит, прямые $C'C$ и $C'\widetilde{C}$ совпадают, откуда $C = \widetilde{C}$. Поскольку $P'Q' \parallel CX$, отсюда следует, что P' и Q' лежат на CX.

Второе решение. Введём точки E, U, V и X, как и в прошлом решении. Обозначим через A_1, B_1 и C_1 точки пересечения прямой $C'E$ с прямыми BC, CA и AB соответственно. Как и выше, равенство $\angle ACX = \angle AC'X = \angle KLE = \angle LCB$ означает, что $\angle ACX = \angle KCB$; с другой стороны, из равенства $\angle KC'E = \angle KCA_1$ следует также, что точки C, C', K и A_1 лежат на одной окружности (см. рис. 9). Отсюда $\angle C'KA_1 = \angle C'CB = \angle C'AB$, то есть $KA_1 \parallel AB$.

Обозначим через N точку пересечения прямых KA_1 и AC. Поскольку $AB \parallel A_1K$ и прямая CM делит AB пополам, она делит пополам и A_1N, то есть $KN = KA_1$. Так как $KE \parallel AB_1$, KE — средняя линия в треугольнике A_1NB_1, то есть $B_1E = EA_1$.

Пусть X' — точка на Ω, диаметрально противоположная X. Пусть прямые $X'A$ и $X'B$ пересекают прямую $C'E$ в точках S и T соответственно. Тогда $\angle SX'T = \angle ACB$ и $\angle X'ST = 90^\circ - \angle SX'C' = 90^\circ - \angle ABC' = \angle ABC$, то есть треугольники ABC и TSX' подобны. Более того, поскольку $\angle SX'X = \angle ACX = \angle BCM$, точки M и X в этих треугольниках соответственны, то есть $SX = XT$.

