

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА ПО НАДЗОРУ В СФЕРЕ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

---

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

**Методические материалы для председателей и членов  
предметных комиссий субъектов Российской Федерации  
по проверке выполнения заданий с развернутым  
ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2018 года**

# МАТЕМАТИКА

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ  
ПО ОЦЕНИВАНИЮ ВЫПОЛНЕНИЯ  
ЗАДАНИЙ С РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ**

Москва  
2018

Руководитель федеральной комиссии по разработке контрольных измерительных материалов для проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего и среднего общего образования по математике И.В. Ященко, в.н.с. ФГБНУ «ФИПИ».

Авторы–составители: И.Р. Высоцкий, О.Н. Косухин, А.В. Семенов, А.С. Трепалин.

Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2018 г. по математике подготовлены в соответствии с Тематическим планом работ Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный институт педагогических измерений» на 2018 г. Пособие предназначено для подготовки экспертов по оцениванию заданий с развернутым ответом, которые являются частью контрольных измерительных материалов (КИМ) для сдачи единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике.

В методических материалах дается краткое описание структуры контрольных измерительных материалов 2018 г. по математике, характеризуются типы заданий с развернутым ответом, используемые в КИМ ЕГЭ по математике, и критерии оценки выполнения заданий с развернутым ответом, приводятся примеры оценивания выполнения заданий и даются комментарии, объясняющие выставленную оценку.

В пособии использованы работы участников ЕГЭ 2016–2017 гг.

Авторы будут благодарны за замечания и предложения по совершенствованию пособия.

© И.Р. Высоцкий, О.Н. Косухин, А.В. Семенов, А.С. Трепалин, 2018  
© Федеральный институт педагогических измерений. 2018

## **СОДЕРЖАНИЕ**

<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>4</b>
<b>1. Критерии проверки и оценка решений задания 13 ЕГЭ–2018 .....</b>	<b>5</b>
<b>2. Критерии проверки и оценка решений задания 14 ЕГЭ–2018 .....</b>	<b>17</b>
<b>3. Критерии проверки и оценка решений задания 15 ЕГЭ–2018 .....</b>	<b>27</b>
<b>4. Критерии проверки и оценка решений задания 16 ЕГЭ–2018 .....</b>	<b>38</b>
<b>5. Критерии проверки и оценка решений задания 17 ЕГЭ–2018 .....</b>	<b>49</b>
<b>6. Критерии проверки и оценка решений задания 18 ЕГЭ–2018 .....</b>	<b>59</b>
<b>7. Критерии проверки и оценка решений заданий 19 ЕГЭ-2018.....</b>	<b>74</b>
<b>Указания по оцениваю развернутых ответов участников ЕГЭ для эксперта, проверяющего развёрнутые ответы на задания 13–19 по МАТЕМАТИКЕ.....</b>	<b>84</b>

## **ВВЕДЕНИЕ**

Общие позиции и характер оценивания выполнения заданий в целом повторяют прошлогодние. Небольшие видоизменения и корректировки формулировок в содержании критериев оценивания для конкретного задания могут иметь место в тех случаях, когда необходимость подобного рода уточнений диктуется содержанием и структурой самого задания.

Более подробное описание заданий с развернутым ответом и критериев оценивания их выполнения представлены ниже, в начале каждого из параграфов 1–7.

### **Извлечения из Методических рекомендаций Рособрнадзора по формированию и организации работы предметных комиссий субъекта Российской Федерации при проведении государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования**

Во время работы экспертам запрещается:

- самостоятельно изменять рабочие места;
- копировать и выносить из помещений, где осуществляется проверка, экзаменацные работы, критерии оценивания, протоколы проверки экзаменацных работ, а также разглашать посторонним лицам информацию, содержащуюся в указанных материалах;
- иметь при себе и (или) пользоваться средствами связи, фото и видеоаппаратурой, портативными персональными компьютерами (ноутбуками, КПК и другими), кроме специально оборудованного в помещениях ПК рабочего места с выходом в информационно-телекоммуникационную сеть «Интернет» для обеспечения возможности уточнения экспертами изложенных в экзаменацных работах участников ГИА фактов (например, сверка с источниками, проверка приведенных участниками ГИА фамилий, названий, фактов и т.п.);
- без уважительной причины покидать аудиторию;
- переговариваться, если речь не идет о консультации у председателя ПК или у эксперта, назначенного по решению председателя ПК консультантом; если у эксперта возникают вопросы или проблемы, он должен обратиться к председателю ПК или лицу,енному председателем ПК консультантом.

# 1. Критерии проверки и оценка решений задания 13 ЕГЭ–2018

Задание №13 – тригонометрическое, логарифмическое или показательное уравнение.

Выделение решения уравнения в отдельный пункт *a* прямо указывает участникам экзамена на необходимость полного решения предложенного уравнения: при отсутствии в тексте конкретной работы ответа на вопрос п. *a* задание №13 оценивается 0 баллов.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>a</i> ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта <i>a</i> и пункта <i>b</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

## Задача 13 (демонстрационный вариант 2018 г.).

а) Решите уравнение  $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$ .

**Решение.** а) Преобразуем уравнение:

$$1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x; 2\sin^2 x - \sin x = 0; \sin x(2\sin x - 1) = 0,$$

откуда  $\sin x = 0$  или  $\sin x = \frac{1}{2}$ .

Из уравнения  $\sin x = 0$  находим:  $x = \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Из уравнения  $\sin x = \frac{1}{2}$  находим:  $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

б) С помощью числовой окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$ .

Получаем числа:  $-2\pi; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}$ .

**Ответ:** а)  $\pi n, (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

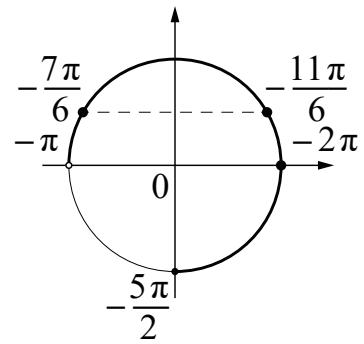
б)  $-2\pi; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}$ .

*Комментарий.*

Множество корней может записано по-другому, например,  $\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ .

$m \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

Отбор корней может быть произведен любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.



## Примеры оценивания решений задания 13

### Пример 1.

a) Решите уравнение  $\cos 2x + 2 = \sqrt{3} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$ .

**Ответ:** а)  $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-\frac{8\pi}{3}; -\frac{7\pi}{3}$ .

$$13) \quad \text{а) } \cos 2x + 2 = \sqrt{3} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

$$\begin{aligned} 1 - 2\sin^2 x + 2 &= -\sqrt{3} \sin x \\ -2\sin^2 x + \sqrt{3} \sin x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Пусть  $\sin x = t$ , тогда

$$-2t^2 + \sqrt{3}t + 3 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (\sqrt{3})^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 = 3 + 24 = 27$$

$$t = \frac{-\sqrt{3} \pm 3\sqrt{3}}{-4} \quad t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad t_2 = \sqrt{3}$$

Значит,  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  или  $\sin x = \sqrt{3}$

$$1) \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \quad \sin x = \sqrt{3} \text{ - нет решений, т.к. } |\sqrt{3}| > 1$$

б) Найдем корни уравнения, принадлежащие отрезку  $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$

$$1) \quad [-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$$

$$-3\pi \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq -\frac{3\pi}{2}$$

$$-3 \leq -\frac{1}{3} + 2k \leq -\frac{3}{2}$$

$$-\frac{9}{3} + \frac{1}{3} \leq 2k \leq -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$-\frac{8}{3} \leq 2k \leq -\frac{1}{6}$$

$$-\frac{16}{6} \leq k \leq -\frac{1}{12}$$

$$-\frac{16}{12} \leq k \leq -\frac{1}{12}$$

$$-1\frac{1}{3} \leq k \leq -\frac{1}{12}, \text{ т.к. } k \in \mathbb{Z}, \text{ но } k=-1$$

$$2) \quad -3\pi \leq \frac{4\pi}{3} + 2\pi n \leq -\frac{3\pi}{2}$$

$$-3\pi - \frac{4\pi}{3} \leq 2\pi n \leq -\frac{3\pi}{2} - \frac{4\pi}{3}$$

$$-\frac{13\pi}{3} \leq 2\pi n \leq -\frac{17\pi}{6}$$

$$-\frac{13}{3} \leq n \leq -\frac{17}{12}$$

$$-\frac{16}{12} \leq n \leq -\frac{17}{12}$$

$$-2\frac{1}{6} \leq n \leq -1\frac{5}{12} \Rightarrow n = -2$$

$$\text{Если } n = -2, \text{ то } x = \frac{4\pi}{3} - 4\pi = -\frac{8\pi}{3}$$

$$\text{Если } k = -1, \text{ то } x = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{2} - \frac{4\pi}{3} = -\frac{47\pi}{6}$$

$$\text{Ответ: а) } -\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n; k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{б) } -\frac{8\pi}{3}; -\frac{47\pi}{6}$$

### Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

## Пример 2.

a) Решите уравнение  $\cos 2x + 2 = \sqrt{3} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$ .

**Ответ:** а)  $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ;  $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-\frac{8\pi}{3}; -\frac{7\pi}{3}$ .

$$\begin{aligned}
 & \text{13) а) } \cos 2x + 2 = \sqrt{3} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \\
 & \cos 2x + 2 = \sqrt{3} - (-\sin x) \\
 & 1 - 2 \sin^2 x + 2 = -\sqrt{3} \cdot \sin x \\
 & -2 \sin^2 x + 3 + \sqrt{3} \sin x = 0 \\
 & \text{Пусть } \sin x = y \\
 & \text{Тогда} \\
 & -2y^2 + 3 + \sqrt{3} y = 0 \\
 & D = \sqrt{3} - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = \sqrt{27} > 0 \quad 2 \text{ корня} \\
 & y_1 = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{27}}{-4} = \frac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{-4} = \frac{2\sqrt{3}}{-4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
 & y_2 = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{27}}{-4} = \frac{-\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{-4} = \frac{-4\sqrt{3}}{-4} = \sqrt{3} \\
 & \text{Обратимо } \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin x = \sqrt{3} \\
 & x = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{нет решений} \\
 & \sin x \in [- \\
 & \text{При } n=0 \\
 & x = -\frac{\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right] \\
 & \text{При } n=-1 \\
 & x = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right] \\
 & \text{При } n=-2 \\
 & x = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{7\pi}{3} \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right] \\
 & \text{При } n=-3 \\
 & x = \frac{\pi}{3} - 3\pi = -\frac{8\pi}{3} \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right] \\
 & \text{Ответ: а) } x = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\
 & \text{б) } -\frac{8\pi}{3}; -\frac{7\pi}{3}
 \end{aligned}$$

### Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ в пункте а, но отбор корней нельзя назвать обоснованным, так как перебор остановлен на корне, принадлежащем отрезку. Типичный пример выставления 1 балла.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

### Пример 3.

а) Решите уравнение  $\cos 2x + 2 = \sqrt{3} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$ .

**Ответ:** а)  $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ;  $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-\frac{8\pi}{3}; -\frac{7\pi}{3}$ .

$$13 \quad a) \cos 2x + 2 = \sqrt{3} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 2 = \sqrt{3} \cdot \sin x$$

$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x + 2 = 0$$

$$-2 \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x + 3 = 0$$

$$2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x - 3 = 0$$

$$\text{замена } \sin x = t, t \in [-1; 1]$$

$$2t^2 + \sqrt{3}t - 3 = 0$$

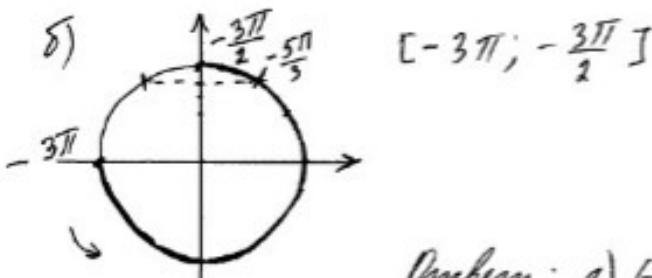
$$D = 3 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 3 + 24 = 27 = (3\sqrt{3})^2$$

$$t_1 = \frac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad t_2 = \frac{-\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{4} = -\frac{4\sqrt{3}}{4} = -\sqrt{3}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin x = -\sqrt{3}; \quad -\sqrt{3} \notin [-1; 1]$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Ответ: а)  $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$ ;

б)  $-\frac{5\pi}{3}$ .

### Комментарий.

Тригонометрическое уравнение решено неверно. Во второй строчке в правой части отсутствует знак минус – ошибка в формуле приведения. Пункт а не выполнен не из-за вычислительной ошибки.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

#### Пример 4.

а) Решите уравнение  $9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ \frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$ .

