Вариант № 24563379

Основная волна ЕГЭ по математике 29.05.2019. Дальний восток. Вариант А. Имаева — «Котолис»

1. На корабле плывёт 500 пассажиров и 15 членов команды. Сколько шлюпок потребуется, чтобы перевезти всех людей с корабля на берег, если в одну шлюпку помещается 80 человек.

Решение.

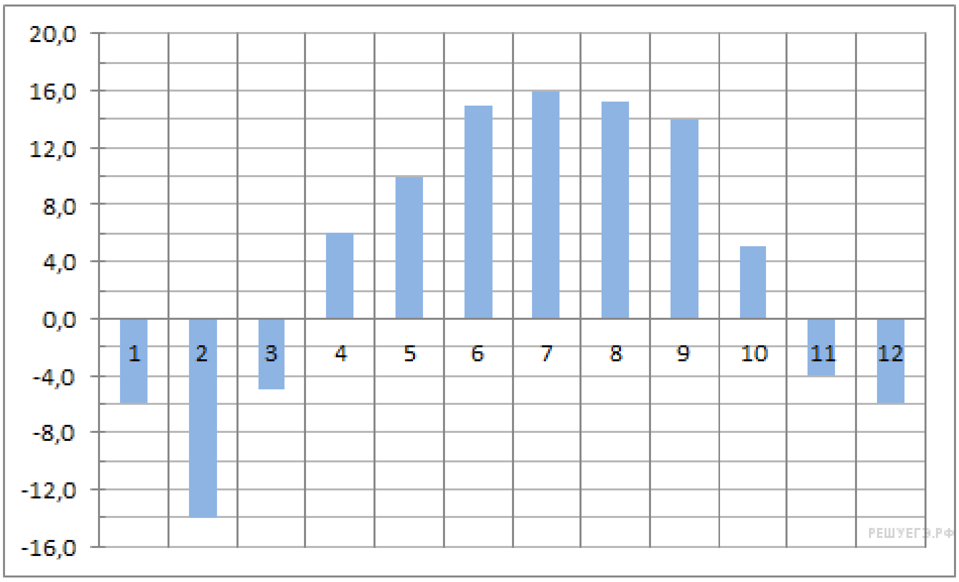
Всего на теплоходе 515 человек. Разделим 515 на 80:

$$\frac{515}{80}=\frac{480+35}{80}=\frac{480}{80}+\frac{35}{80}=6\frac{7}{16}.$$

Значит, на судне должно быть 7 шлюпок.

Ответ: 7.

2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде (Горьком) за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наибольшую среднемесячную температуру в период с января по апрель 1994 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



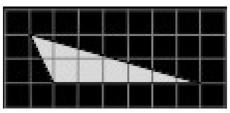
Решение.

Из диаграммы видно, что наибольшая среднемесячная температура в период с января по май (т. е. с 1 по 4 месяц) составляла 6 °C (см. рисунок).

Ответ: 6.

3.

Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение.

Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, проведенную к этому основанию. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6 \text{ см}^2.$$

Ответ: 6.

4. В сборнике билетов по математике всего 25 билетов, в 10 из них встречается вопрос по теме «Неравенства». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по теме «Неравенства».

Решение.

Из 25 билетов 15 не содержат вопроса по теме "Неравенства", поэтому вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по теме "Неравенства", равна

$$\frac{15}{25} = 0{,}6.$$

Ответ: 0,6.

Дублирует задание 285927.

5. Решите уравнение $3^{x-5} = \frac{1}{27}$.

Решение.

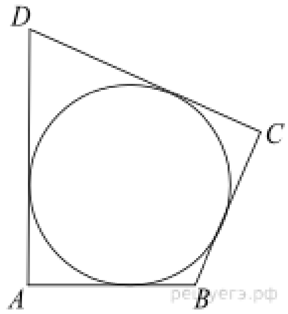
Перейдем к одному основанию степени:

$$3^{x-5} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow 3^{x-5} = 3^{-3} \Leftrightarrow x - 5 = -3 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: 2.

6.

В четырёхугольник *ABCD* вписана окружность, $AB = 10$, $BC = 8$, $CD = 16$. Найдите длину стороны *AD*.



