

ЦРИ МатРИЦА «Простая математика»
Математика профиль 18.3. задание ЕГЭ
Исследование уравнений (неравенств) с параметром
по расположению корней квадратного трехчлена

Возможно исследование расположения корней квадратного трехчлена без нахождения самих корней.

Продолжаем считать, что ветви параболы направлены вверх и квадратичная функция записывается как $f(x)=x^2+px+q$. В противном случае всегда можно умножить обе части уравнения или неравенства на (-1).

Координаты вершины параболы (x_0, y_0) находятся по формулам $x_0 = -\frac{p}{2}$, $y_0 = f(x_0)$.

Теорема 1. Квадратный трехчлен $f(x)=x^2+px+q$ имеет два корня (возможно совпадающих), и оба корня **больше** некоторого числа **a** тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_1 > a, \\ x_2 > a; \end{cases} \quad \gg \quad \begin{cases} D \geq 0, \\ x_0 > a, \\ f(a) > 0, \end{cases} \quad \text{где } D \text{ - дискриминант, а } x_0 \text{ - абсцисса вершины параболы.}$$

Теорема 2. Квадратный трехчлен $f(x)=x^2+px+q$ имеет два корня (возможно совпадающих), и оба корня **меньше** некоторого числа **a** тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_1 < a, \\ x_2 < a; \end{cases} \quad \gg \quad \begin{cases} D \geq 0, \\ x_0 < a, \\ f(a) > 0. \end{cases}$$

Теорема 3. Квадратный трехчлен $f(x)=x^2+px+q$ имеет два **различных** корня, и число **a** расположено строго между его корнями тогда и только тогда, когда $f(a) < 0$.

Пример 1. Найти все значения **a**, для каждого из которых система неравенств:

$$\begin{cases} -x^2 + 12x - a \geq 0, \\ x \leq 2 \end{cases}$$

выполняется хотя бы при одном значении **x**.

Пример 2. Найти все значения параметра **a**, при которых неравенство $9^x < 20 \cdot 3^x + a$ не имеет ни одного целочисленного корня.

Пример 3. Найти все значения **a**, при каждом из которых среди корней уравнения $ax^2 + (a+4)x + a + 1 = 0$ имеется ровно один отрицательный.

Пример 4. Найти все значения **a**, для которых неравенство $ax^2 + 1 > 4x - 3a$ выполняется для всех **x** из интервала $(-1, 0)$.

Пример 5. Найдите все значения **a**, при каждом из которых ровно одно решение неравенства $x^2 + (-3a+1)x + 2a^2 \leq 2$ удовлетворяет неравенству $ax(x-5+a) \geq 0$.

Пример 6. Найти все значения a , для которых при каждом x из промежутка $[-2, -1)$ значение выражения x^4-5 не равно значению выражения $(3a+2)x^2$.

Пример 7. При каких значениях a строго между двумя корнями уравнения $ax^2+2x+2a^2=0$ находится ровно один корень уравнения $ax^2+2x-2a^2=0$ и строго между двумя корнями второго уравнения находится ровно один корень первого уравнения?

Пример 8. Найти все значения a , при каждом из которых все решения неравенства $x^2-(4a+4)x+3a^2+12a \leq 0$ удовлетворяют неравенству $x(x+a+1) \geq 0$.