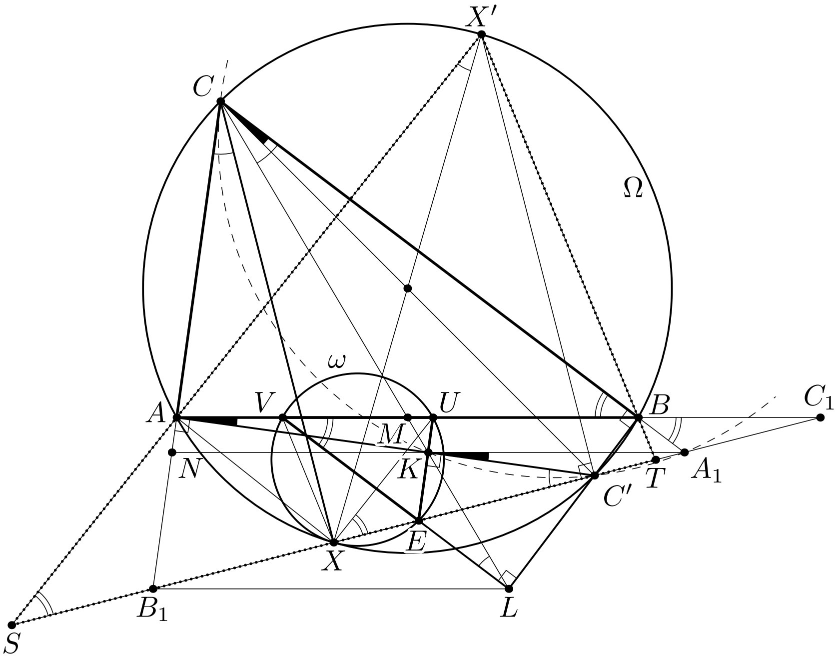


Рис. 9

Из равенства $\angle AST = \angle ABC = \angle C_1BA_1$ следует, что точки S, A, B и A_1 лежат на одной окружности, откуда $C_1A \cdot C_1B = C_1S \cdot C_1A_1$. Аналогично, $C_1A \cdot C_1B = C_1T \cdot C_1B_1$, поэтому $C_1S \cdot C_1A_1 = C_1T \cdot C_1B_1$, или $\frac{C_1S}{C_1B_1} = \frac{C_1T}{C_1A_1}$. Это значит, что отрезки A_1B_1 и TS гомотетичны с центром в C_1; эта гомотетия переводит середину E отрезка A_1B_1 в середину X отрезка ST. Значит, $\frac{C_1S}{C_1B_1} = \frac{C_1X}{C_1E}$, или $\frac{C_1S}{C_1X} = \frac{C_1B_1}{C_1E}$. В силу параллельности $AB_1 \parallel UE$, получаем $\frac{C_1A}{C_1U} = \frac{C_1B_1}{C_1E} = \frac{C_1S}{C_1X}$, что означает, что $UX \parallel AS$. Отсюда получаем $\angle UXE = \angle ASX = \angle ABC = \angle EVU$, то есть точки U, V, E и X лежат на одной окружности ω

Наконец, рассмотрим треугольники ABC и UVE; их соответственные стороны параллельны, так что они гомотетичны (с отрицательным коэффициентом). При этой гомотетии прямая CX' переходит в EX (поскольку $C'X \parallel CX'$), окружность Ω переходит в окружность ω, а значит, X' переходит в X. Поэтому касательная к ω в X параллельна касательной к Ω в X', а значит — и касательной к Ω в X. Отсюда следует, что ω и Ω касаются в X.

11 класс

11.1. В Национальной Баскетбольной Ассоциации 30 команд, каждая из которых проводит за год 82 матча с другими командами в регулярном чемпионате. Сможет ли руководство Ассоциации разделить команды (не обязательно поровну) на Восточную и Западную конференции и составить расписание игр так, чтобы матчи между командами из разных конференций составляли ровно половину от общего числа матчей?

(*А. Грибалко*)

Решение. См. решение задачи 10.1.

11.2. В пространстве даны три отрезка A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, не лежащие в одной плоскости и пересекающиеся в одной точке P. Обозначим через O_{ijk} центр сферы, проходящей через точки A_i, B_j, C_k и P. Докажите, что прямые $O_{111}O_{222}$, $O_{112}O_{221}$, $O_{121}O_{212}$ и $O_{211}O_{122}$ пересекаются в одной точке. (*П. Кожевников*)

Решение. Для любого отрезка XY *серединным перпендикуляром* к этому отрезку назовём плоскость, перпендикулярную ему и проходящую через его середину, т. е. геометрическое место точек, равноудалённых от X и Y.

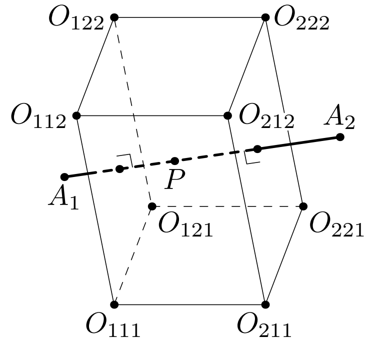


Рис. 10

Все точки вида O_{1jk} лежат в серединном перпендикуляре α_1 к отрезку PA_1. Аналогично, все точки O_{2jk} лежат серединном перпендикуляре α_2 к отрезку PA_2; заметим, что $\alpha_1 \parallel \alpha_2$.

Аналогично введём плоскости β_j — серединные перпендикуляры к отрезкам PB_j, и плоскости γ_k — серединные перпендикуляры к отрезкам PC_k. Тогда точки O_{ijk} — вершины параллелепипеда, образованного плоскостями α_i, β_j и γ_k. Теперь утверждение задачи следует из того, что диагонали этого параллелепипеда пересекаются в одной точке — его центре симметрии.

11.3. На клетчатый лист бумаги размера 100×100 положили несколько попарно неперекрывающихся картонных равнобедренных прямоугольных треугольничков с катетом 1; каждый треугольничек занимает ровно половину одной из клеток. Оказалось, что каждый единичный отрезок сетки (включая граничные) накрыт ровно одним катетом треугольничка. Найдите наибольшее возможное число клеток, не содержащих ни одного треугольничка. (*Д. Храмцов*)

Ответ. $49 \cdot 50 = 2450$ клеток.