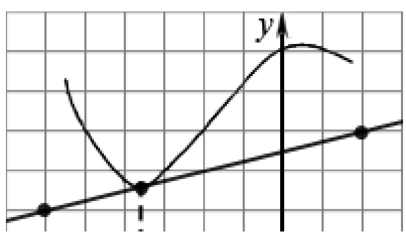
Решение.

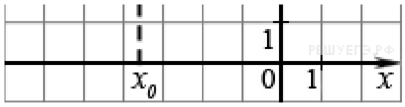
В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда *AB* + *CD* = *BC* + *AD,* значит,

$$AD = (AB + CD) - BC = 18.$$

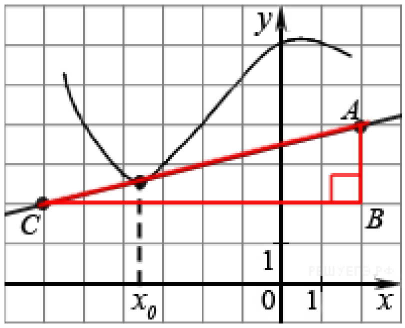
Ответ: 18.

7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.





Решение.



Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A(2;\,4)$, $B(2;\,2)$, $C(-6;\,2)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу ACB. Поэтому

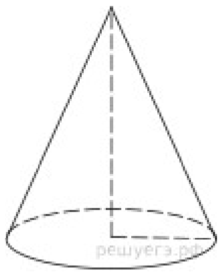
$$y'(x_0) = \operatorname{tg}\angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{8} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

Дублирует задание 27504.

8.

Во сколько раз изменится объём конуса, если его высота уменьшится в 12 раз, а радиус основания не изменился.



Решение.

Объем конуса равен $V = \frac{1}{3}Sh$, где S — площадь основания, а h — высота конуса. При уменьшении высоты в 12 раз объем конуса также уменьшится в 12 раз.

Ответ: 12.

9. Найдите значение выражения $\frac{\log_2 49}{\log_2 7}$.

Решение.

Воспользуемся свойствами логарифма:

$$\frac{\log_2 49}{\log_2 7} = \log_7 49 = 2.$$

Ответ: 2.

10. При сближении источника и приёмника звуковых сигналов движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 150$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0 \frac{c+u}{c-v}$, где c — скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 10$ м/с и $v = 15$ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике будет не менее 160 Гц.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $f \geq 160$ Гц при известных значениях $u = 10$ м/с и $v = 15$ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно:

$$f \geq 160 \Leftrightarrow 150 \cdot \frac{c+10}{c-15} \geq 160 \Leftrightarrow \frac{15(c+10)-16(c-15)}{c-15} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{390-c}{c-15} \geq 0 \Leftrightarrow 15 < c \leq 390$$

м/с.

Ответ: 390.

Дублирует задание 27980.

11. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города *A* в город *B*, расстояние между которыми равно 77 км. На следующий день он отправился обратно в *A* со скоростью на 4 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 4 часа. В результате велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из *A* в *B*. Найдите скорость велосипедиста на пути из *B* в *A*. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть v км/ч – скорость велосипедиста на пути из *B* в *A*, тогда скорость велосипедиста на пути из *A* в *B* равна $v-4$ км/ч. Сделав на обратном пути остановку на 4 часа, велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из *A* в *B*, отсюда имеем:

$$\frac{70}{v} + 4 = \frac{77}{v-4} \Leftrightarrow \frac{77+4v}{v} = \frac{77}{v-4} \underset{v>4}{\Leftrightarrow} 77v = 77v - 298 + 4v^2 - 16v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^2 - 4v - 77 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 11; \\ v = -7 \end{array}\right. \underset{v>4}{\Leftrightarrow} v = 11.$$

Таким образом, скорость велосипедиста была равна 11 км/ч.

Ответ: 11.

12. Найдите точку максимума функции $y = 7 + 15x - x\sqrt{x}$.

Решение.

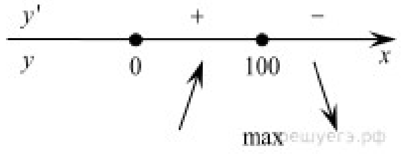
Найдем производную заданной функции:

$$y' = (7 + 15x - x^{\frac{3}{2}})' = 15 - \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Найдем нули производной:

$$15 - \frac{3}{2}\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 10 \Leftrightarrow x = 100.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = 100$.

Ответ: 100.