**Ответ:** а)  $\pi + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;  $\frac{\pi}{3} + 2\pi l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ ;  $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $3\pi; \frac{11\pi}{3}$ .

$$\begin{aligned}
 & 13. \quad 9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0 \\
 & 9 \cdot (9^{\cos x})^2 - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0 \\
 & 9^{\cos x} = t, \text{ тогда} \\
 & 9t^2 - 28t + 3 = 0 \\
 & D = 784 - 108 = 676 \\
 & t_1 = \frac{28+26}{18} = \frac{54}{18} = 3 \quad t_2 = \frac{28-26}{18} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} \\
 & 9^{\cos x} = 3 \quad 9^{\cos x} = \frac{1}{9} \\
 & \cos x = 1 \quad \cos x = -1 \\
 & x_1 = \pi + 2\pi n, \text{ нет} \quad x_2 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \text{ кратн.}, \text{ общий} \\
 & x_1 \text{ и } x_2 \text{ получали } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, \text{ кратн.} \\
 & \text{б) } \frac{11\pi}{3}; 3\pi; 4\pi \in \left[ \frac{5\pi}{2}; 4\pi \right] \\
 & \text{Ответ: а) } \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, \text{ кратн., б) } 3\pi, \frac{11\pi}{3}; 4\pi.
 \end{aligned}$$

#### Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ в пункте а, но при отборе корней отсутствует решение и ошибочно указано число, которое не является корнем тригонометрического уравнения. Типичный пример выполнения задания на 1 балл.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

### Пример 5.

а) Решите уравнение  $9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ .

**Ответ:** а)  $\pi + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;  $\frac{\pi}{3} + 2\pi l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ ;  $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $3\pi; \frac{11\pi}{3}$ .

$$13. \text{ a)} 9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$$

$$9 \cdot 3^{2\cos x} - 28 \cdot 3^{\cos x} + 3 = 0$$

$$\text{Пусть } 3^{\cos x} = t, \text{ то}$$

$$9 \cdot t^2 - 28 \cdot t + 3 = 0$$

$$D = 784 - 4 \cdot 9 \cdot 3 = 676$$

$$t_1 = \frac{28 - 26}{18} = \frac{1}{9}$$

$$t_2 = \frac{28 + 26}{18} = 3$$

$$3^{2\cos x} = \frac{1}{9}$$

$$3^{2\cos x} = 3^{-2}$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pm \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$3^{2\cos x} = 3^1$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\delta) \quad [ \frac{5\pi}{2}; 4\pi ]$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \text{ не подходит.}$$

$$1. \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$+2,5\pi < -\frac{\pi}{3} + 2\pi k < 4\pi \quad | : \pi$$

$$2,5 < -\frac{1}{3} + 2k < 4$$

$$2\frac{5}{6} + \frac{2}{6} < 2k < 4\frac{1}{3} \quad | : 2$$

$$1\frac{5}{6} < k < 2\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow k = 2 \quad x = -\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{11\pi}{3}$$

$$2. \quad x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2,5\pi < \pi + 2\pi k < 4\pi \quad | : \pi - 1$$

$$2,5 - 1 < 2\pi k < 4 - 1 \quad | : 2$$

$$1,75 < k < 1,5$$

$$\Rightarrow k = 1$$

$$x = \pi + 2\pi = 3\pi.$$

$$3. \quad x = -\pi + 2\pi k$$

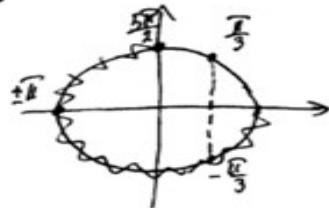
$$2,5\pi < -\pi + 2\pi k < 4\pi \quad | : 2\pi$$

$$1,75 < k < 2,5$$

$$\Rightarrow k = 2$$

$$x = -\pi + 4\pi = 3\pi.$$

$$\text{Ответ: } x = 3\pi, x = \frac{11\pi}{3}$$



### Комментарий.

В записи корней первого простейшего уравнения содержится дублирующая запись корней, но ошибки в этом нет. При отборе корней допущены ошибки при делении  $2\frac{5}{6}$  и  $4\frac{1}{3}$  на 2.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

## Пример 6.

а) Решите уравнение  $9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ \frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$ .

**Ответ:** а)  $\pi + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;  $\frac{\pi}{3} + 2\pi l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ ;  $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $3\pi; \frac{11\pi}{3}$ .

$$13. \text{ а)} 9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$$

$$9 \cdot (9^x)^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$$

Пусть  $9^{\cos x} = t$ , тогда :

$$9t^2 - 28t + 3 = 0$$

$$\Delta = (-28)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 3 = 784 - 108 = 676$$

$$t_1 = \frac{28-26}{2 \cdot 9} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}; \quad t_2 = \frac{28+26}{2 \cdot 9} = \frac{54}{18} = 3$$

$$\text{Вернемся к замене: } 9^{\cos x} = \frac{1}{9} \quad \text{или} \quad 9^{\cos x} = 3 \\ \cos x = -1 \quad (3)^{\cos x} = 3' \\ x = \pi + \pi d, d \in \mathbb{Z} \quad 2 \cos x = 1, \\ \cos x = \frac{1}{2} \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{б) } \left[ \frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$$

$$\frac{5\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq 4\pi \quad ; \quad \frac{5\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq 4\pi$$

$$\frac{5}{2} \leq \frac{1}{3} + 2n \leq 4, n \in \mathbb{Z} \quad \frac{5}{2} \leq -\frac{1}{3} + 2k \leq 4, k \in \mathbb{Z}$$

$$2\frac{1}{6} \leq 2n \leq 3\frac{2}{3}, n \in \mathbb{Z} \quad 2\frac{5}{6} \leq 2k \leq 4\frac{1}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$1\frac{1}{6} \leq n \leq 1\frac{5}{6}, n \in \mathbb{Z} \quad 1\frac{5}{6} \leq k \leq 2\frac{1}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$n - \text{четные числа} \quad k = 2$$

$$\frac{5\pi}{2} \leq \pi + \pi d \leq 4\pi$$

$$\frac{5}{2} \leq 1 + d \leq 4, d \in \mathbb{Z}$$

$$1\frac{1}{2} \leq d \leq 3, d \in \mathbb{Z}$$

$$d = 2, 3$$

$$x_2 = \pi + 2\pi d = 3\pi$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi = \frac{11\pi}{3}$$

$$x_3 = \pi + 4\pi = 5\pi$$

Ответ: а)  $x = \pi + \pi d, d \in \mathbb{Z}$ ;  $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ;

$$\text{б) } x_1 = \frac{11\pi}{3}; \quad x_2 = 3\pi; \quad x_3 = 5\pi$$

## Комментарий.

Тригонометрическое уравнение  $\cos x = -1$  решено неверно.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

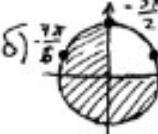
### Пример 7.

а) Решите уравнение  $2\log_4(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$ .

**Ответ:** а)  $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ;  $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-\frac{7\pi}{6}$ .

а)  $2\log_4(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0, \log_4(4\sin x) = t,$   
 $2t^2 - 5t + 2 = 0; D = 25 - 16 = 9 = 3^2, t_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}, t_2 = \frac{5+3}{4} = 1;$   
 $\log_4(4\sin x) = t_1 = \frac{1}{2}; \log_4(4\sin x) = \log_4 2, 4\sin x = 2, \sin x = \frac{1}{2};$   
 $x \in \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$   
 $\log_4(4\sin x) = t_2 = 1; \log_4(4\sin x) = \log_4 4; 4\sin x = 4; \sin x = 1;$   
 $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$  Ответ:  $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

б)  Ответ:  $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{6}$ .

### Комментарий.

Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки при вычислении  $t_2$ , но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта а и пункта б

**Оценка эксперта: 1 балл.**

### Пример 8.

а) Решите уравнение  $2\log_4(4\sin x) - 5\log_4(\sin x) + 2 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$ .

**Ответ:** а)  $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-\frac{7\pi}{6}$ .

$$13) \text{ а) ОДЗ: } \begin{aligned} 4\sin x > 0 \\ \sin x > 0 \end{aligned}$$

Для таких  $x$  решим методом интервалов  
 $\log_4(4\sin x) = t ; t > 0$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2$$

$$D = 25 - 16$$

$$D = 9$$

$$t_1 = \frac{5+3}{2} \quad t_1 = 4$$

$$t_2 = \frac{5-3}{2} \quad t_2 = 1$$

Обратная замена

$$\log_4(4\sin x) = 1 \quad \text{или} \quad \log_4(4\sin x) = 4$$

$$4\sin x = 4$$

$$4\sin x = 256$$

$$\sin x = 1$$

$$\sin x = 64$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Нет решений.

б) Приведём омбоз на единичной окружности



$$-\frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Ответ: а) } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ б) } -\frac{3\pi}{2}$$

### Комментарий.

Получены неверные ответы не из-за вычислительной ошибки при вычислении корней квадратного уравнения.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 9.**

а) Решите уравнение  $2\log_4(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$ .

**Ответ:** а)  $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ;  $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-\frac{7\pi}{6}$ .

а)  $2\log_4(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$

Пусть  $\log_4(4\sin x) = t$ , тогда:

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9 = (3)^2$$

$$t_1 = \frac{5+3}{4} = 2; \quad t_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2};$$

(1)  $\log_4(4\sin x) = 2$ ;

$$4\sin x = 16;$$

$\sin x = 4$  — таких  $x$  не существует, так как  $\sin x \in [-1; 1]$ ,

~~б)~~  $[-\frac{3\pi}{2}; 0]$

(2)  $\log_4(4\sin x) = \frac{1}{2}$ ;

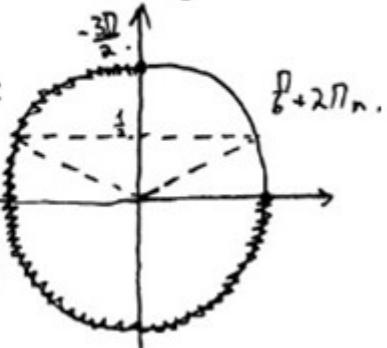
$$4\sin x = 2;$$

$$\sin x = \frac{1}{2};$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \text{ и } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,$$

Рассмотрим на окружности единичной единицей отрезок и корни:

то корень  $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$  будет при каких условиях не будет лежать на  $[-\frac{3\pi}{2}, 0]$ .  
корень  $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$  попадет на этот отрезок б tolже  $\frac{5\pi}{6} - 2\pi = -\frac{7\pi}{6}$ .



**Ответ:** а)  $\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ ; б)  $-\frac{7\pi}{6}$ .

**Комментарий.**

Обоснованно получен верный ответ в пункте а, но отбор корней с помощью тригонометрической окружности в этом решении нельзя считать обоснованным. Типичный пример выполнения задания на 1 балл.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 10.**

а) Решите уравнение  $2\log_4(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$ .

**Ответ:** а)  $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ;  $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-\frac{7\pi}{6}$ .

№ 13  $2\log_4(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$   $\log_4(4\sin x) = t$  ОДЗ  
 $2t^2 - 5t + 2 = 0$   $D = 25 - 16 = 9$   $4\sin x > 0$   
 $\sin x > 0$   
 $x \neq k\pi$   $n \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} \log_4(4\sin x) = 2 \\ \log_4(4\sin x) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 8 = 4\sin x \\ 2 = 4\sin x \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = 2 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$

$t_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$   
 $t_2 = \frac{5+3}{4} = 2$   
 не подходит т.к.  $\sin x \leq 1$

$x = \frac{\sqrt{3}}{6} + 2\pi n, \frac{5\sqrt{3}}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$[-\frac{3\pi}{2}, 0]$

Отв: а)  $x = \frac{\sqrt{3}}{6} + 2\pi n, \frac{5\sqrt{3}}{6} + 2\pi n$   
 б)  $x = -\frac{7\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$

Ответ: а)  $\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ ; б)  $-\frac{7\pi}{6}$ .

**Комментарий.**

При решении простейшего логарифмического уравнения допущена ошибка, которая не является вычислительной, кроме того, при нахождении ОДЗ допущена ошибка, которая никак не может быть отнесена к вычислительной. Любая из этих ошибок уже не позволяет выставить положительный балл. Типичный пример выставления 0 баллов.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

## 2. Критерии проверки и оценка решений задания 14 ЕГЭ–2018

Задание 14 – стереометрическая задача, она разделена на пункты *a* и *b*. Для получения 2 баллов нужно, чтобы были выполнены оба пункта, а для получения 1 балла хватает выполнения одного из этих пунктов.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> <b>ИЛИ</b> обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

### Задача 14 (демонстрационный вариант 2018 г.).

Все рёбра правильной треугольной призмы  $ABC A_1 B_1 C_1$  имеют длину 6. Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $AA_1$  и  $A_1C_1$  соответственно.