Решение. Положим $n = 50$. Назовём треугольничек *верхним*, если он расположен сверху от прямой, содержащей его горизонтальный катет, и *нижним* иначе. Пронумеруем горизонтальные *линии* сетки снизу вверх числами от 0 до $2n$.

Обозначим через u_k (соответственно d_k) число отрезочков k-й линии, участвующих в верхних (соответственно нижних) треугольничках; тогда $u_k + d_k = 2n$ и $u_0 = d_{2n} = 2n$. Кроме того, вертикальные отрезки сетки, расположенные между k-й и $(k+1)$-й линиями, участвуют ровно в $u_k + d_{k+1}$ треугольничках, так что $u_k + d_{k+1} = 2n + 1$. Отсюда несложно получить, что $d_k = k$ и $u_k = 2n - k$ при всех k.

Рассмотрим теперь клетки, расположенные между k-й и $(k+1)$-й линиями сетки. Хотя бы $u_k = 2n - k$ из этих клеток содержат по верхнему треугольнику, и хотя бы $d_{k+1} = k + 1$ из них содержат по нижнему. Значит, свободных клеток в этом ряду не больше, чем $2n - \max(u_k, d_{k+1})$, то есть не больше k при $k < n$ и не больше $(2n - 1) - k$ при $k \geqslant n$. Итого, общее число свободных клеток не больше, чем $2(0 + 1 + \ldots + (n - 1)) = n(n - 1)$.

Осталось привести пример, на котором эта оценка достигается. На рис. 11 показан пример при $n = 4$. Пример при $n = 50$ строится аналогично: выделяется «прямоугольник» из клеток со сторонами из $n + 1$ и n клеток, параллельными диагоналям доски, его клетки красятся в шахматном порядке (так, что угловые клетки прямоугольника — чёрные), и во все чёрные клетки кладётся по два треугольничка (при этом $n(n - 1)$ белых клеток остаются свободными); в оставшихся же четырёх «углах» доски треугольнички кладутся так, что прямой угол треугольника «направлен» в ту же сторону, что и весь «угол».

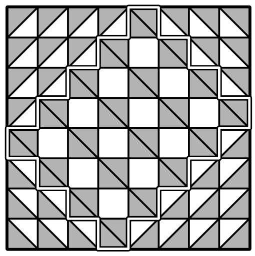


Рис. 11

11.4. В координатном пространстве провели все плоскости с уравнениями $x \pm y \pm z = n$ (при всех целых n). Они разбили пространство на тетраэдры и октаэдры. Пусть точка (x_0, y_0, z_0) с рациональными координатами не лежит ни в одной проведённой плоскости. Докажите, что найдётся натуральное k, при котором точка (kx_0, ky_0, kz_0) лежит строго внутри некоторого октаэдра разбиения. *(А. Глазырин)*

Решение. Лемма. *Пусть рациональные числа a, b, c и $a + b + c$ — нецелые. Тогда существует такое натуральное k, что числа ka, kb и kc нецелые, причём* $1 < \{ka\} + \{kb\} + \{kc\} < 2$.

Доказательство. Заменяя числа a, b и c на их дробные части, можно считать, что они лежат в интервале $(0, 1)$. Обозначим $f(t) = \{ta\} + \{tb\} + \{tc\}$. Заметим, что при $1 < a + b + c < 2$ можно положить $k = 1$.

Пусть $a + b + c < 1$. Выберем такое натуральное m, что ma, mb и mc — целые. Тогда $f(m - 1) = f(-1) = 3 - (a + b + c) > 2$. Значит, существует наименьшее натуральное k, при котором $f(k) > 1$ (тогда $f(k - 1) \leqslant 1$). Покажем, что это k удовлетворяет всем требованиям.

