

1 Необходимая теория:

- 1.1 Числовые множества
- 1.2 Делимость
- 1.3 Чётность
- 1.4 Деление с остатком
- 1.5 Каноническое разложение
- 1.6 Взаимно простые числа
- 1.7 Последовательности
- 1.8 Арифметическая прогрессия
- 1.9 Геометрическая прогрессия
- 1.10 Метод «оценка плюс пример»

2. Задачи

1.1 Числовые множества

В данном разделе мы определим числовые множества, необходимые для задачи 19. Введённую терминологию нужно твёрдо знать!

Натуральные числа — это числа 1, 2, 3, . . . Натуральные числа мы используем для счёта, а счёт начинается с единицы. Множество натуральных чисел обозначается N .

Целые числа — это числа 0, ± 1 , ± 2 , ± 3 , . . . Таким образом, целые числа — это нуль и «плюс-минус натуральные». Натуральные числа являются целыми положительными числами. Множество целых чисел обозначается Z .

Рациональные числа — это всевозможные дроби $\frac{m}{n}$ с целыми m и n (при этом, конечно, $n \neq 0$; чтобы избежать данной оговорки, говорят также, что m — целое, а n — натуральное). Любое целое число является в то же время рациональным (например, $3 = \frac{6}{2}$). Однако число $\frac{1}{2}$ не является целым. Множество рациональных чисел обозначается Q .

1.2 Делимость

Определение. Число a делится на $b \neq 0$, если найдётся число c такое, что $a = bc$.

Если a делится на b , то число b называется делителем числа a . Например, число 12 имеет шесть делителей: это 1, 2, 3, 4, 6 и 12.

Упражнение. Докажите, что если числа a и b делятся на c , то $a + b$ делится на c .

Т.к. $a : c \Rightarrow a = c \cdot p$; $b : c \Rightarrow b = c \cdot q$. Значит, $a + b = c \cdot p + c \cdot q = c \cdot (p + q) \Rightarrow (a + b) : c$.

Сформулируем наиболее важные признаки делимости:

- a делится на 2 $\Leftrightarrow$ последняя цифра числа a чётная;
- a делится на 3 $\Leftrightarrow$ сумма цифр числа a делится на 3;
- a делится на 4 $\Leftrightarrow$ последние две цифры числа a составляют число, которое делится на 4;
- a делится на 5 $\Leftrightarrow$ последняя цифра числа a есть 0 или 5;
- a делится на 6 $\Leftrightarrow$ число a делится и на 2, и на 3;
- a делится на 7 $\Leftrightarrow$ результат вычитания удвоенной последней цифры из числа a без последней цифры делится на 7 (напр., 343 делится на 7, т.к. $34 - 3 \cdot 2 = 28$ делится на 7);
- a делится на 8 $\Leftrightarrow$ последние три цифры числа a составляют число, которое делится на 8;
- a делится на 9 $\Leftrightarrow$ сумма цифр числа a делится на 9;
- a делится на 10 $\Leftrightarrow$ последняя цифра числа a равна 0;
- a делится на 11 $\Leftrightarrow$ сумма цифр в записи числа a , стоящих на чётных местах равна сумме цифр, стоящих на нечётных местах, или отличается от неё на 11 (напр., 2673 делится на 11, т.к. $2+7=6+3$; 1529 делится на 11, т.к. $1+2=3$, $5+9=14$, $14-3=11$);
- a делится на 13 $\Leftrightarrow$ число его десятков, сложенное с учетверённым числом единиц этого числа делится на 13 (напр., 533 делится на 13, т.к. $53 + 3 \cdot 4 = 65$ делится на 13).
- a делится на 17 $\Leftrightarrow$ если разность этого числа без его последней цифры и его последней цифры, умноженной на 5, делится на 17 (напр., 1564 делится на 17, т.к. $156 - 4 \cdot 5 = 136$; $13 - 6 \cdot 5 = -17$ делится на 17);
- a делится на 19 $\Leftrightarrow$ если сумма этого числа без его последней цифры и его последней цифры, умноженной на 2, делится на 19 (напр., 1653 делится на 19, т.к. $165 + 3 \cdot 2 = 171$; $17 + 1 \cdot 2 = 19$ делится на 19).

1.3 Чётность

Соображения, связанные с чётностью или нечётностью, часто фигурируют в задачах 19. Поэтому необходимые факты имеет смысл отметить особо. Определение. Число называется чётным, если оно делится на 2. Число называется нечётным, если оно не делится на 2.

Вот все чётные числа: $0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$. Если a чётно, то оно имеет вид $a = 2n$. А вот все нечётные числа: $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$. Ясно, что если a нечётно, то оно имеет вид $a = 2n + 1$.

Следующие утверждения весьма очевидны, и вы можете использовать их при решении задачи 19 (никто от вас не потребует их доказательства). Но вы можете доказать их в качестве упражнения.

- Сумма любого числа чётных слагаемых чётна.
- Сумма чётного числа нечётных слагаемых чётна. Сумма нечётного числа нечётных слагаемых нечётна.