- Докажите, что прямые  $BM$  и  $MN$  перпендикулярны.
- Найдите угол между плоскостями  $BMN$  и  $ABB_1$ .

**Решение.** а) Пусть точка  $H$  — середина  $AC$ . Тогда

$$BN^2 = BH^2 + NH^2 = (3\sqrt{3})^2 + 6^2 = 63.$$

Вместе с тем,

$$BM^2 + MN^2 = (3^2 + 6^2) + (3^2 + 3^2) = 63,$$

а тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник  $BMN$  является прямоугольным с прямым углом  $M$ .

- Проведём перпендикуляр  $NP$  к прямой  $A_1B_1$ . Тогда  $NP \perp A_1B_1$  и  $NP \perp A_1A$ . Следовательно,  $NP \perp ABB_1$ . Поэтому  $MP$  — проекция  $MN$  на плоскость  $ABB_1$ .

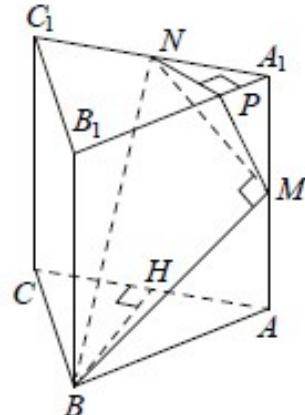
Прямая  $BM$  перпендикулярна  $MN$ , тогда по теореме о трёх перпендикулярах  $BM \perp MP$ . Следовательно, угол  $NMP$  — линейный угол искомого угла.

Длина  $NP$  равна половине высоты треугольника  $A_1B_1C_1$ , то есть  $NP = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

Поэтому  $\sin \angle NMP = \frac{NP}{MN} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$ .

Следовательно,  $\angle NMP = \arcsin \sqrt{\frac{3}{8}}$ .

**Ответ:** б)  $\arcsin \sqrt{\frac{3}{8}}$ .



### Задание 1

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  сторона  $AB$  основания равна 6, а боковое ребро  $AA_1$  равно 3. На рёбрах  $AB$  и  $B_1C_1$  отмечены точки  $K$  и  $L$  соответственно, причём  $AK = B_1L = 2$ . Точка  $M$  — середина ребра  $A_1C_1$ . Плоскость  $\gamma$  параллельна прямой  $AC$  и содержит точки  $K$  и  $L$ .

- Докажите, что прямая  $BM$  перпендикулярна плоскости  $\gamma$ .
- Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка  $M$ , а основание — сечение данной призмы плоскостью  $\gamma$ .

**Решение.**

а) Проведём через точки  $K$  и  $L$  прямые, параллельные  $AC$ . Пусть эти прямые пересекают рёбра  $BC$  и  $A_1B_1$  в точках  $K_1$  и  $L_1$  соответственно (рис. 1). Тогда трапеция  $KL_1LK_1$  является сечением исходной призмы плоскостью  $\gamma$ . Рассмотрим плоскость  $BB_1M$ . Пусть эта плоскость пересекает прямые  $AC$ ,  $KK_1$  и  $LL_1$  в точках  $N$ ,  $E$  и  $F$  соответственно. Четырёхугольник  $BB_1MN$  — прямоугольник, причём  $BB_1 = 3$ ,  $B_1M = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A_1B_1 = 3\sqrt{3}$ .

Кроме того,  $NE : EB = AK : KB = 1 : 2$ ,  $B_1F : FM = B_1L : LC_1 = 1 : 2$ , откуда  $MF = 2\sqrt{3}$ ,  $NE = \sqrt{3}$ . Пусть  $EH$  — высота трапеции  $EFMN$  (рис. 2), тогда  $FH = MF - NE = \sqrt{3}$ .

$$\text{Поскольку } \operatorname{tg} \angle MFE = \frac{EH}{FH} = \sqrt{3} = \frac{MB_1}{BB_1} = \operatorname{tg} \angle MBB_1,$$

$$\angle MFE = \angle MBB_1 = 90^\circ - \angle BMF,$$

то есть прямые  $EF$  и  $BM$  перпендикулярны.

Прямая  $KK_1$  параллельна прямой  $AC$ , которая перпендикулярна плоскости  $BB_1M$ . Значит, прямые  $KK_1$  и  $EF$  перпендикулярны прямой  $BM$ , поэтому прямая  $BM$  перпендикулярна плоскости  $\gamma$ .

б) Расстояние от точки  $M$  до плоскости  $\gamma$  равно  $MF \cdot \sin \angle MFE$ , а площадь трапеции  $KL_1LK_1$  равна

$$\frac{KK_1 + LL_1}{2} \cdot EF = \frac{\frac{2}{3}AC + \frac{1}{3}A_1C_1}{2} \cdot \frac{EH}{\sin \angle MFE} = \frac{9}{\sin \angle MFE}.$$

Значит, искомый объём равен  $\frac{1}{3} \cdot MF \cdot \sin \angle MFE \cdot \frac{9}{\sin \angle MFE} = 6\sqrt{3}$ .

**Ответ:** б)  $6\sqrt{3}$ .

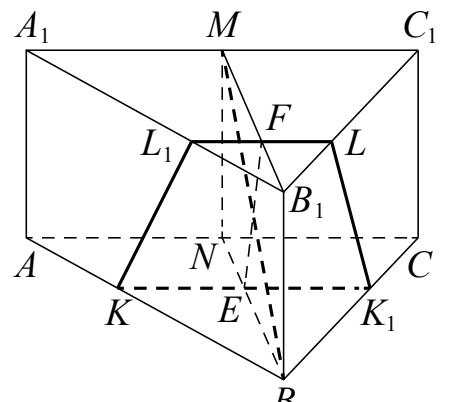


Рис. 1

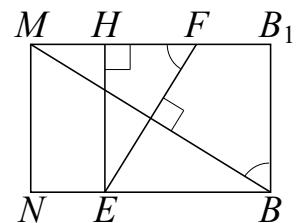


Рис. 2

## Задание 2

Основанием четырёхугольной пирамиды  $PABCD$  является трапеция  $ABCD$ , причём  $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$ . Плоскости  $PAB$  и  $PCD$  перпендикулярны плоскости основания,  $K$  — точка пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ .

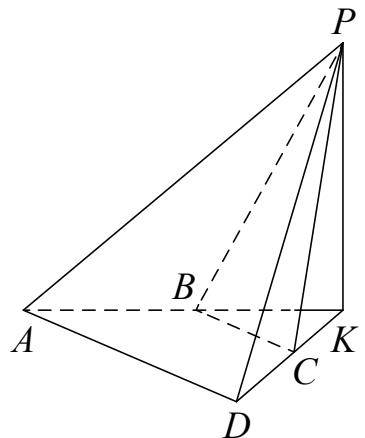
- Докажите, что плоскости  $PAB$  и  $PCD$  перпендикулярны.
- Найдите объём пирамиды  $KBCP$ , если  $AB = BC = CD = 4$ , а высота пирамиды  $PABCD$  равна 9.

Решение.

- а) Заметим, что  $\angle AKD = 90^\circ$ . Плоскости  $PAB$  и  $PCD$  перпендикулярны плоскости основания, поэтому они пересекаются по прямой, содержащей высоту пирамиды. Значит,  $PK$  — высота пирамиды. Таким образом, угол  $\angle AKD$  является линейным углом двугранного угла между плоскостями  $PAB$  и  $PCD$ . Значит, они перпендикулярны.
- б) Поскольку  $AB = CD$ , трапеция  $ABCD$  является равнобедренной. Значит,

$$\angle BAD = \angle ADC = \angle KBC = \angle KCB = 45^\circ;$$

$$BK = CK = \frac{\sqrt{2}}{2} BC = 2\sqrt{2}.$$



Таким образом, площадь треугольника  $KBC$  равна  $S_{KBC} = \frac{BK \cdot CK}{2} = 4$ ,

а объём пирамиды  $KBCP$  равен  $\frac{PK \cdot S_{KBC}}{3} = 12$ .

**Ответ:** б) 12.

## Примеры оценивания выполнения задания 14

### Пример 1.

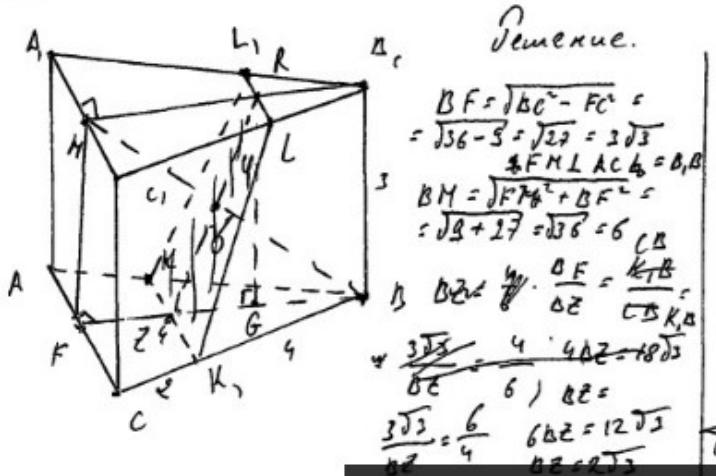
В правильной треугольной призме  $ABC A_1 B_1 C_1$  сторона  $AB$  основания равна 6, а боковое ребро  $AA_1$  равно 3. На рёбрах  $AB$  и  $B_1 C_1$  отмечены точки  $K$  и  $L$  соответственно, причём  $AK = B_1 L = 2$ . Точка  $M$  — середина ребра  $A_1 C_1$ . Плоскость  $\gamma$  параллельна прямой  $AC$  и содержит точки  $K$  и  $L$ .

а) Докажите, что прямая  $BM$  перпендикулярна плоскости  $\gamma$ .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка  $M$ , а основание — сечение данной призмы плоскостью  $\gamma$ .

**Ответ:** б)  $6\sqrt{3}$ .

1. 14



Дано

$ABC A_1 B_1 C_1$  — прав. треуг. призм.

$AA_1 = 3$ ,  $AB = 6$ ,  $AK = 2$ ,

$B_1 L = 2$ .  $A, M = MC_1 = 3$ .

$\gamma$  — плоскость  $\parallel AC$  и

прям. содержащая  $K_1 L$ .

а) Док-е  $BM \perp \gamma$

б)  $V = AKK_1 LL_1$

$$RG \parallel BF, RE = B_1 B, ZG = FB - (FZ + GB) \quad FZ = GD \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2} ZB$$

$$ZG = 3\sqrt{3} - (\sqrt{3} + \sqrt{3}) = \sqrt{3}. \quad RZ = \sqrt{RG^2 + ZG^2} = \sqrt{3+3} = \sqrt{6} = 2\sqrt{3}$$

$\Delta BFM \sim \Delta BZG$  по  $\angle BFM = \angle BZG$  и  $\angle B = \angle B$

$\Delta EOB \sim \Delta MOB$  т.к.  $\angle MOB = \angle EOB$  (т.к. они вертикальные),

$ZB = HR = 2\sqrt{3}$ ,  $\angle ZBM = \angle OM R$  т.к. это углы, напротив. или между

ими 2-го вида II приз  $B_1 M$  и  $FB$ . след. След.  $ZB = RO = OZ$

по теореме логарифм.  $ZB = \sqrt{BO^2 + OZ^2} = 2\sqrt{3} = \sqrt{6+3} = 2\sqrt{3}$

след  $\triangle BZO$  — прямоугл.: след  $ZO \perp ZR$ . след  $ZO \perp \gamma$  след  $ZM \perp \gamma$ .

$$V = \frac{1}{3} MO \cdot SKK_1 LL_1 = \frac{1}{3} \sqrt{3} \cdot \left( \frac{(KK_1 + L_1) \cdot RZ}{2} \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{2+4}{2} \cdot 2\sqrt{3} \right) = 2\sqrt{3}$$

*Ошибка: 12\sqrt{3}*

1. 17.

*Ответ:  $6\sqrt{3}$ .*

### Комментарий.

Доказательство утверждения в пункте а недостаточно обоснованно. С использованием утверждения пункта а верно получен ответ в пункте б.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

## Пример 2.

В правильной треугольной призме  $ABC A_1 B_1 C_1$  сторона  $AB$  основания равна 6, а боковое ребро  $AA_1$  равно 3. На рёбрах  $AB$  и  $B_1 C_1$  отмечены точки  $K$  и  $L$  соответственно, причём  $AK = B_1 L = 2$ . Точка  $M$  — середина ребра  $A_1 C_1$ . Плоскость  $\gamma$  параллельна прямой  $AC$  и содержит точки  $K$  и  $L$ .