Из неравенства $\{ka\} \leqslant \{(k - 1)a\} + a$ и аналогичных, получаем

$$f(k) \leqslant f(k-1) + (a + b + c) < f(k-1) + 1 < 2. \qquad (*)$$

Значит, осталось показать, что числа ka, kb и kc нецелые. Предположим, что, скажем, ka — целое. Тогда $\{ka\} = \{(k-1)a\} + a - 1$, поэтому оценку $(*)$ можно усилить как $f(k) \leqslant f(k-1) + (a + b + c) - 1 < f(k-1) \leqslant 1$; но это противоречит выбору k. Итак, в случае $a + b + c < 1$ требуемое k найдено.

Наконец, если $a + b + c > 2$, достаточно применить уже доказанное утверждение к числам $a' = 1 - a$, $b' = 1 - b$ и $c' = 1 - c$. Ясно, что число k, подходящее для этих чисел, подойдёт и для исходных. $\square$

Перейдём к решению задачи. Вдобавок к данному координатному пространству $Oxyz$ введём *новое пространство $Oabc$*. Точке (x, y, z) из старого пространства сопоставим точку (a, b, c) из нового с координатами $a = y + z - x$, $b = x - y + z$, $c = x + y - z$; тогда $x = \dfrac{b+c}{2}$, $y = \dfrac{a+c}{2}$, $z = \dfrac{a+b}{2}$. Заметим, что $x + y + z = a + b + c$. Тогда разбиение старого пространства соответствует разбиению нового плоскостями вида $a = n$, $b = n$, $c = n$ и $a+b+c = n$. Положим $a_0 = y_0 + z_0 - x_0$, $b_0 = x_0 - y_0 + z_0$, $c_0 = x_0 + y_0 - z_0$; по условию, числа a_0, b_0, c_0 и $a_0 + b_0 + c_0$ — нецелые.

Рассмотрим некоторую точку (u, v, w) *нового* пространства с нецелыми координатами. Она попадает в некоторый куб вида $A \leqslant a \leqslant A+1$, $B \leqslant b \leqslant B+1$, $C \leqslant c \leqslant C+1$. Этот куб пересекают две «наклонных» плоскости $a+b+c = A+B+C+1$ и $a+b+c = A+B+C+2$, которые разбивают его на два тетраэдра и (неправильный) октаэдр. При этом точка (u, v, w) попадёт внутрь октаэдра, если она окажется в полосе между указанными плоскостями, т. е. если $1 < \{u\} + \{v\} + \{w\} < 2$. Значит, применив лемму к числам a_0, b_0, c_0, мы найдём значение k, удовлетворяющее требованиям задачи.

11.5. Пусть n — натуральное число. На $2n+1$ карточках написано по ненулевому целому числу; сумма всех чисел также ненулевая. Требуется этими карточками заменить звёздочки в выражении $*x^{2n} + *x^{2n-1} + \ldots + *x + *$ так, чтобы полученный многочлен не имел *целых* корней. Обязательно ли это можно сделать? (*И. Богданов*)

Ответ. Да, обязательно.

Решение. Пусть $p_0, p_1, \ldots, p_{2n}$ — числа на карточках, причём p_{2n} — наибольшее по модулю из них. Поставим p_i коэффициентом при x^i. Тогда, если a — целое число, по модулю не меньшее двойки, то

$$\begin{aligned}|p_{2n}a^{2n}| > |p_{2n}|(|a^{2n-1}| + |a^{2n-2}| + \ldots + 1) \geqslant \\ \geqslant |p_{2n-1}a^{2n-1}| + |p_{2n-2}a^{2n-2}| + \ldots + |p_0| \geqslant \\ \geqslant |p_{2n-1}a^{2n-1} + p_{2n-2}a^{2n-2} + \ldots + p_0|,\end{aligned}$$

так что a — не корень полученного многочлена.

