Вариант № 24571729

Основная волна ЕГЭ по математике 29.05.2019. Санкт-Петербург

1. а) Решите уравнение $8\sin^2 x - 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 9 = 0.$

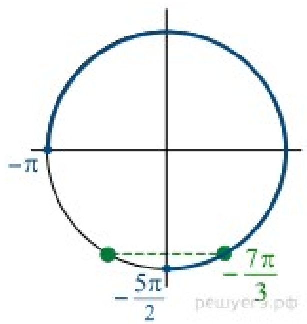
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение.

а) Используя формулу приведения, запишем уравнение в виде $8\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x - 9 = 0.$ Далее имеем:

$$\sin x = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{75}}{8} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3} \pm 5\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x = \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$. Получим число $-\frac{7\pi}{3}$.



Ответ: а) $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{7\pi}{3}$.

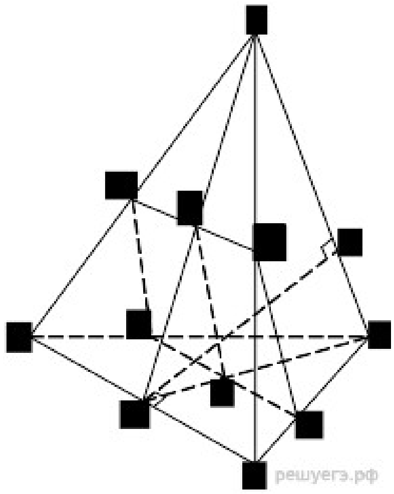
2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 9, а боковое ребро $SA = 6$. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 2 : 7$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой SA.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро SB в отношении 2 : 7, считая от вершины S.

б) Найдите расстояние между прямыми SA и KM.

Решение.

а) Пусть плоскость пересекает ребро *SB* в точке *N*. Поскольку плоскость α параллельна ребру *SA*, она пересекает грань *SBA* по прямой, параллельной *SA*. Тем самым, прямые *KN* и *SA* параллельны, треугольники *NBK* и *SBA* подобны, а $SN : NB = AK : KB = 2 : 7$, что и требовалось доказать.



б) Пусть плоскость сечения пересекает ребро *AC* в точке *L*. Аналогично пункту а) из подобия треугольников *MCL* и *SCA* находим, что $AL : LC = SM : MC = 2 : 7$. Из равенства $AL : LC = AK : KB$ следует, что *LK* и *CB* параллельны.

Пусть, далее, *H* — середина *BC*. Проведём *SH* и *AH* и пусть плоскость *SHA* пересекает α в точках *Q* и *R* (см. рис.). Прямая SA параллельна плоскости α, поэтому искомое расстояние от прямой *SA* до прямой *KM* равно расстоянию между параллельными прямыми *SA* и *QR*. Найдем его.

Найдем длины сторон треугольника *SHA*: $SA = 6$, $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$,

$SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$. Проведём высоту треугольника *HT* и найдем её. Пусть $AT = x$, тогда $ST = 6 - x$, тогда, применяя теорему Пифагора, из треугольников *AHT* и *SHT* получаем: $HT^2 = AH^2 - AT^2 = SH^2 - ST^2$:

$$\frac{243}{4} - x^2 = \frac{63}{4} - (6-x)^2 \Leftrightarrow \frac{243}{4} - x^2 = \frac{63}{4} - 36 + 12x - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{27}{4}.$$

Тогда $HT = \sqrt{\frac{243}{4} - \frac{729}{16}} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Наконец, из подобия треугольников *QHR* и *SHA* получаем $AR : AH = AK : AB = 2 : 9$, и тогда плоскость сечения делит высоту *HT* в отношении 2:9, считая от вершины T. Следовательно, расстояние между *SA* и *KM* равно двум девятым высоты *HT* или $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

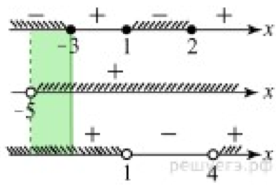
Ответ: б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Решите неравенство $\log_2(14 - 14x) \geq \log_2(x^2 - 5x + 4) + \log_2(x + 5)$.

Решение.