- Докажите, что прямая  $BM$  перпендикулярна плоскости  $\gamma$ .
- Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка  $M$ , а основание — сечение данной призмы плоскостью  $\gamma$ .

**Ответ:** б)  $6\sqrt{3}$ .

N14

a) ВМ перпендикулярна любой прямой, параллельной АС и лежащей в плоскости (АВС) по теореме о 3-х перпендикулярах  $\Rightarrow BM \perp PK$   
 Проведём QH (QH  $\perp NL$  и  $QH \perp KP$ )  $\Delta QHM \sim \Delta B_1 B$ ,  $B_1 B = 2$   $\Rightarrow$   
 $\angle MOH = \angle MB_1 B = 90^\circ$ , т.к.  $B_1 B \perp PK$  и  $B_1 B \perp QH \Rightarrow$   
 $\Rightarrow BM \perp \gamma$ . т.т.д.

б) (1) О делит ВМ пополам из  $\Delta BMB_1$ , по т.畢фагора  $BM = 6 \Rightarrow BO = 3$  из  $\Delta B_1 B$ ,  $QH$  по т.畢фагора  $B_1 H = \sqrt{3}$  из  $\Delta B_1 BH$ , по т.畢фагора  $BH = 2\sqrt{3}$  из  $\Delta BOH$  по т.畢фагора  $OH = \sqrt{3}$ . (2) О делит QH пополам  $\Rightarrow QH = 2OH = 2\sqrt{3}$

$$V_{MKPLN} = \frac{1}{3} \cdot MO \cdot S_{KPLN} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{2+4}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

(KPLN — правильная трапеция)

Ответ:  $6\sqrt{3}$

## Комментарий.

Утверждение в пункте а не доказано. В основе решения пункта б лежит не обоснованное утверждение.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

### Пример 3.

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  сторона  $AB$  основания равна 6, а боковое ребро  $AA_1$  равно 3. На рёбрах  $AB$  и  $B_1C_1$  отмечены точки  $K$  и  $L$  соответственно, причём  $AK = B_1L = 2$ . Точка  $M$  — середина ребра  $A_1C_1$ . Плоскость  $\gamma$  параллельна прямой  $AC$  и содержит точки  $K$  и  $L$ .

- Докажите, что прямая  $BM$  перпендикулярна плоскости  $\gamma$ .
- Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка  $M$ , а основание — сечение данной призмы плоскостью  $\gamma$ .

**Ответ:** б)  $6\sqrt{3}$ .

3)  $\angle BDK \approx \angle BCA$  по 2-му члену ( $\angle BKO = \angle BAC$  как соотв.).  $\Rightarrow \angle BDK = \angle BCA$

4)  $\triangle B_1EL \approx \triangle B_1K_1C_1$  ( $\angle B_1EL = \angle B_1K_1C_1$ )

5) из (3) и (4)  $B_1O_1 = \frac{1}{3} B_1M \quad BO = \frac{2}{3} BF$

~~6)~~  $O_1M = B_1M - B_1O_1 = B_1M - \frac{1}{3} B_1M = \frac{2}{3} B_1M = \frac{2}{3} BF$

7)  $\angle O_1HM = \angle BOH$  по 2-му члену и алогиче методу  
( $\angle MO_1H = \angle NOB$  как нал.  $\angle O_1MB = \angle NBO$  как н.к.  
 $O_1M = \frac{2}{3} B_1M = \frac{2}{3} BF = BO$ )

*Выводы*

1)  $B_1M = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$       2)  $O_1M = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

3)  $O_1T \perp BF$  (BF  $\perp$  (BF и))      4)  $TO = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$

5) по т. Пиф.  $BM = \sqrt{9+27} = 6 \Rightarrow HM = BH = \frac{1}{2} \cdot BM = 3$ .

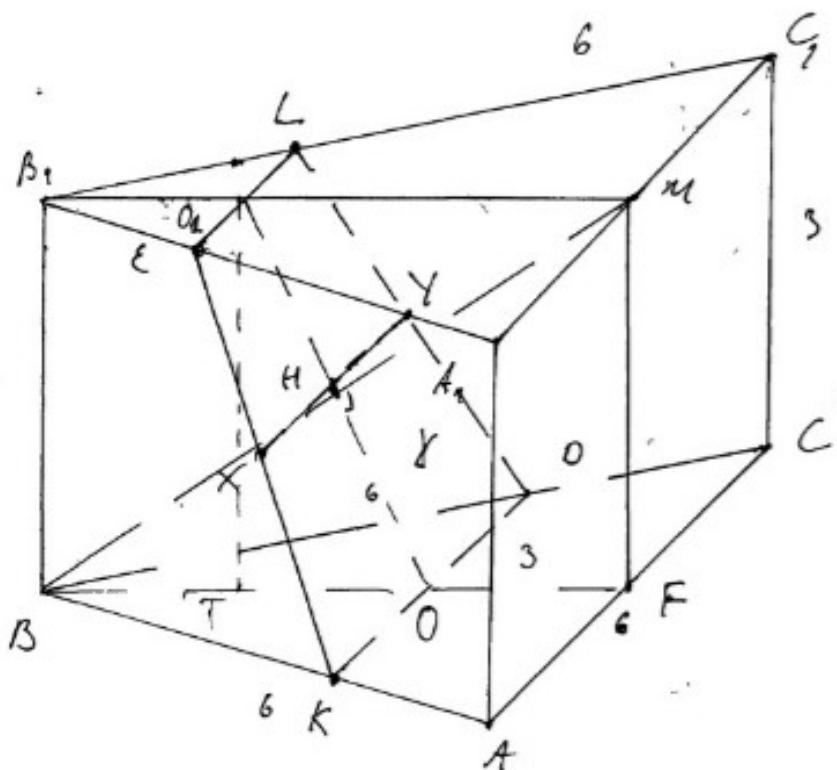
6)  $O_1O = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} \Rightarrow O_1H = HO = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3}$ .

7) по теор. обратной теореме Пифагора н.к.  
 $O_1M^2 = O_1H^2 + HM^2 = 9+3 = 12$ , то  $\angle O_1HM = 90^\circ$  и  $O_1H \perp MH$ .

8)  $MF \perp AL$  (т.к. призма правильная) и  $MF \perp KO$  н.к.  
 $KD \parallel AL$

9) н.к.  $EL \perp KO$ , но  $EL \parallel KO$  — наименее

10) XY — средние линии пр.  $EL \parallel KO$  и  $O_1M = HO \Rightarrow HE \parallel YG$   
плоскости ( $EL \parallel YG$ )      11) н.к.  $\triangle KEP \sim \triangle YGU$  См. на обороте



2)  ~~$XY \parallel KP$~~   $MF \perp KO$  и  $MF \perp B \cdot F$ , ~~тогда  $KO \perp XY$~~   
~~так как  $AH \perp KO$ .~~ тогда по признаку параллельности прямых  $KO \perp (BFM)$   $\Rightarrow$  ~~тогда~~ применим 6 кн.  
 $(BFM)$  не перпендикулярна  $KO \Rightarrow BM \perp KO$  и  
 $BK \perp XY$   $\Rightarrow (KOL) = \gamma$

3) ~~и. к.~~  $BK \perp XY$  и  $BK \perp O_1O$ , но по признаку параллельности прямых  $BK \perp (KOL)$  ~~и~~  $BK \perp XY$  и  $O_1O \perp XY$ .

5) 1)  $S_{\triangle EKO} = \frac{1}{2}(EL + KO) \cdot O_1O$

2)  $EL = AC_1 \cdot h_1 = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$

3)  $KO = AC \cdot h_1 = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$

4)  $S_{\triangle EKO} = \frac{1}{2}(2+4) \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

5)  $V_{\text{млеко}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h = 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot MH = 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = 6\sqrt{3}$

Ответ:  $6\sqrt{3}$ . ~~кг/с.ед.~~

### Комментарий.

Доказательство утверждения в пункте а содержит неточности. В решении пункта б обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

#### Пример 4.

Основанием четырёхугольной пирамиды  $PABCD$  является трапеция  $ABCD$ , причём  $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$ . Плоскости  $PAB$  и  $PCD$  перпендикулярны плоскости основания,  $K$  — точка пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ .

а) Докажите, что плоскости  $PAB$  и  $PCD$  перпендикулярны.

б) Найдите объём пирамиды  $KBCP$ , если  $AB = BC = CD = 4$ , а высота пирамиды  $PABCD$  равна 9.

**Ответ:** б) 12.

a)  $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ \Rightarrow \angle DKB = 90^\circ$ .  
 $\text{плоск.}(DKP) \perp \text{плоск.}(ADK) \left\{ \begin{array}{l} AK \perp DK \\ \Rightarrow AK \perp \text{плоск.}(DPK) \end{array} \right. \Rightarrow$   
 $AK \subset \text{ни.}(AKP) \Rightarrow \text{ни.}(AKP) \perp \text{ни.}(DPK)$   
 $\Rightarrow \text{плоскость } PAB \perp \text{ни.ти } PCD$ .

б)  $AB = BC = CD = 4$ .  
 $AB = CD \Rightarrow \text{трапеция - равн. б.} \Rightarrow \angle KAD = \angle HDK \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle KBC = \angle BCK \Rightarrow BK = CK = \frac{CB}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ .  
 $AK \perp \text{ни.}(DPK) \Rightarrow AK \perp PK$ .  
 $\text{ни.}(AKP) \perp \text{ни.}(ADK) \left\{ \begin{array}{l} AK \perp DK \\ \Rightarrow DK \perp \text{ни.}(APK) \Rightarrow DK \perp PK \end{array} \right.$   
 $\left. \begin{array}{l} AK \perp PK \\ DK \perp PK \end{array} \right\} \Rightarrow PK \perp \text{ни.}(ADK) \Rightarrow PK - \text{высота}$ .  
 $V(KBCP) = \frac{1}{3} \cdot PK \cdot \frac{1}{2} \cdot CK \cdot BK = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} =$   
 $= 3 \cdot 4 = 12$ .  
**Ответ:**  $V_{KBCP} = 12$ .

#### Комментарий.

Утверждение в пункте а не доказано. В решении пункта б обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

### Пример 5.

Основанием четырёхугольной пирамиды  $PABCD$  является трапеция  $ABCD$ , причём  $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$ . Плоскости  $PAB$  и  $PCD$  перпендикулярны плоскости основания,  $K$  — точка пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ .

а) Докажите, что плоскости  $PAB$  и  $PCD$  перпендикулярны.

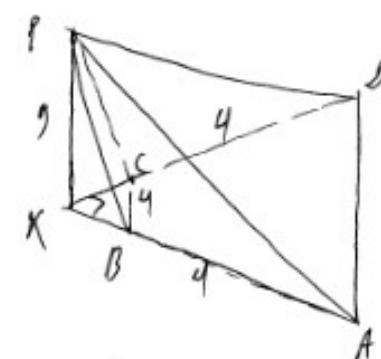
б) Найдите объём пирамиды  $KBCP$ , если  $AB = BC = CD = 4$ , а высота пирамиды  $PABCD$  равна 9.

**Ответ:** б) 12.

(14) Дано:

$PABCD$  — 4-ярн. пирамида  
 $ABCD$  — трапеция ( $AD \parallel BC$ )  
 $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$   
 $AB \cap CD = K$

а) Доказать:  $PAB \perp PCD$   
б) Найти:  $V_{KBCP}$ , если  
 $AB = BC = CD = 4$ ,  $PK = 9$



a)  $PK$  — высота пирамиды  
 $\angle OKA = 180^\circ - (\angle BAD + \angle ADC) = 90^\circ$   
Заметим, что  $\angle OKA$  — прямой  
угол двугранного угла между плоскостями  $PAB$  и  $PCD$ ,  
т.к.  $OK \perp PK$  и  $AK \perp PK$ .  
 $\angle OKA = 90^\circ \Rightarrow PAB \perp PCD$ , ч.т.д.