• Пусть имеется произведение нескольких множителей. Если все множители нечётны, то произведение нечётно. Если хотя бы один множитель чётный, то произведение чётно.

1.4 Деление с остатком

Число 13 не делится на 5. Наибольшее число, которое делится на 5 и не превосходит 13, равно $10 = 5 \cdot 2$. Таким образом, $13 = 5 \cdot 2 + 3$, и мы скажем, что в результате деления 13 на 5 получается частное 2 и остаток 3. Оказывается, любое число a можно разделить с остатком на любое число $b \neq 0$. А именно, найдутся два числа q и r такие, что $a = bq + r$, и при этом будет выполнено неравенство $0 \leq r < |b|$. Число q называется частным, а число r - остатком от деления a на b .

Если $r = 0$, то есть $a = bq$, то a делится на b .

1.5 Каноническое разложение

Всякое число делится на 1 и на само себя. Если натуральное число p не равно 1 и не имеет других натуральных делителей, кроме 1 и p , то такое число p называется простым.

Вот первые несколько простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Число 2 — единственное чётное простое число.

Число, не равное 1 и не являющееся простым, называется составным. Например, 15 — составное число (оно делится на 3). Число 1036 — тоже составное (оно чётное). Единица не является ни простым числом, ни составным.

Упражнение. Число $3^{15} - 1$ является составным. Почему?

Оказывается, всякое число можно разложить на простые множители.

Например: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$;

$504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$.

1.6 Взаимно простые числа

Числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих делителей кроме 1. Иными словами, числа a и b взаимно простые, если $\text{НОД}(a, b) = 1$. Можно сказать и так: числа a и b взаимно простые тогда и только тогда, когда дробь $\frac{a}{b}$ несократима.

Например, числа 8 и 15 взаимно простые. Числа 9 и 15 не являются взаимно простыми — у них имеется общий делитель 3. Числа взаимно простые тогда и только тогда, когда их канонические разложения состоят из непересекающихся наборов простых чисел. Например, числа $2^3 \cdot 5 \cdot 13^2$ и $3^2 \cdot 7^3 \cdot 11$ являются взаимно простыми.

Свойства взаимно простых чисел. Пусть числа a и b взаимно просты. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если некоторое число делится на a и b , то оно делится и на их произведение ab .

2. Если an делится на b , то n делится на b . (Вы легко поймёте, почему так получается, если представите себе «непересекающиеся» канонические разложения чисел a и b и вдобавок вспомните, что каноническое разложение делителя служит «частью» канонического разложения делимого числа).

Согласно утверждению 1, например, если некоторое число делится на 8 и на 15, то оно делится на $8 \cdot 15 = 120$. То, что числа взаимно простые, — важное условие. Так, 12 делится на 4 и на 6, но не делится на $4 \cdot 6 = 24$.

1.7 Последовательности

Что такое последовательность? Представьте себе устройство, которое с некоторыми интервалами выдаёт одно число за другим. Например: 2, -3, 15, 28, -6, 0, 3, . . . Набор чисел на выходе этого устройства и будет последовательностью. Более строго, последовательность чисел, или числовая последовательность — это набор чисел, в котором каждому числу можно присвоить некоторый номер, причём каждому номеру отвечает единственное число данного набора.

1.8 Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия — это последовательность, каждый член которой (начиная со второго) равен сумме предыдущего члена и некоторого фиксированного числа:

$$a_{n+1} = a_n + d \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Фиксированное число d называется разностью арифметической прогрессии.

Например, последовательность 2, 5, 8, 11, . . . является арифметической прогрессией с первым членом 2 и разностью 3.

Нетрудно получить формулу n -го члена арифметической прогрессии. Пишем:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d, \\ a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d, \\ a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d, \end{aligned}$$

и становится ясно, что формула для a_n имеет вид:

$$a_n = a_1 + d(n - 1).$$

Упражнение. Сколько имеется трёхзначных чисел, делящихся на 13?

Нужно знать формулу суммы $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ первых n членов арифметической прогрессии. Она имеет вид:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n.$$

Полезная модификация этой формулы получается, если в неё подставить формулу n -го члена:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Свойство арифметической прогрессии. Если числа a , b , c образуют арифметическую прогрессию, то $2b = a + c$.

1.9 Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия — это последовательность, каждый член которой (начиная со второго) равен произведению предыдущего члена и некоторого фиксированного числа:

$$b_{n+1} = b_n q \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Фиксированное число q называется знаменателем геометрической прогрессии.

Например, последовательность 2, 6, 18, 54, . . . является геометрической прогрессией с первым членом 2 и знаменателем 3. Получим формулу n -го члена геометрической прогрессии. Пишем:

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 q, \\ b_3 &= b_2 q = (b_1 q) q = b_1 q^2, \\ b_4 &= b_3 q = (b_1 q^2) q = b_1 q^3, \end{aligned}$$

и в результате имеем:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Для суммы $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ первых n членов геометрической прогрессии нужно знать следующую формулу:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Свойство геометрической прогрессии. Пусть числа a , b , c образуют геометрическую прогрессию. Тогда $b^2 = ac$.