13. а) Решите уравнение $\cos 2x+\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+1=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi;\,3{,}5\pi]$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой косинуса двойного угла и формулой приведения:

$$1-2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x+1=0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x-2=0.$$

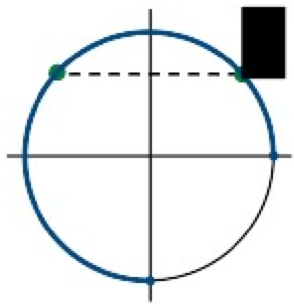
Пусть $t=\sin x$. Тогда получаем:

$$2t^2+\sqrt{2}t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\sqrt{2}, \\ t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x=-\sqrt{2}, \\ \sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k, \\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

б) б) С помощью числовой окружности отберём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\,\frac{7\pi}{2}\right]$. Получим числа $\frac{9\pi}{4};\ \frac{11\pi}{4}$.



Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{9\pi}{4};\ \frac{11\pi}{4}$.

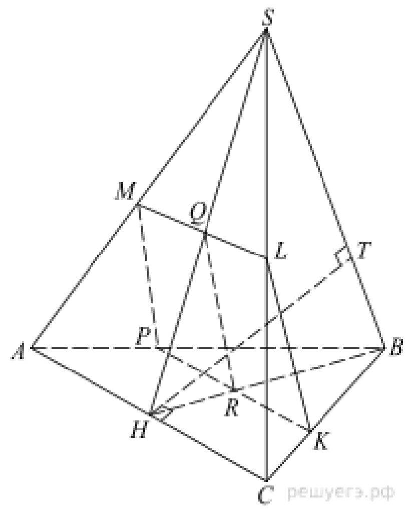
14. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка P — делит сторону AB в отношении $\frac{2}{3}$, считая от вершины A, точка K — делит сторону BC в отношении $\frac{2}{3}$, считая от вершины C. Через точки P и K параллельно SB проведена плоскость ω.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью ω является прямоугольником.

б) Найдите расстояние от точки S до плоскости ω, если известно, что $SC=5, AC=6$.

Решение.

а) Заметим, что $BP = BK$, поэтому треугольники *PBK* и *ABC* подобны, а тогда $PK \parallel AC$. Поскольку плоскость ω проходит через прямую *PK*, параллельную плоскости *ASC*, ω пересекает *ASC* по прямой, параллельной *PK*. Пусть эта прямая пересекает *SA* и *SC* в точках *M* и *L* соответственно. Тогда прямые *PK*, *AC* и *LM* параллельны.



Кроме того, по условию, $\omega \,||\, SB$, поэтому прямые *MP* и *LK* параллельны *SB*, а значит, параллельны между собой. Тогда в четырёхугольнике *LMKP* противоположные стороны попарно параллельны. Следовательно, сечение — параллелограмм.

Скрещивающиеся рёбра правильной пирамиды взаимно перпендикулярны, поэтому перпендикулярны соответственно параллельные им прямые *LM* и *LK*. Тем самым, стороны сечения перпендикулярны, следовательно, сечение — прямоугольник. Это и требовалось доказать.

б) Пусть *H* — середина *AC*. Проведём *SH* и *BH* и пусть плоскость *SHB* пересекает ω в точках *Q* и *R* (см. рис.). Тогда $QR \parallel SB$, а расстояние от точки *S* до плоскости ω равно расстоянию между параллельными прямыми *SB* и *QR*. Найдем его.

В треугольнике *SHB* длина $SB = 5$, $BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{27}$, $SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = 4$. Проведём высоту треугольника *HT* и найдем её. Пусть $BT = x$, тогда $ST = 5 - x$, тогда, применяя теорему Пифагора из треугольников *BHT* и *CHT* получаем: $HT^2 = BH^2 - BT^2 = SH^2 - ST^2$:

$$27 - x^2 = 16 - (5 - x)^2 \Leftrightarrow 27 - x^2 = -9 + 10x - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{18}{5}.$$

Тогда $HT = \sqrt{27 - \frac{324}{25}} = \frac{3\sqrt{39}}{5}$.

По условию, $\frac{BK}{KC} = \frac{3}{2}$, поэтому $\frac{BR}{RH} = \frac{3}{2}$, а тогда плоскость сечения делит высоту *HT* в том же отношении? считая от точки *T*. Следовательно, расстояние между *SB* и *QR* равно трем пятым высоты *HT* или $\frac{9\sqrt{39}}{25}$.