б)  $AB = BC = CD = 4 \Rightarrow AD = 8$ ;  
 $S_{KCD} = \frac{4+8}{2} \sqrt{12} = 12\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

$\frac{S_{KCD}}{S_{KCB}} = \frac{BC}{CD} = \frac{4}{2} \Rightarrow \triangle KCB \sim \triangle KDA \Rightarrow \frac{S_{KCB}}{S_{KDA}} = \frac{S_{KCD}}{4} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow S_{KCB} = \frac{4\sqrt{3}}{4} (12\sqrt{3} + S_{KDA}) \Rightarrow \frac{8S_{KDA}}{4} = 3\sqrt{3} \Rightarrow S_{KCB} = 4\sqrt{3}$

$V_{PKCB} = \frac{1}{3} PK \cdot S_{KCB} = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 4\sqrt{3} = 3 \cdot 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ .

Ответ:  $12\sqrt{3}$

### Комментарий.

Утверждение в пункте а не доказано. В решении пункта б допущена ошибка и получен неверный ответ.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

## Пример 6.

Основанием четырёхугольной пирамиды  $PABCD$  является трапеция  $ABCD$ , причём  $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$ . Плоскости  $PAB$  и  $PCD$  перпендикулярны плоскости основания,  $K$  — точка пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ .

а) Докажите, что плоскости  $PAB$  и  $PCD$  перпендикулярны.

б) Найдите объём пирамиды  $KBCP$ , если  $AB = BC = CD = 4$ , а высота пирамиды  $PABCD$  равна 9.

**Ответ:** б) 12.

Н14

Дано:  
 $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$   
 $(PAB) \perp (ADK)$   
 $(PCD) \perp (ADK)$   
 $ABCD$  — трапеция  
 $K = AB \cap CD$

а) Док-те:  $PAB \perp PCD$

б)  $V_{KBCP} = ?$ , если:  
 $AB = BC = CD = 4$   
 $PK = 9$

a)  $BC \parallel AD$  (т.к.  $ABCD$  — трапеция)  $\Rightarrow \begin{cases} \angle KBC = \angle CAD \\ \angle KCB = \angle CDA \end{cases}$   
(как внутр. одногр. и внутр. внешн. одногр. вспом. и внутр. при секущей  $AK \not\parallel KD$ )  
 $\Rightarrow \angle KBC + \angle KCB = 90^\circ$  (но ужеНо  $\angle BAD + \angle ABC = 90^\circ$ )  
 $\Rightarrow \angle BKC = 90^\circ$  ( $180^\circ - \angle KBC - \angle KCB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ )  
т.к. ~~П~~  $PAB \perp ADK$  и  $PKD \perp ADK$ , то  
 $\angle AKP = \angle DKP = 90^\circ \Rightarrow AK \perp PK$  и  $AK \perp DK \Rightarrow$   
 $\Rightarrow PAK \perp PKD$  т.н.з.

б)  $AB = CD \Rightarrow ABCD$  — равнобокая трапеция.  
 $\angle BAD + \angle CDA = 90^\circ$   
 $\angle BAD = \angle CDA$  (как углы при основании  
равнобокой трап.)  $\Rightarrow \angle KBC = \angle KCB = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle BKC$  — равнобедр. прямоугольный треуг.  
Очевидно из  $K$  перпендикуляр на  $BC$ ;  $KS \perp BC$ ;  $BS = BC$   
(медиана = высота в равнобедр.  $\Delta$ )  $\Rightarrow BS = 2$

$KB = \frac{BS}{\cos 45^\circ} = \frac{2}{\cos 45^\circ} = 2\sqrt{2} = KC \Rightarrow S_{\triangle BKC} = \frac{1}{2}(2\sqrt{2})^2 = 4$

$V_{KBCP} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle BKC} \cdot KP = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 9 = 12$  Отвем: 12.

**Комментарий.**

Утверждение в пункте а не доказано. В решении пункта б обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

### 3. Критерии проверки и оценка решений задания 15 ЕГЭ–2018

Задание №15 – это неравенство – дробно-рациональное, логарифмическое или показательное.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

При этом в первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: «<» вместо «≤», или наоборот. **Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов».**

#### Задача 15 (демонстрационный вариант 2018 г.).

Решите неравенство  $\frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$ .

Решение.

Пусть  $t = 3^x$ , тогда неравенство примет вид:

$$\frac{t^2 - 6t + 4}{t-5} + \frac{6t - 51}{t-9} \leq t + 5; \quad \frac{(t-1)(t-5)}{t-5} - \frac{1}{t-5} + \frac{6(t-9)}{t-9} + \frac{3}{t-9} \leq t + 5;$$

$$-\frac{1}{t-5} + \frac{3}{t-9} \leq 0; \quad \frac{t-3}{(t-5)(t-9)} \leq 0,$$

откуда  $t \leq 3$ ;  $5 < t < 9$ .

При  $t \leq 3$  получим:  $3^x \leq 3$ , откуда  $x \leq 1$ .

При  $5 < t < 9$  получим:  $5 < 3^x < 9$ , откуда  $\log_3 5 < x < 2$ .

Решение исходного неравенства:

$$x \leq 1; \quad \log_3 5 < x < 2.$$

Ответ:  $(-\infty; 1]; (\log_3 5; 2)$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 1, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

### Задача 1.

Решите неравенство  $2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}$ .

Решение.

Пусть  $t = 2^x$ , тогда неравенство примет вид:

$$t - 6 - \frac{9t - 37}{t^2 - 7t + 12} \leq \frac{1}{t - 4}; t - 6 - \frac{9t - 37}{(t-3)(t-4)} - \frac{t-3}{(t-3)(t-4)} \leq 0;$$

$$t - 6 - \frac{10}{t-3} \leq 0, \text{ где } t \neq 4; \frac{(t-1)(t-8)}{t-3} \leq 0, \text{ где } t \neq 4,$$

откуда  $t \leq 1; 3 < t < 4; 4 < t \leq 8$ .

При  $t \leq 1$  получим:  $2^x \leq 1$ , откуда  $x \leq 0$ .

При  $3 < t < 4$  получим:  $3 < 2^x < 4$ , откуда  $\log_2 3 < x < 2$ .

При  $4 < t \leq 8$  получим:  $4 < 2^x \leq 8$ , откуда  $2 < x \leq 3$ .

Решение исходного неравенства:

$$x \leq 0; \log_2 3 < x < 2; 2 < x \leq 3.$$

**Ответ:**  $(-\infty; 0]; (\log_2 3; 2); (2; 3]$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек 0 и/или 3, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

### Задача 2.

Решите неравенство  $\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4(64x)} \geq \frac{\log_4 x^4 + 16}{\log_4^2 x - 9}$ .

Решение.

Пусть  $t = \log_4 x$ , тогда неравенство примет вид:

$$\frac{t+3}{t-3} + \frac{t-3}{t+3} \geq \frac{4t+16}{t^2-9}; \quad \frac{t^2+6t+9}{(t-3)(t+3)} + \frac{t^2-6t+9}{(t-3)(t+3)} - \frac{4t+16}{(t-3)(t+3)} \geq 0;$$

$$\frac{2t^2-4t+2}{(t-3)(t+3)} \geq 0; \quad \frac{2(t-1)^2}{(t-3)(t+3)} \geq 0,$$

откуда  $t < -3$ ;  $t = 1$ ;  $t > 3$ .

При  $t < -3$  получим:  $\log_4 x < -3$ , откуда  $0 < x < \frac{1}{64}$ .

При  $t = 1$  получим:  $\log_4 x = 1$ , откуда  $x = 4$ .

При  $t > 3$  получим:  $\log_4 x > 3$ , откуда  $x > 64$ .

Решение исходного неравенства:  $0 < x < \frac{1}{64}$ ;  $x = 4$ ;  $x > 64$ .

**Ответ:**  $\left(0; \frac{1}{64}\right); 4; (64; +\infty)$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 4, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

## Примеры оценивания решений задания 15

**Пример 1.**

Решите неравенство  $2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}$ .

**Ответ:**  $(-\infty; 0] \cup (\log_2 3; 2) \cup (2; 3]$ .

$$2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}; \quad \text{N}^{15.}$$

$$t = 2^x;$$

$$t - 6 - \frac{9t - 37}{t^2 - 7t + 12} \leq \frac{1}{t - 4};$$

$$t - 6 - \frac{9t - 37}{(t-3)(t-4)} \leq \frac{1}{t - 4};$$

$$t - 6 - \frac{9t - 37 + t - 3}{(t-3)(t-4)} \leq 0;$$

$$t - 6 - \frac{10(t-4)}{(t-3)(t-4)} \leq 0;$$

$$\frac{(t-9)(t-6)(t-3) - 10}{(t-3)(t-4)} \leq 0;$$

$$\frac{(t-9)(t-6)(t-8)}{(t-3)(t-4)} \leq 0;$$

$$\text{ODZ: } \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq \log_2 3 \\ 4^x - 7 \cdot 2^x + 12 \neq 0 \\ (2^x - 3)(2^x - 4) \neq 0 \\ t > 0 \end{cases}$$

$$0 < 2^x \leq 1 \quad 3 < 2^x \leq 4 \quad 4 < 2^x \leq 8$$

$$x \leq 0; \quad \begin{cases} x > \log_2 3; \\ x < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2; \\ x \leq 3; \end{cases}$$

*Ответ:*  $(-\infty; 0] \cup (\log_2 3; 2) \cup (2; 3]$ .

**Комментарий.**

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 2.**

Решите неравенство  $2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}$ .

**Ответ:**  $(-\infty; 0] \cup (\log_2 3; 2) \cup (2; 3]$ .

$$15) 2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}$$

Пусть  $2^x = t$ . Тогда

$$t - 6 - \frac{9t - 37}{(t-4)(t-3)} \leq \frac{1}{t-4} \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} t \neq 4 \\ t \neq 3 \\ t \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t \neq 4 \\ t \neq 3 \\ t \neq -3 \end{cases} \quad \begin{cases} t \neq 4 \\ t \neq 3 \\ t \neq 2 \\ t \neq \log_2 3 \end{cases}$$

$$\frac{t^3 - 13t^2 + 54t - 72 - 9t + 37 - t + 3}{(t-4)(t-3)} \leq 0$$

$$\frac{t^3 - 13t^2 + 44t - 32}{(t-4)(t-3)} \leq 0$$

$$\frac{(t-4)(t^2 - 9t + 8)}{(t-4)(t-3)} \leq 0$$

$$\frac{t^2 - 11t + 8}{t-3} \leq 0$$

Обратимо

$$\frac{(2^x - 1)(2^x - 8)}{2^x - 3} \leq 0$$

Итак,  $t \in (-\infty; 0] \cup (1; 2) \cup (3; 4)$

Ответ:  $(-\infty; 0] \cup (\log_2 3; 2) \cup (2; 3)$

**Комментарий.**

В решение содержится запись «ОДЗ», которая может трактоваться по-разному. Ответ получен неверный, но он отличается от верного только исключением точки 3.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 3.**

Решите неравенство  $2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}$ .

**Ответ:**  $(-\infty; 0] \cup (\log_2 3; 2) \cup (2; 3]$ .

$$15. \quad 2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}$$

Пусть  $t = 2^x$ , то  $t - 6 - \frac{9t - 37}{t^2 - 7t + 12} - \frac{1}{t-4} \leq 0$

$$D = 95 - 9 \cdot 12 = 7 \quad t - 6 - \frac{9t - 37}{(t-3)(t-4)} - \frac{1}{t-4} \leq 0$$

$$t_1 = \frac{7+1}{2}, \quad t_2 = \frac{7-1}{2}, \quad t_3 = \frac{(t-2t+12)(t-6)-(9t-37)-(t-3)}{(t-3)(t-4)} \leq 0$$

$$(t-3)(t-4), \quad t^2 - 7t + 12 \quad (t^2 - 13t + 32) - (9t - 37) - (t - 3) \leq 0$$

$$t^2 - 13t + 54t - 32 - 9t + 37 - t + 3 \leq 0$$

$$t^2 - 13t + 94t - 32 \leq 0$$

Схема Горнера: Пусть  $t=1$ , то  
 $1 - 13 + 94 - 32 = 95 - 95 = 0$  — ноль

	1	-13	94	-32
1	1	-12	32	0

$$(t-1)(t^2 - 12t + 32) \leq 0$$

$$t^2 - 12t + 32 = 0$$

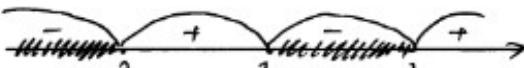
$$D = 144 - 4 \cdot 32 = 144 - 128 = 16$$

$$t_2 = \frac{12-4}{2} = 4 \quad t_3 = \frac{12+4}{2} = 8$$

$$t_1 = 1 \quad t_2 = 4 \quad t_3 = 8$$

$$2^x = 1 \quad 2^x = 4 \quad 2^x = 8$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3$$

$$x \in (-\infty; 0] \cup [2; 3]$$


Ответ:  $(-\infty; 0] \cup [2; 3]$

**Комментарий.**

При решении неравенства допущена ошибка — допущен неравносильный переход. Это привело к неверному ответу.