Представление конечной целочисленной геометрической прогрессии.

- Геометрическая прогрессия из трёх целых чисел имеет вид:

$$ka^2, kab, kb^2 \quad (k, a, b \text{ — целые}).$$

- Геометрическая прогрессия из четырёх целых чисел имеет вид:

$$ka^3, ka^2b, kab^2, kb^3.$$

- Геометрическая прогрессия из пяти целых чисел имеет вид:

$$ka^4, ka^3b, ka^2b^2, kab^3, kb^4.$$

Вообще, пусть $c_1, c_2, \dots, c_n$ — целые числа, образующие геометрическую прогрессию. Тогда найдутся целые числа k , a , b такие, что

$$c_1 = ka^{n-1}, \quad c_2 = ka^{n-2}b, \quad c_3 = ka^{n-3}b^2, \dots, \quad c_n = kb^{n-1}.$$

1.10 Метод «оценка плюс пример»

«Оценка плюс пример» — это специальное математическое рассуждение, которое применяется в некоторых задачах при нахождении наибольших или наименьших значений.

Суть метода состоит в следующем. Предположим, что мы ищем наименьшее значение некоторой величины A . Действуем в два этапа.

1. *Оценка.* Показываем, что выполнено неравенство $A \geq \alpha$.

2. *Пример.* Предъявляем пример, когда достигается равенство $A = \alpha$. Тем самым доказано, что наименьшее значение A равно α .

Мы проиллюстрируем данный метод на трёх задачах, расположенных по возрастанию сложности.

Задачи:

1. Найти наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

2. Натуральные числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе делится на произведение чисел во второй группе. Какое наименьшее значение может принимать частное от деления первого произведения на второе?

3. Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 13 раз больше, либо в 13 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 6075.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

2 Задачи

Задача 1. Перед каждым из чисел 6, 7, ..., 11 и 9, 10, ..., 17 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю сумму и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Задача 2. На доске написано более 42, но менее 54 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -7 , среднее арифметическое всех положительных из них равно 6, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -12 .

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Задача 3. Набор состоит из 33 натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 5. Среднее арифметическое любых 27 чисел этого набора меньше 2.

- а) Может ли такой набор содержать ровно 13 единиц?
- б) Может ли такой набор содержать менее 13 единиц?
- в) Док-те, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 28.

Задача 4. Бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из различных натуральных чисел, первый член которой меньше 10, не содержит ни одного числа вида $\frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}$. Какое наименьшее значение может принимать сумма первых 10 членов этой прогрессии?

Задача 5. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и

- а) пять;
 - б) четыре;
 - в) три
- из них образуют геометрическую прогрессию?

Задача 6. Все члены геометрической прогрессии — различные натуральные числа, заключённые между числами 210 и 350.

- а) Может ли такая прогрессия состоять из четырёх членов?
- б) Может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

Задача 7. В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний 2046.

- а) Может ли в последовательности быть три члена?
- б) Может ли в последовательности быть четыре члена?
- в) Может ли в последовательности быть меньше 2046 членов?

Задача 8. Дана последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 10, либо в 7 раз. Сумма всех членов последовательности равна 163.

- а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?
- б) Какое наибольшее число членов может быть в этой последовательности?

Задача 9. Каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11 по одному записывают на 10 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, -2, -3,

4, -5, 7, -8, 9, 10, -11. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные 10 сумм перемножают.

- а) Может ли в результате получиться 0?
- б) Может ли в результате получиться 1?
- в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Задача 10. Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{3}{11}$ от общего числа уч-ся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{3}{7}$ от общего числа уч-ся группы, посетивших кино.

- а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
- б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
- в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а) и б)?

Задача 11. Имеется 33 коробки массой 19 кг каждая и 27 коробок массой 49 кг каждая. Все эти коробки раскладываются по двум контейнерам. Пусть S — модуль разности суммарных масс коробок в контейнерах. Найдите наименьшее значение S :

- а) если дополнительно требуется, что в контейнерах должно находиться одинаковое количество коробок;
- б) без дополнительного условия пункта а).

Задача 12. Учитель в школе ставит отметки от 1 до 5. Средний балл ученика равен 4,625.

- а) Какое наименьшее количество оценок может иметь ученик?
- б) Если у ученика заменить оценки 3, 3, 5, 5 на две четвёрки, то на сколько максимально может увеличиться средний балл?

Задача 13. Натуральные числа от 1 до 12 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть по крайней мере два числа. Для каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности полученных сумм и полученные 6 чисел складывают.

- а) Может ли в результате получиться 0?
- б) может ли в результате получиться 1?
- в) Какое наименьшее возможное значение полученного результата?



Задача 14. По окружности расставляют 48 ненулевых целых чисел с общей суммой 20. При этом любые два стоящих рядом числа должны отличаться не более чем на 7 и среди любых четырёх, подряд идущих чисел, должно быть хотя бы одно положительное.

- а) Среди таких 48 чисел найдите наибольшее возможное количество положительных.
- б) Среди таких 48 чисел найдите наименьшее возможное количество положительных.