

ЦРИ МатРИЦА «Простая математика»
Математика профиль 18.2. задание ЕГЭ
Исследование квадратного трехчлена
с помощью дискриминанта

Квадратным трехчленом называется выражение вида $f(x)=ax^2+bx+c$, где $a\neq 0$.
Дискриминантом квадратного трехчлена называется число $D=b^2-4ac$.
Если $D>0$, то квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два различных решения.
Если $D=0$ – одно решение (два совпадающих корня).
Если $D<0$, то уравнение решений не имеет на множестве действительных чисел ($x\in\mathbb{R}$).

Корни квадратного уравнения находятся по формуле $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Если b -четное число, то эта формула имеет вид:

$$x_{1,2}=\frac{-b/2\pm\sqrt{D}/4}{a}, \text{ где } D/4=(b/2)^2-ac.$$

Несколько утверждений, касающихся неравенств вида $f(x)>0$, $f(x)\geq 0$, $f(x)<0$, $f(x)\leq 0$, где $f(x)$ – квадратный трехчлен. Для определенности будем считать, что ветви параболы направлены вверх, то есть $a>0$ (в противном случае всегда можно умножить обе части неравенства на (-1)). Поэтому квадратный член будем далее записывать в виде $f(x)=x^2+px+q$.

Теорема 1. Неравенство $x^2+px+q>0$ выполнено при всех значениях переменной $x\in\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $D=p^2-4q<0$.

Теорема 2. Неравенство $x^2+px+q\geq 0$ выполнено при всех значениях переменной $x\in\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $D\leq 0$.

Теорема 3. Неравенство $x^2+px+q<0$ выполнено при всех значениях переменной $x\in\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $D>0$.

Теорема 4. Неравенство $x^2+px+q\leq 0$ выполнено при всех значениях переменной $x\in\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $D\geq 0$.

Пример 1. При каких значениях параметра a уравнение $(3a-1)x^2+2ax+3a-2=0$ имеет два различных действительных корня?

Пример 2. При каких значениях a система

$$\begin{cases} 2ax+2x-2y+3=0, \\ x+2y+xy+1=0 \end{cases} \text{ имеет единственное решение?}$$

Пример 3. Найти наибольшее из значений z , для которых существует числа x, y , удовлетворяющие уравнению $2x^2+2y^2+z^2+xy+xz+yz=4$.

Пример 4. Найти все действительные значения c , для которых все числа из области значений функции

$$f(x) = \frac{x^2 + cx - 1}{2x^2 - 3x + 2} \text{ принадлежит интервалу } (-1, 2).$$

Пример 5. Найти все значения параметра p , при каждом из которых множество значений функции

$$f(x) = \frac{3x + p}{x^2 + 5x + 7} \text{ содержит полуинтервал } (-1, 3]. \text{ Определить при каждом таком } p$$

множество значений функции $f(x)$.

Пример 6. Найти все значения параметра a , при каждом из которых для любого значения b система

$$\begin{cases} bx - y - az^2 = 0, \\ (b-6)x + 2by - 4z - 4 = 0 \end{cases} \text{ имеет по крайней мере одно решение } (x, y, z).$$

Пример 7. Найти все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства $6x^2 + 4a^2 + 6ax - 3x - 24a + 35 < 0$ содержит хотя бы одно целое число.