**Оценка эксперта. 0 баллов.**

#### Пример 4.

Решите неравенство  $\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4(64x)} \geq \frac{\log_4 x^4 + 16}{\log_4^2 x - 9}$ .

Ответ:  $(0; \frac{1}{64}) \cup [4; \infty)$ .

N15.

$$\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4(64x)} \geq \frac{\log_4 x^4 + 16}{\log_4^2 x - 9}$$

$$0.93 \quad \begin{cases} x > 0 \\ \log_4 x - 3 \neq 0 \\ \log_4(64x) \neq 0 \\ \log_4^2 x - 9 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_4 x \neq 3 \\ 64x \neq 1 \\ (\log_4 x - 3)(\log_4 x + 3) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 64 \\ x \neq \frac{1}{64} \\ \log_4 x \neq -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 64 \\ x \neq \frac{1}{64} \end{cases}$$

$$x \in (0; \frac{1}{64}) \cup (\frac{1}{64}; 64) \cup (64; +\infty)$$

$$\frac{\log_4 x + 3}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4 x + 3} \geq \frac{4 \log_4 x + 16}{(\log_4 x - 3)(\log_4 x + 3)}$$

$$t = \log_4 x \quad t \neq \pm 3$$

$$\frac{t+3}{t-3} + \frac{t-3}{t+3} \geq \frac{4t+16}{(t-3)(t+3)}$$

$$\frac{(t+3)^2 + (t-3)^2 - 4t - 16}{(t-3)(t+3)} \geq 0$$

$$\frac{t^2 + 6t + 9 + t^2 - 6t + 9 - 4t - 16}{(t-3)(t+3)} \geq 0$$

$$\frac{2t^2 - 4t + 2}{(t-3)(t+3)} \geq 0 \quad \frac{t^2 - 2t + 1}{(t-3)(t+3)} \geq 0 \quad \frac{(t-1)^2}{(t+3)(t-3)} \geq 0 \quad \begin{array}{c} \boxed{t > 0} \\ -3 \quad 1 \quad 3 \end{array} \quad t$$

$$t \in (-\infty; -3) \cup \{1\} \cup (3; +\infty) \Rightarrow \log_4 x \in (-\infty; -3) \cup \{1\} \cup (3; +\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (0; \frac{1}{64}) \cup \{4\} \cup (64; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } x \in (0; \frac{1}{64}) \cup \{4\} \cup (64; +\infty)$$

**Комментарий.**

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта. 2 балла.**

**Пример 5.**

Решите неравенство  $\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4(64x)} \geq \frac{\log_4 x^4 + 16}{\log_4^2 x - 9}$ .

Ответ:  $(0; \frac{1}{64}) \cup (4; (64; +\infty))$ .

$$15. \frac{\log_4(64x)}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4(64x)} \geq \frac{\log_4 x^4 + 16}{\log_4^2 x - 9}$$

ОДЗ.  $x > 0, x \in (0; +\infty)$

$$\frac{\log_4 64 + \log_4 x}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4 64 + \log_4 x} - \frac{4 \log_4 x - 16}{\log_4^2 x - 9} \geq 0$$

$$\frac{3 + \log_4 x}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{3 + \log_4 x} - \frac{4 \log_4 x - 16}{\log_4^2 x - 9} \geq 0$$

Пусть  $\log_4 x = t$ , тогда

$$\frac{3+t}{t-3} + \frac{t-3}{3+t} - \frac{4t-16}{t^2-9} \geq 0$$

$$\frac{(t+3)(t+3) + (t-3)(t-3)}{(t-3)(t+3)} - \frac{4t-16}{(t-3)(t+3)} \geq 0$$

$$\frac{t^2 + 3t + 3t + 9 + t^2 - 3t - 3t + 9 - 4t + 16}{(t-3)(t+3)} \geq 0$$

$$\frac{2t^2 - 4t + 2}{(t-3)(t+3)} \geq 0$$

$$\frac{2(t-1)^2}{(t-3)(t+3)} \geq 0$$



$$\log_4 x < -3$$

$$x < \frac{1}{64}$$

$$\log_4 x = 1$$

$$x = 4$$

$$\log_4 x > 3$$

$$x > 64$$

Ответ:  $x \in (-\infty; \frac{1}{64}) \cup (4) \cup (64; +\infty)$

**Комментарий.**

При решении неравенства допущена ошибка при решении простейшего логарифмического неравенства. Ответ получен неверный. В решении содержится ошибочное утверждение, связанное с ОДЗ.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 6.**

Решите неравенство  $\frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$ .

Ответ:  $(-\infty; 1] \cup (\log_3 5; 2)$ .

$$\frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$$

$$\frac{(3^{2x} - 2 \cdot 3^x + 4)(3^x - 5) + (2 \cdot 3^x - 51)(3^x - 5) - (3^x - 5)(3^x + 5)(3^x - 5)}{(3^x - 5)(3^x - 9)} \leq 0$$

$$\frac{3^{2x} - 6 \cdot 3^{2x} + 4 \cdot 3^x - 9 \cdot 3^{2x} + 54 \cdot 3^x - 36 + 6 \cdot 3^{2x} - 51 \cdot 3^x - 30 \cdot 3^x + 255 - (3^{2x} - 25)(3^x - 5)}{(3^x - 3^{\log_3 5})(3^x - 3^2)} \leq 0$$

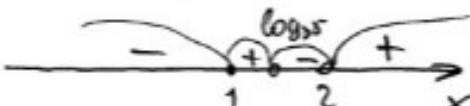
знаки  $(3^x - 3^{\log_3 5})$  и  $(3^x - 3^2)$  совпадают со знаками  $(x - \log_3 5)$  и  $(x - 2)$

$$\frac{3^{2x} - 9 \cdot 3^{2x} - 23 \cdot 3^x + 219 - 3^{2x} + 8 \cdot 3^{2x} + 25 \cdot 3^x - 225}{(x - \log_3 5)(x - 2)} \leq 0$$

$$\frac{2 \cdot 3^x - 6}{(x - \log_3 5)(x - 2)} \leq 0 \quad ; \quad \frac{3^x - 3^1}{(x - \log_3 5)(x - 2)} \leq 0 \quad \text{знак } (3^x - 3^1) \text{ совпадает с } (x - 1)$$

$$\frac{x - 1}{(x - \log_3 5)(x - 2)} \leq 0$$

$$1 < \log_3 5 < 2$$



$$\Rightarrow x \in \{-\infty; 1] \cup (\log_3 5; 2)$$

$$\text{Ответ: } \{-\infty; 1] \cup (\log_3 5; 2)$$

**Комментарий.**

Обоснованно получен верный ответ. Левая круглая скобка в ответе может быть прочитана как фигурная, но это не является основанием для того, чтобы считать ответ неверным.

**Оценка эксперта. 2 балла.**

**Пример 7.**

Решите неравенство  $\frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$ .

Ответ:  $(-\infty; 1] \cup (\log_3 5; 2)$ .

$$\frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$$

$$\frac{3^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$$

$$3^x - 9 > 0 \quad 3^x - 5 > 0$$

$$3^x = 9 \quad 3^x = 5$$

$$x > 2 \quad x > \log_3 5$$

Пусть  $3^x = t$

$$\frac{t^2 - 6t + 4}{t - 5} + \frac{6t - 51}{t - 9} \leq t + 5$$

$$\frac{(t^2 - 6t + 4) \cdot (t - 9) + (6t - 51)(t - 5)}{(t - 5)(t - 9)} \leq (t + 5)(t - 5)(t - 9)$$

$$t^3 - 6t^2 + 4t - 9t^2 + 54t - 36 + 6t^2 - 30t - 51t + 255 \leq t^3 - 25t - 9t^2 + 225$$

$$t^3 - 6t^2 + 4t - 9t^2 + 54t - 36 + 6t^2 - 30t - 51t + 255 - t^3 + 25t + 9t^2 - 225 \leq 0$$

$$2t - 6 = 0 \quad 3^x = 3$$

$$2t = 6 \quad x = 1$$

$$t = 3 \quad x \leq 1$$

Ответ:  $(-\infty; 1] \cup (\log_3 5; 2)$

**Комментарий.**

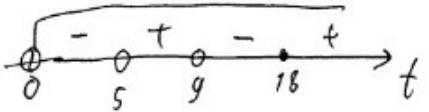
В решении допущены ошибочные утверждения, присутствует неравносильный переход при решении неравенств, получен ответ (совпадающий с верным).

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

### Пример 8.

Решите неравенство  $\frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$ .

Ответ:  $(-\infty; 1]; (\log_3 5; 2)$ .

$\frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$ $\frac{9^x - 2 \cdot 3 \cdot 3^x + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 3^x - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$ $3^x = t; t > 0$	<p>Одз:</p> <p><math>3^x - 5 \neq 0</math></p> <p><math>3^x - 9 \neq 0</math></p> <p><math>x \neq 2</math></p> <p><math>x &lt; 5</math></p> <p><math>x &gt; \log_3 5</math></p>
$\frac{t^2 - 6t + 4}{t-5} + \frac{6t - 51}{t-9} - t - 5 \leq 0$ $\frac{(t^2 - 6t + 4)(t-9) + (6t - 51)(t-5) - (t+5)(t-5)(t-9)}{(t-5)(t-9)} \leq 0$	
$\frac{2(t-18)}{(t-5)(t-9)} \leq 0$ 	
$t \in (0; 5) \cup (9; 18]$ $3^x \in (0; 5) \cup (9; 18]$ $x \in (-\infty; \log_3 5) \cup (2; \log_3 18]$	
<p>Ответ: <math>x \in (-\infty; \log_3 5) \cup (2; \log_3 18]</math></p>	

### Комментарий.

Ответ неверный. При преобразовании числителя допущена вычислительная ошибка, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.

Оценка эксперта: 1 балл.

#### 4. Критерии проверки и оценка решений задания 16 ЕГЭ–2018

Задание №16 – это планиметрическая задача. В пункте *a* теперь нужно **доказать** геометрический факт, в пункте *b* – найти (вычислить) геометрическую величину.

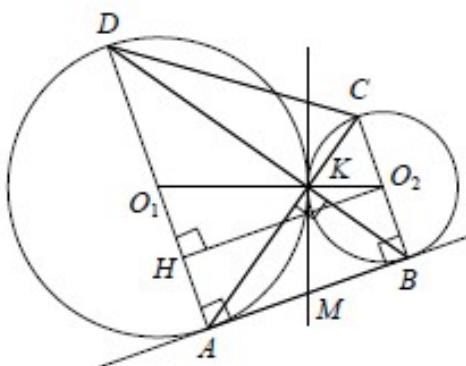
Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> <b>ИЛИ</b> имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , <b>ИЛИ</b> при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, <b>ИЛИ</b> обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

#### Задача 16 (демонстрационный вариант 2018 г.).

Две окружности касаются внешним образом в точке *K*. Прямая *AB* касается первой окружности в точке *A*, а второй — в точке *B*. Прямая *BK* пересекает первую окружность в точке *D*, прямая *AK* пересекает вторую окружность в точке *C*.

- Докажите, что прямые *AD* и *BC* параллельны.
- Найдите площадь треугольника *AKB*, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

**Решение.** а) Обозначим центры окружностей  $O_1$  и  $O_2$  соответственно. Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке *K*, пересекает *AB* в точке *M*. По свойству касательных, проведённых из одной точки,  $AM = KM$  и  $KM = BM$ . Треугольник *AKB*, у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, прямоугольный.



Вписанный угол  $AKD$  прямой, поэтому он опирается на диаметр  $AD$ . Значит,  $AD \perp AB$ . Аналогично, получаем, что  $BC \perp AB$ . Следовательно, прямые  $AD$  и  $BC$  параллельны.

б) Пусть, для определённости, первая окружность имеет радиус 4, а вторая — радиус 1.

Треугольники  $BKC$  и  $AKD$  подобны,  $\frac{AD}{BC} = 4$ . Пусть  $S_{BKC} = S$ , тогда

$$S_{AKD} = 16S.$$

У треугольников  $AKD$  и  $AKB$  общая высота, следовательно,  $\frac{S_{AKD}}{S_{AKB}} = \frac{DK}{KB} = \frac{AD}{BC}$ ,

то есть  $S_{AKB} = 4S$ . Аналогично,  $S_{CKD} = 4S$ . Площадь трапеции  $ABCD$  равна  $25S$ . Вычислим площадь трапеции  $ABCD$ . Проведём к  $AD$  перпендикуляр  $O_2H$ , равный высоте трапеции, и найдём его из прямоугольного треугольника  $O_2HO_1$ :

$$O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = 4.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = 20.$$

Следовательно,  $25S = 20$ , откуда  $S = 0,8$  и  $S_{AKB} = 4S = 3,2$ .