Используя свойства логарифмов, получаем:

$$\log_2(14-14x) \geq \log_2(x^2-5x+4)+\log_2(x+5) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(14-14x) \geq \log_2((x-1)(x-4)(x+5)), \\ x+5>0, \\ (x-1)(x-4)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14-14x \geq (x-1)(x-4)(x+5), \\ x+5>0, \\ (x-1)(x-4)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2+x-6) \leq 0, \\ x+5>0, \\ (x-1)(x-4)>0 \end{cases} \underset{\text{см.рис}}{\Leftrightarrow} -5<x\leq -3.$$

Ответ: $(-5;-3]$

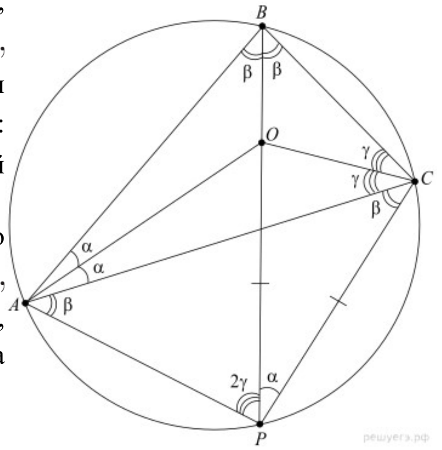
4. Точка *O* — центр вписанной в треугольник *ABC* окружности. Прямая *OB* вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке *P*.

а) Докажите, что $\angle POC = \angle PCO$.

б) Найдите площадь треугольника *APC*, если радиус окружности, описанной около треугольника *ABC* окружности равен 4, а $\angle ABC = 120^\circ$.

Решение.

а) Пусть O − центр вписанной окружности, следовательно, BO и CO − биссектрисы. Обозначим углы ΔABC: $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$. Тогда $\angle ABP = \angle PBC = \beta$, $\angle ABP = \angle ACP$ и $\angle CBP = \angle CAP$ (опираются на одну дугу). Имеем: $\angle OCP = \gamma + \beta$. Но также $\angle POC = \gamma + \beta$, как внешний угол. Откуда следует требуемое равенство: $\angle POC = \angle PCO$.



б) Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180º, следовательно, $\angle APC = 60^\circ$, $AP = PC$, как хорды, стягивающие равные дуги. Следовательно, треугольник APC — равносторонний, его площадь равна $S = \dfrac{AC^2\sqrt{3}}{4}$.

По теореме синусов, $AC = 2R\sin\widehat{ABC} = 8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$. Следовательно, искомая площадь

$$S = \frac{48\cdot\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $12\sqrt{3}$.

Примечание Дмитрия Гущина.

Ученик, занимавшийся в математическом кружке, или посещавший факультатив, узнает в задаче стандартную конструкцию. Напомним (см. Лемму о Трезубце):

1. Биссектриса угла треугольника делит пополам угол между радиусом описанной окружности и высотой, проведённой из вершины того же угла.

2. Точка пересечения биссектрисы угла треугольника с серединным перпендикуляром к противоположной стороне лежит на описанной окружности данного треугольника. Эта точка равноудалена от центра вписанной окружности, а также двух вершин треугольника и центра вневписанной окружности, противолежащих данному углу треугольника.

Ещё несколько задач на этот сюжет можно посмотреть здесь.

5. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 3 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платёж составит 0,24 млн рублей? (Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся).

Решение.

Пусть кредит взят на *n* лет. Тогда долг (в млн руб) уменьшается каждый июль равномерно:

$$3,\ \frac{3}{n}(n-1),\ \dots,\ \frac{2\cdot 3}{n},\ \frac{3}{n},\ 0.$$

В январе долг возрастает на 20%, значит, долг (в млн руб) в январе:

$$1,2\cdot 3,\ \frac{1,2\cdot 3(n-1)}{n},\ \dots,\ \frac{2\cdot 1,2\cdot 3}{n},\ \frac{1,2\cdot 3}{n}.$$

Выплаты (в млн руб):

$$0,2\cdot 3+\frac{3}{n},\ \frac{0,2\cdot 3(n-1)}{n}+\frac{3}{n},\ \dots,\ \frac{0,2\cdot 3\cdot 2}{n}+\frac{3}{n},\ \frac{0,2\cdot 3}{n}+\frac{3}{n}.$$

Тогда сумма выплат (в млн руб) равна

$$3+0,2\cdot 3\left(\frac{n}{n}+\frac{n-1}{n}+\ \dots\ +\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\right)=3+3\cdot 0,2\frac{(n+1)}{2}.$$

Наименьшим годовым платежом является последний платёж, значит,

ıssian

$$-\frac{0,2\cdot 3}{n}+\frac{3}{n}=0,24,$$

откуда $n=15.$

Тогда сумма выплат за 15 лет равна: $3+3\cdot 0,2\frac{(15+1)}{2}=7,8$ (млн руб).