Осталось переставить коэффициенты p_{2n-1}, p_{2n-2}, $\ldots$, p_0 так, чтобы числа 0 и ± 1 также не были корнями. Числа 0 и 1 в любом случае корнями не являются, поскольку $p_0 \neq 0 \neq p_{2n} + p_{2n-1} + \ldots + p_0$ по условию. Предположим, что $x_0 = -1$ является корнем многочлена при любой перестановке коэффициентов p_{2n-1}, p_{2n-2}, $\ldots$, p_0. Тогда, если поменять местами p_i и p_{i-1} (при $i = 1, 2, \ldots, 2n-1$), значение многочлена в x_0 не изменится, что возможно лишь при $p_i = p_{i-1}$. Но тогда наш многочлен имеет вид $p_{2n}x^{2n} + p_0(x^{2n-1} + x^{2n-2} + \ldots + 1)$, и его значение в точке $x_0 = -1$ равно $p_{2n} \neq 0$. Противоречие.

11.6. В стране есть $n > 1$ городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиарейсами. При этом между любыми двумя городами существует единственный авиамаршрут (возможно, с пересадками). Мэр каждого города X подсчитал количество таких нумераций всех городов числами от 1 до n, что на любом авиамаршруте, начинающемся в X, номера городов идут в порядке возрастания. Все мэры, кроме одного, заметили, что их результаты подсчётов делятся на 2016. Докажите, что и у оставшегося мэра результат также делится на 2016. (*Ф. Петров*)

Решение. Назовём какой-нибудь город A *столицей*. Назовём город *чётным*, если маршрут из A до него содержит чётное число рейсов, и *нечётным* иначе (таким образом, город A чётный). Тогда чётность любых двух городов, соединённых рейсом, различна. Мы докажем, что сумма чисел, полученных мэрами чётных городов, равна сумме чисел, полученных мэрами нечётных; из этого следует утверждение задачи.

Назовём нумерацию городов *подходящей* для города X, если мэр города X её посчитал. Ясно, что в любой нумерации, подходящей городу X, он имеет номер 1, так что каждая нумерация подходит не более, чем одному городу.

Рассмотрим любую нумерацию, подходящую чётному городу E. Пусть номер 2 в ней носит город W; тогда W — нечётный город, соединённый с E, иначе на маршруте от E до W встретился бы город с бóльшим номером. Поменяем местами номера 1 и 2; мы получим нумерацию, в которой номер 1 носит нечётный город W.

Рассмотрим любой маршрут m, начинающийся в W. Он получается из некоторого маршрута, выходящего из E, либо добавлением города W в начало (если m проходит через E), либо откидыванием E из начала (в противном случае). Тогда легко видеть, что после обмена 1 и 2 номера на m идут в порядке возрастания.

Итак, после перемены номеров 1 и 2 из нумерации, подходящей для чётного города, получается нумерация, подходящую для нечётного (и наоборот). Это сопоставление взаимно однозначно. Значит, тех и других нумераций поровну, что и требовалось доказать.

11.7. Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3} \leqslant \frac{1}{a^3b^3c^3d^3}.$$

(*А. Храбров*)

Решение. Домножим доказываемое неравенство на $a^3b^3c^3d^3$, получим

$$a^3b^3c^3+a^3b^3d^3+a^3c^3d^3+b^3c^3d^3 \leqslant 1. \qquad (*)$$

Поскольку неравенство симметричное, можно считать, что $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$. По неравенству о средних для чисел a, b и $(c+d)$ имеем

$$ab(c+d) \leqslant \Big(\frac{a+b+(c+d)}{3}\Big)^3 = 1.$$

Следовательно, $a^3b^3(c+d)^3 \leqslant 1$.

Значит, для доказательства $(*)$ достаточно показать, что

$$a^3b^3c^3+a^3b^3d^3+a^3c^3d^3+b^3c^3d^3 \leqslant a^3b^3(c+d)^3.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных останется неравенство

$$a^3c^3d^3+b^3c^3d^3 \leqslant 3a^3b^3c^2d+3a^3b^3cd^2,$$

которое является суммой трех очевидных неравенств $a^3c^3d^3 \leqslant a^3b^3c^2d$, $b^3c^3d^3 \leqslant a^3b^3cd^2$ и $0 \leqslant 2a^3b^3c^2d+2a^3b^3cd^2$.