**Ответ:** 3,2.

### Задача 1.

В трапеции  $ABCD$  боковая сторона  $AB$  перпендикулярна основаниям. Из точки  $A$  на сторону  $CD$  опустили перпендикуляр  $AH$ . На стороне  $AB$  отмечена точка  $E$  так, что прямые  $CD$  и  $CE$  перпендикулярны.

- Докажите, что прямые  $BH$  и  $ED$  параллельны.
- Найдите отношение  $BH$  к  $ED$ , если  $\angle BCD = 120^\circ$ .

Решение.

а) Поскольку

$$\angle ABC = \angle AHC = \angle ECD = \angle EAD = 90^\circ,$$

около четырёхугольников  $ABCH$  и  $AECD$  можно описать окружности (рис. 1).

Значит,

$$\angle ABH = \angle ACH = \angle ACD = \angle AED,$$

то есть прямые  $BH$  и  $ED$  параллельны.

б) Опустим из точки  $B$  перпендикуляр  $BK$  на прямую  $CD$  (рис. 2). Стороны  $KH$  и  $CD$  треугольников  $BKH$  и  $ECD$  лежат на одной прямой, а стороны  $BK$  и  $EC$ ,  $BH$  и  $ED$  попарно параллельны. Значит, треугольники  $BKH$  и  $ECD$  подобны.

Поскольку

$$\begin{aligned} BK &= BC \cdot \sin \angle BCK = EC \cdot \cos \angle ECB \cdot \sin \angle BCK = \\ &= EC \cdot \cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ = \frac{3}{4} EC, \end{aligned}$$

коэффициент подобия равен  $\frac{3}{4}$ . Значит,

$$BH : ED = 3 : 4.$$

**Ответ: б) 3:4.**

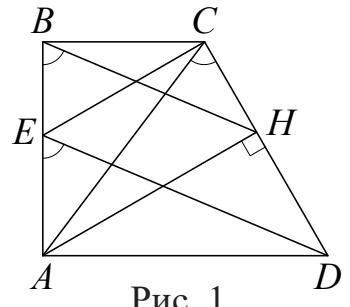


Рис. 1

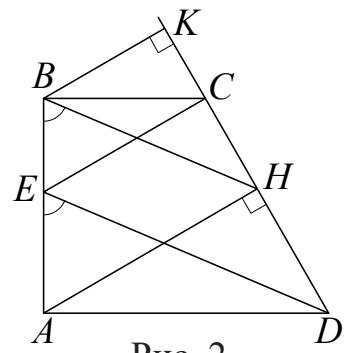


Рис. 2

## Задача 2.

В равнобедренном тупоугольнике  $ABC$  на продолжение боковой стороны  $BC$  опущена высота  $AH$ . Из точки  $H$  на сторону  $AB$  и основание  $AC$  опущены перпендикуляры  $HK$  и  $HM$  соответственно.

а) Докажите, что отрезки  $AM$  и  $MK$  равны.

б) Найдите  $MK$ , если  $AB = 5$ ,  $AC = 8$ .

Решение.

а) Поскольку  $\angle AMH = \angle AKH = 90^\circ$ , около четырёхугольника  $AMKH$  можно описать окружность с диаметром  $AH$ . Получаем:

$\angle BAC = \angle BCA = 90^\circ - \angle HAC = \angle AHM$ , поэтому  $AM = MK$  как хорды, стягивающие равные дуги.

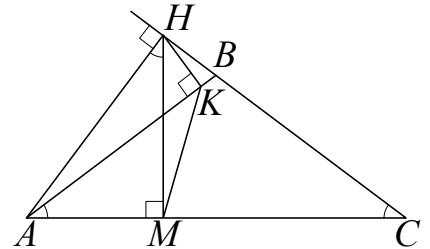
б) В прямоугольных треугольниках  $AHM$  и  $ACH$  имеем:

$$AM = AH \cdot \cos \angle HAM = AC \cdot \cos^2 \angle HAM = AC \cdot (1 - \cos^2 \angle ACB).$$

Поскольку  $\cos \angle ACB = \frac{AC}{2BC} = \frac{4}{5}$ , получаем:

$$MK = AM = \frac{72}{25}.$$

**Ответ:** б)  $\frac{72}{25}$ .



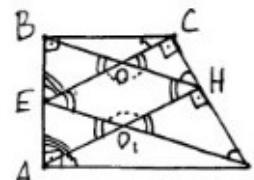
## Примеры оценивания решений задания 16

### Пример 1.

В трапеции  $ABCD$  боковая сторона  $AB$  перпендикулярна основаниям. Из точки  $A$  на сторону  $CD$  опустили перпендикуляр  $AH$ . На стороне  $AB$  отмечена точка  $E$  так, что прямые  $CD$  и  $CE$  перпендикулярны.

- Докажите, что прямые  $BH$  и  $ED$  параллельны.
- Найдите отношение  $BH$  к  $ED$ , если  $\angle BCD = 120^\circ$ .

**Ответ:** б) 3:4.

<p>n16.</p> <p>Дано:</p> <p><math>ABCD</math> – трапеция  <math>BC \perp AB \perp AD</math>  <math>AH \perp CD</math>  <math>CE \perp CD</math></p> <p>а) Доказать:  <math>BH \parallel ED</math></p>	<p>Доказательство:</p>  <p>1) т.к. <math>AH \perp CD</math> и <math>CE \perp CD</math>, то <math>AH \parallel CE</math>;</p> <p>2) <math>AB</math> – секущая при <math>AH \parallel CE</math> II прямых, значит <math>\angle BEC = \angle BAH</math>;</p> <p>3) <math>BH</math> – тоже секущая, значит <math>\angle BOE = \angle COH = \angle BHA</math>;</p> <p>4) <math>ED</math> – тоже секущая, значит <math>\angle CED = \angle EO_1A = \angle HO_1D</math>;</p> <p>5) <math>\angle EO_1H = 180^\circ - \angle COH</math> (смеж. углы), <math>\angle EO_1H = 180^\circ - \angle BHA</math>. т.к. <math>\angle COH = \angle BHA</math>, то <math>\angle EO_1H = \angle EO_1A</math>, следовательно, <math>EO_1HO_1</math> – параллелограмм, а его противолежащие стороны <math>=</math> и <math>\parallel</math>, значит, <math>BH \parallel ED</math>.</p>
---	--

### Комментарий.

Имеется попытка доказательства утверждения пункта а). Логическая ошибка содержится в записи 5) – при вычислении угла  $EO_1H$ :  $\angle EO_1H = 180^\circ - \angle EO_1A$ . Замена угла  $\angle EO_1A$  углом  $\angle BHA$  возможна только при условии параллельности прямых  $BH$  и  $ED$ , а как раз это и требовалось доказать.

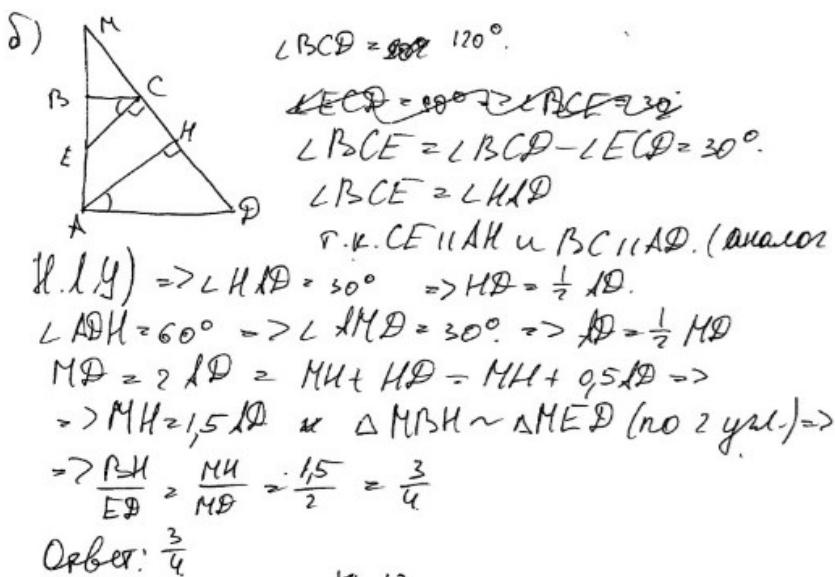
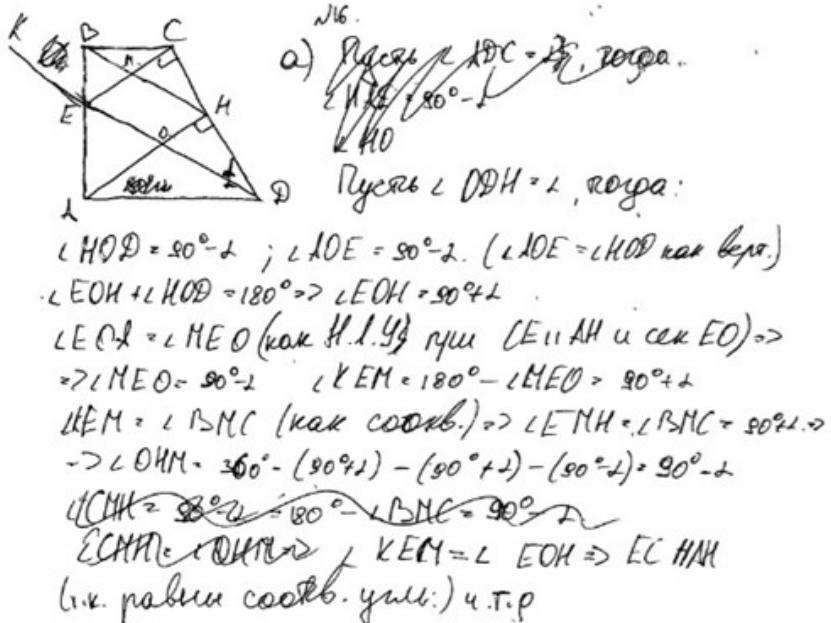
**Оценка эксперта: 0 баллов.**

## Пример 2.

В трапеции  $ABCD$  боковая сторона  $AB$  перпендикулярна основаниям. Из точки  $A$  на сторону  $CD$  опустили перпендикуляр  $AH$ . На стороне  $AB$  отмечена точка  $E$  так, что прямые  $CD$  и  $CE$  перпендикулярны.

- Докажите, что прямые  $BH$  и  $ED$  параллельны.
- Найдите отношение  $BH$  к  $ED$ , если  $\angle BCD = 120^\circ$ .

**Ответ: б) 3:4.**



## Комментарий.

В данном решении есть попытка доказательства утверждения пункта а. Логическая ошибка содержится в записи  $\angle KEM = \angle BMC$  – это возможно только при параллельности прямых  $BH$  и  $ED$ , а как раз это и требовалось доказать. Верный ответ в пункте б получен обоснованно с использованием недоказанного утверждения пункта а.