Ответ: 7,8 млн руб.

Примечание.

По сути решения это задание аналогично заданию 517480 из ЕГЭ 2017 года.

6. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

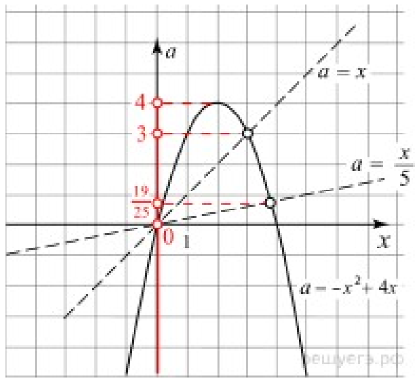
$$\frac{x^2-4x+a}{x^2-6ax+5a^2}=0$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

Заметим, что

$$\frac{x^2-4x+a}{x^2-6ax+5a^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+a=0, \\ x^2-6ax+5a^2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-x^2+4x, \\ (x-5a)(x-a)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-x^2+4x, \\ a\neq x, \\ a\neq \dfrac{x}{5}. \end{cases}$$



Изобразим решение в системе координат xOa. Графиком системы, а значит, и графиком исходного уравнения является парабола с выколотыми точками.

Ординаты точек пересечения параболы $a=-x^2+4x$ и прямой $a=x$ найдём из уравнения $a=-a^2+4a$. Получаем $a=0$ или $a=3$

Ординаты точек пересечения параболы $a=-x^2+4x$ и прямой $a=\dfrac{x}{5}$ найдём из уравнения $a=-25a^2+20a$. Получаем $a=0$ или $a=\dfrac{19}{25}$

Ровно два решения исходное уравнение имеет при $a<0,\ 0<a<\dfrac{19}{25},\ \dfrac{19}{25}<a<3,$ $3<a<4.$

Ответ: $(-\infty;0)\cup\left(0;\dfrac{19}{25}\right)\cup\left(\dfrac{19}{25};3\right)\cup(3;4).$

7. В ящике лежат 73 овоща, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два овоща различной массы, а средняя масса всех овощей равна 1000 г. Средняя масса овощей , масса каждого из которых меньше 1000 г, равна 988 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых больше 1000 г, равна 1030 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну овощей массой меньше 1000 г и овощей массой больше 1000 г?

б) Могло ли в ящике оказаться ровно 11 овощей, масса каждого из которых равна 1000 г?

в) Какую наименьшую массу может иметь овощ в этом ящике?

Решение.

Пусть всего a овощей тяжелее 1000 г (а их суммарная масса S_1), b овощей весят 1000 г (их суммарная масса S_2), c овощей легче 1000 г (их суммарная масса S_3). Тогда условие записывается системой:

$$\begin{cases} a+b+c=73, \\ S_1+S_2+S_3=73000, \\ S_1=1030a, \\ S_2=1000b, \\ S_3=988c. \end{cases}$$

а) В этом случае $a=c$ и $b=73-2a$. Из системы имеем: $1030a+1000\cdot(73-2a)+988a=73000$, откуда $a=0$. Противоречие с условием, так как овощи тяжелее килограмма есть, поскольку их средняя масса 1030 г.

б) В этом случае $b=11$. Тогда из системы имеем: $11+a+c=73$ и $1030a+11000+988c=73000$, откуда $21a=372$. Но тогда a − нецелое число. Противоречие.

в) Очевидно, $c\leq 72$. Пусть x − масса самого легкого овоща. Тогда средняя масса овощей, которые легче 1000 г, не превосходит

$$\frac{x+999\cdot(c-1)}{c}=999-\frac{999-x}{c}\leq 999-\frac{999-x}{72}.$$

Это выражение равно 988 при $x=207$. Соответственно, при $x<207$ средняя масса овощей, которые легче 1000 г, меньше 988, что противоречит условию.

Пример строится из оценки, которая достигается: один овощ массой 207 г, 71 овощ массой 999 г и один овощ массой 1030 г.

Ответ: а) Нет; б) Нет; в) 207.