Ответ: б) $\frac{9\sqrt{39}}{25}$.

15. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(18 - 9x) < \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 5) + \log_{\frac{1}{3}}(x + 2)$.

Решение.

Пользуясь свойствами логарифма преобразуем неравенство:

$$\log_{\frac{1}{3}}(18-9x) < \log_{\frac{1}{3}}(x^2-6x+5)+\log_{\frac{1}{3}}(x+2) \Leftrightarrow \begin{cases} 18-9x>0, \\ x^2-6x+5>0, \\ x+2>0 \\ 18-9x>(x^2-6x+5)(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<2, \\ (x-1)(x-5)>0, \\ x>-2, \\ 18-9x>x^3+2x^2-6x^2-12x+5x+10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-4x^2+2x-8<0, \\ -2<x<1. \end{cases}$$

Рассмотрим первое неравенство системы:

$$x^3-4x^2+2x-8<0 \Leftrightarrow x^2(x-4)+2(x-4)<0 \Leftrightarrow (x^2+2)(x-4)<0.$$

Первый множитель больше нуля, следовательно, знак выражения определяется вторым множителем и решение неравенства: $x<4$.

Учитывая второе неравенство системы, получаем решение исходного неравенства: (−2; 1).

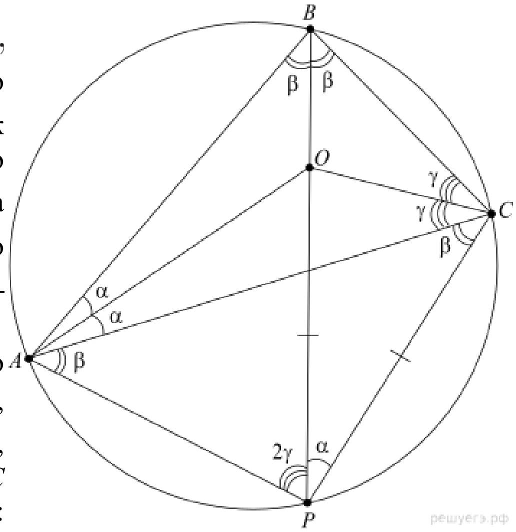
Ответ: (−2; 1).

16. Около ΔABC описана окружность. Прямая *BO*, где *O* — центр вписанной окружности, вторично пересекает описанную окружность в точке *P*.

а) Докажите, что $OP=AP$.

б) Найдите расстояние от точки *P* до прямой *AC*, если $\angle ABC=120^\circ$, а радиус описанной окружности равен 18.

Решение.



а) Обозначим углы треугольника ABC: $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$. Заметим, что $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$. $\angle BPA = \angle ACB = 2\gamma$, как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу. Аналогично $\angle CAP = \angle CBP = \beta$. Тогда $\angle AOP = 180^\circ - \alpha - \beta - 2\gamma = \alpha + \beta$. Но $\alpha + \beta = \angle OAP$, следовательно, треугольник AOP — равнобедренный, а тогда $AP = OP$.

б) Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°, следовательно, $\angle APC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, $AP = PC$, как хорды, стягивающие равные дуги. Следовательно, треугольник APC — равносторонний. Искомое расстояние d равно его высоте: $d = \dfrac{\sqrt{3}AC}{2}$.

По теореме синусов,

$$AC = 2R\sin\widehat{ABC} = 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}.$$

Следовательно, $d = \dfrac{\sqrt{3} \cdot 18\sqrt{3}}{2} = 27.$

Ответ: б) 27.

Примечание.

Ученик, занимавшийся в математическом кружке, или посещавший факультатив, узнает в задаче стандартную конструкцию. Напомним (см. Лемму о Трезубце):

1. Биссектриса угла треугольника делит пополам угол между радиусом описанной окружности и высотой, проведённой из вершины того же угла.

2. Точка пересечения биссектрисы угла треугольника с серединным перпендикуляром к противоположной стороне лежит на описанной окружности данного треугольника. Эта точка равноудалена от центра вписанной окружности, а также двух вершин треугольника и центра вневписанной окружности, противолежащих данному углу треугольника.

Ещё несколько задач на этот сюжет можно посмотреть здесь.

17. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на срок 15 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на x% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите x, если известно, что наибольший платёж по кредиту составит не более 1,9 млн рублей, а наименьший — не менее 0,5 млн рублей.

Решение.

Наибольший платеж за пользование кредитом будет выплачен в первый год, а наименьший — в последний. Долг перед банком по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно, ежегодно уменьшаясь на одну пятнадцатую. Поэтому первый платеж составит одну пятнадцатую от 6 миллионов (возврат первой тела долга) и процент за их использование: $\frac{1}{15}\cdot 6+\frac{x}{100}\cdot 6$. Последний платеж также составит одну пятнадцатую от 6 миллионов (возврат последней части тела долга) и процент за использование этой суммы в течение последнего года: $\frac{1}{15}\cdot 6+\frac{x}{100}\cdot\frac{6}{15}$. Поскольку первая из найденных величин не больше 1,9 млн руб, а вторая не меньше 0,5 млн руб, получаем два линейных неравенства, откуда, соответственно, находим:

ıssian и

$$-x \le 25$$

ıssian Тогда $x=25$.

$$-x \ge 25.$$

Ответ: 25.

18. При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{x^2-2x+a^2-4a}{x^2-a}=0$$

имеет ровно 2 различных решения.

19. Дана последовательность из 100 натуральных чисел, каждое из которых, начиная со второго, либо в два раза больше предыдущего, либо на 98 меньше.

а) Может ли последовательность состоять из 5 чисел?

б) Какое может быть a_1, если $a_{100}=75$?

в) Найдите наименьшее значение наибольшего члена последовательности.

Решение.

а) Предположим, что первое число — это a. Постараемся найти цепочку вида:

$$a \to 2a \to 4a \to 8a \to 8a - 98 \to 8a - 98 - 98.$$

Для зацикливания требуется, чтобы $a = 8a - 196$. Это уравнение имеет натуральное решение: $a = 28$. Действительно, имеем цепочку, состоящую из пяти чисел:

$$28 \to 56 \to 112 \to 224 \to 126 \to 28 \to \ldots$$

б) По условию или $a_{99} = \dfrac{a_{100}}{2}$, или $a_{99} = a_{100} + 98$. Но a_{100} — нечетное число, поэтому есть ровно одна возможность: $a_{99} = 75 + 98$. a_{99} — снова нечетное число, поэтому для a_{98} снова ровно одна возможность. Так как всякий раз будут получаться нечетные числа, поскольку сумма нечетного и четного чисел является нечетным числом. Рассуждая аналогично, получаем: $a_1 = 75 + 98 \cdot 99 = 9777$.

в) Заметим, что цепочка $7 \to 14 \to 28 \to 56 \to 112 \to 14 \to \ldots$ удовлетворяет условиям. Докажем, что наибольший член последовательности не может быть меньше 112.

Пусть a — наибольший член последовательности (начиная с момента, когда впервые произошло умножение на 2; заметим, что в нашем случае 98 не может вычитаться дважды подряд). Тогда предыдущее число — это $\dfrac{a}{2}$. Следовательно, a — четное.

Ясно, что значение 98 и меньше a быть не может, так как это бы означало, что в нашей цепочке, начиная с первого умножения на 2, ни разу не вычиталось 98. Следовательно, с этого момента были только умножения на 2. Но тогда, очевидно, нашелся бы член последовательности, который больше 112. Поэтому достаточно рассмотреть случаи, когда a равно 110, 108, 106, 104, 102, 100.

Переберем эти значения. Рассмотрим момент, когда a появился впервые (очевидно, номер этого члена последовательности заведомо не превзойдет, например, 10). В случае значений a, равных 100, 102, 106, после вычитания 98 (на следующем шаге), мы попадем в элемент цепочки

$$2 \to 4 \to 8 \to 16 \to 32 \to 64 \to 128 \to \ldots$$

и найдется член, который превзойдет 112 (и будет равен по крайней мере 128).

Значения a, равные 104 и 110, приведут нас в элемент цепочки

$$6 \to 12 \to 24 \to 48 \to 96 \to 192 \to \ldots$$

Значение $a = 108$ приведет нас к цепочке

$$10 \to 20 \to 40 \to 80 \to 160 \to \ldots$$

и вновь найдется член, который превзойдет 112 (и будет равен, по крайней мере, 160).

Ответ: а) да, б) 9777, в) 112.