Замечание. Если допустить неотрицательные значения переменных, то в неравенстве $(*)$ равенство достигается лишь тогда, когда три числа равны 1 и одно равно 0.

11.8. В треугольнике ABC медианы AM_A, BM_B и CM_C пересекаются в точке M. Построим окружность Ω_A, проходящую через середину отрезка AM и касающуюся отрезка BC в точке M_A. Аналогично строятся окружности Ω_B и Ω_C. Докажите, что окружности Ω_A, Ω_B и Ω_C имеют общую точку. (*А. Якубов*)

Решение. Лемма. *Пусть на сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1 так, что сумма их углов при вершинах A_1, B_1 и C_1 кратна $180°$. Тогда окружности, описанные около треугольников A_1BC, AB_1C и ABC_1, пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Пусть окружности, описанные около треугольников A_1BC и ABC_1, вторично пересекаются в точке X (см. рис. 12). Тогда $\angle(BX, XC) = \angle(BA_1, A_1C)$ и $\angle(AX, XB) = \angle(AC_1, C_1B)$, откуда

$$\angle(AX, XC) = \angle(AX, XB) + \angle(BX, XC) = \\ = \angle(AC_1, C_1B) + \angle(BA_1, A_1C) = \angle(AB_1, B_1C).$$

Это означает, что X лежит на окружности, описанной около треугольника AB_1C, что и требовалось. □

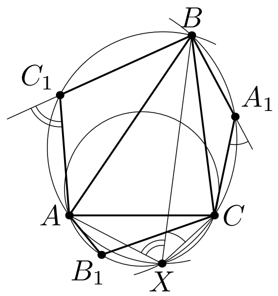


Рис. 12

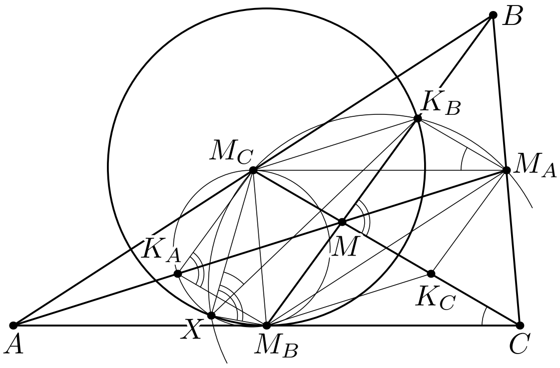


Рис. 13

Перейдём к решению задачи. Пусть K_A, K_B и K_C — середины отрезков AM, BM и CM соответственно (см. рис. 13). Тогда $M_CK_B \parallel AM$ и $K_BM_A \parallel MC$, как средние линии в треугольниках ABM и CBM соответственно; значит, $\angle M_CK_BM_A = \angle AMC$. Аналогично, $\angle M_CK_AM_B = \angle BMC$ и $\angle M_AK_CM_B = \angle BMA$; значит, $\angle M_CK_AM_B + \angle M_BK_CM_A + \angle M_AK_BM_C = 360°$.

Согласно лемме, окружности, описанные около треугольников $M_CK_AM_B$, $M_BK_CM_A$ и $M_AK_BM_C$, имеют общую точку X. Из этих окружностей имеем

$$\angle(K_BX, XM_B) = \angle(K_BX, XM_C) + \angle(M_CX, XM_B) = \\ = \angle(K_BM_A, M_AM_C) + \angle(M_CK_A, K_AM_B) = \\ = \angle(MC, CA) + \angle(BM, MC) = \angle(BM, CA) = \angle(K_BM_B, AC).$$

Это равенство означает, что окружность Ω_B проходит через точку X. Аналогично, через X проходят окружности Ω_A и Ω_C.