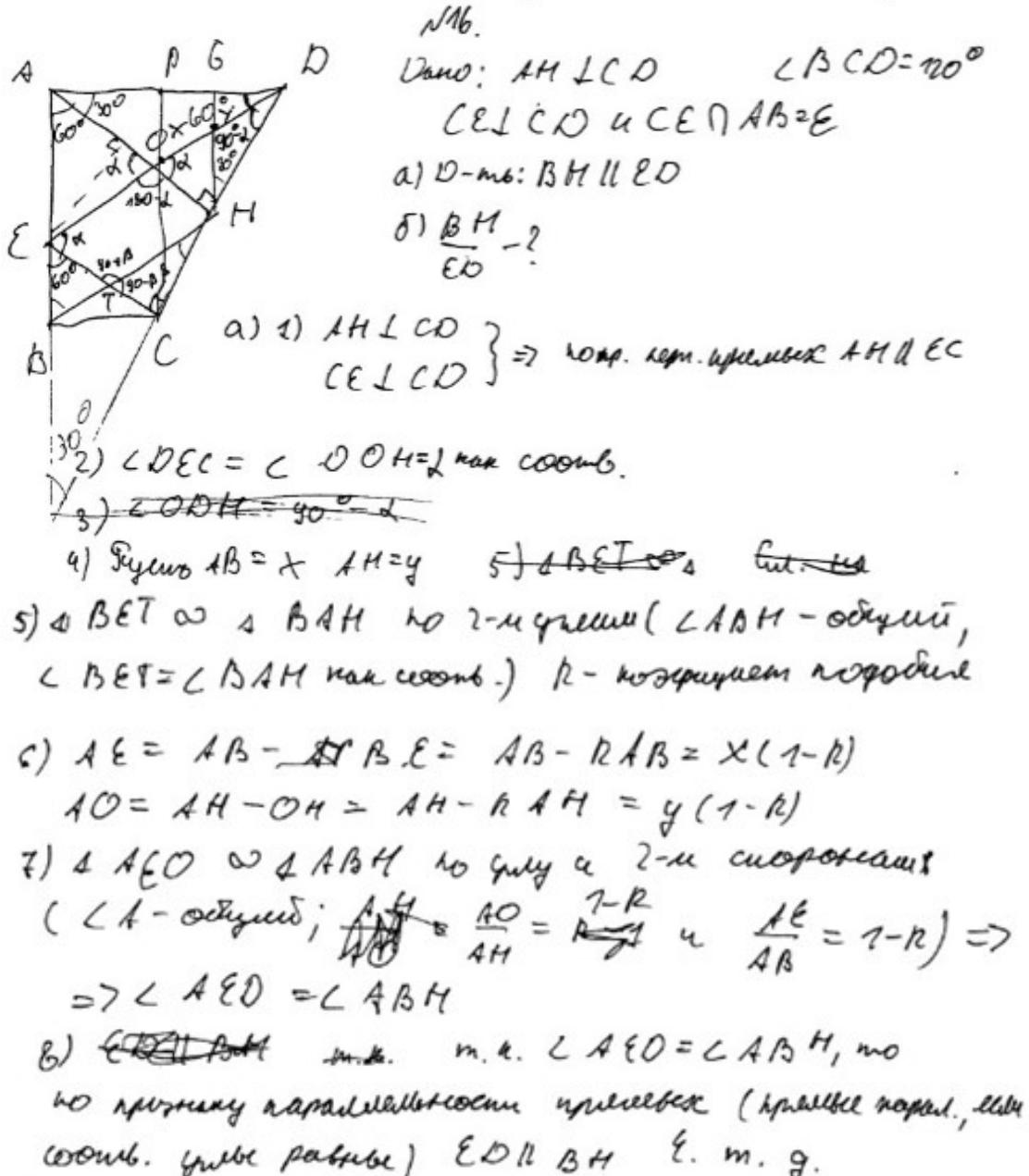
**Оценка эксперта: 1 балл.**

### Пример 3.

В трапеции  $ABCD$  боковая сторона  $AB$  перпендикулярна основаниям. Из точки  $A$  на сторону  $CD$  опустили перпендикуляр  $AH$ . На стороне  $AB$  отмечена точка  $E$  так, что прямые  $CD$  и  $CE$  перпендикулярны.

- Докажите, что прямые  $BH$  и  $ED$  параллельны.
- Найдите отношение  $BH$  к  $ED$ , если  $\angle BCD = 120^\circ$ .

**Ответ:** б) 3:4.



### Комментарий.

Логическая ошибка: доказательство утверждения пункта а опирается на дополнительное условие из пункта б.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

### Пример 4.

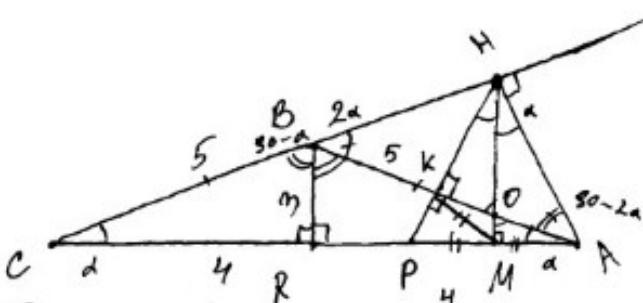
В равнобедренном тупоугольнике  $ABC$  на продолжение боковой стороны  $BC$  опущена высота  $AH$ . Из точки  $H$  на сторону  $AB$  и основание  $AC$  опущены перпендикуляры  $HK$  и  $HM$  соответственно.

а) Докажите, что отрезки  $AM$  и  $MK$  равны.

б) Найдите  $MK$ , если  $AB = 5$ ,  $AC = 8$ .

Ответ: б)  $\frac{72}{25}$ .

16.



**Дано:**  
 $\angle BCA = \alpha$   
 $AB = BC$   
 $AH \perp BC$   
 $HK \perp AB$   
 $HM \perp AC$

**Доказать:**  
 а)  $AM = MK - ?$   
 б)  $MK - ?$

а) Рассуждение:

Пусть  $\angle BCA = \alpha$ .

т.к.  $\triangle ABC$  - равнобедренный,  
 то  $\angle BAC = \alpha$ .

$\angle CBA = 180 - 2\alpha$

Пусть  $BR \perp AC$ , тогда  $CR = RA$ ,  
 $\angle CBR = \angle RBA = \frac{\angle CBA}{2} = \frac{180 - 2\alpha}{2} = 90 - \alpha$ .

$\angle BAH = 180^\circ - \angle CBA = 180^\circ - (180 - 2\alpha) = 2\alpha$   
 т.к.  $\triangle BAH$  - прямоугольный ( $AH \perp BC$ ),  
 то  $\angle BAH = 90 - 2\alpha$ .

$\angle KHA = 180 - 90 - (90 - 2\alpha) = 2\alpha$ .

$\triangle BHA \sim \triangle KHA$  по трем утв.

Пусть  $AB \cap HM = O$ .

$\angle AOM = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$ .

$\angle AOM = \angle KOH$  как вертикальные  
 утв.

$\angle KHO = 180 - 90 - (90 - \alpha) = \alpha$ .

$\angle KHO = \alpha$ ,  $\angle KHA = 2\alpha$ , тогда  $\angle OHA = \alpha$ .

Пусть  $HK \perp AC = P$ , тогда  
 $\triangle AHP$  - равнобедренный,  
 т.к.  $HM \perp AP$ ,  $\angle KHO = \angle OHA$ .

$\angle HPA = \angle MAH = 90 - 2\alpha + \alpha = 90 - \alpha$ .

$PM = MA$ , т.к.  $HM$  -  
 - высота, медиана, биссектриса  
 равнобедренного  $\triangle AHP$ .

$\triangle PKA$  - прямогольный, т.к.  $HK \perp AB$ .

Около  $\triangle PKA$  можно описать окружность, и из-за того,  
 что  $\triangle PKA$  - прямогольный,  
 ее центр будет лежать  
 в середине гипotenузы -  
 тоже т.к.  $AP$  будет ее  
 диаметром,  $PM$ ,  $AM$  и  $MK$ -  
 радиусами.

Получается, что

$PM = AM = MK$  что и требовалось доказать.

б) Т.к.  $BR \perp AC$  и  $\triangle ABC$  -  
 равнобедр., то  $CR = RA =$   
 $= \frac{AC}{2} = \frac{8}{2} = 4$ .

По теореме Пифагора:

$$BR^2 = AB^2 - AR^2$$

$$BR^2 = 25 - 16 = 9$$

$$BR = \sqrt{9} = 3$$

$\triangle BRA$  подобен  $\triangle KPA$  по  
 трем утв ( $\angle BRA = \angle KPA = 90^\circ$ ;  
 $\angle RBA = \angle APK = 80 - \alpha$ ;  $\angle PAK = \angle RAB = \alpha$ ).

$\triangle KPA$ , в свою очередь, подобен  $\triangle AOM$  по третьему признаку подобия ( $\angle APO = \angle KPM = \alpha$ ;  $\angle PAK = \angle MAO = \alpha$ ;  $\angle AOP = \angle AKP = 90^\circ - \alpha$ ), следовательно стороны двух треугольников пропорциональны:

$$\frac{AO}{AP} = \frac{AM}{AK} = \frac{OP}{KP}, \text{ и так как } PM = AM, AP = 2AM, \text{ подобие } \triangle KPA \text{ и } \triangle AOM \text{ равносильно}$$

$$\cos \alpha = \frac{AR}{AB} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Рассмотрим  $\triangle PKM$ , он - равнобедренный ( $PM = KM$ ), тогда  $\angle KPM = \angle PKM = 80 - \alpha$ . Тогда  $\angle PMK = 180 - 2(80 - \alpha) = 2\alpha$ .

$$\cos \angle KPM = \cos (80 - \alpha) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha.$$

$$\sin \alpha = \frac{OP}{PK} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Пусть  $PM = AM = MK = x$

По теореме косинусов для  $\triangle PKM$ :

$$PK^2 = PM^2 + MK^2 - 2 \cdot PM \cdot MK \cdot \cos \angle KPM$$

$$PK^2 = 2x^2 - 2x^2 \cdot \sin \alpha$$

$$PK^2 = 2x^2 - 1,2x^2 = 0,8x^2$$

$$PK = \sqrt{\frac{8x^2}{10}} = \frac{2x\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = 2x\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{2x\sqrt{5}}{5}$$

По теореме Пифагора для  $\triangle APK$ :

$$AK^2 = AP^2 - PK^2$$

$$16 - 16x + 4x^2 = \frac{20x^2}{25} + 8 - \frac{80x^2}{25}$$

$$AK^2 = 4x^2 - 0,8x^2 = 3,2x^2$$

$$16 - 16x + 4x^2 = \frac{125 - 60x^2}{25}$$

$$AK = x\sqrt{\frac{32}{25}} = 4x\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{4x\sqrt{5}}{5}$$

$$16 - 16x + 4x^2 = \frac{25 - 12x^2}{5}$$

$$\frac{AK}{PK} = \frac{\frac{4x\sqrt{5}}{5}}{\frac{2x\sqrt{5}}{5}} = 2, \quad \cancel{AK = 2PK}, \quad \cancel{PK = 5 - AK}$$

$$80 - 80x + 20x^2 = 25 - 12x^2$$

$$8x^2 - 80x + 65 = 0$$

$$D = 6400 - 2080 = 4320$$

$$x = \frac{\sqrt{4320} \pm 20}{16} = \frac{3\sqrt{30}}{4} + 5 =$$

$$= \frac{3\sqrt{30} + 20}{4} = MK;$$

$$BP^2 = BK^2 + KP^2$$

$$16 - 16x + 4x^2 = BK^2 + KP^2$$

$$16 - 16x + 4x^2 = \frac{20x^2}{25} + \left(5 - \left(4x^2 + \frac{20x^2}{25}\right)\right)$$

$$\text{Ответ: } \frac{3\sqrt{30} + 20}{4};$$

### Комментарий.

Доказательство утверждения пункта а верно. Правда, следует отметить, что в доказательстве получено много верных утверждений, которые не нужны для доказательства равенства отрезков  $AM$  и  $MK$ , кроме того некорректно формулируется признак подобия треугольников.

В решении пункта б допущена ошибка при вычислении длины отрезка  $PK$  – вместо  $\cos \angle KPM$  должно быть  $\cos \angle KMP$ .

Оценка эксперта: 1 балл.

### Пример 5.

В равнобедренном тупоугольнике  $ABC$  на продолжение боковой стороны  $BC$  опущена высота  $AH$ . Из точки  $H$  на сторону  $AB$  и основание  $AC$  опущены перпендикуляры  $HK$  и  $HM$  соответственно.

а) Докажите, что отрезки  $AM$  и  $MK$  равны.

б) Найдите  $MK$ , если  $AB = 5$ ,  $AC = 8$ .

Ответ: б)  $\frac{72}{25}$ .

16.

Given:  $AB = BC$ ,  $\triangle ABC$   
 $AB = 5$   
 $BC = 8$   
 $HK \perp AB$   
 $HM \perp AC$   
 $MK - ?$

$AN = CN$

$AM = \frac{1}{2} AC = \frac{8}{2} = 4$

$\cos A = 0,8 = \frac{AN}{AB} = \frac{4}{5}$

$\frac{AH}{h} = \frac{4}{5}$      $\cos A = \cos C = 0,8$      $\triangle ABC$

$\frac{AH}{5} = \frac{4}{5}$      $\Leftrightarrow \frac{hC}{AC} = \frac{4}{5}$

$\frac{hC}{8} = \frac{4}{5}$

$shC = 32$      $\frac{Ah}{AC} = \frac{3}{5}$      $Ah = 4 \cdot 8$

$hC = 6,4$

$\sin^2 C = 1 - \cos^2 C = 1 - 0,64 = 0,36$

$\sin C = 0,6$

$\sin C = \cos A = \cos B$      $\triangle ACh$

$\frac{AM}{Ah} = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4}$      $\frac{AM}{Ah} = 0,6$

$AM = 0,6 \cdot 4,8$

$AM = 2,88$

$AM = MK = 2,88$

Ответ:  $MK = 2,88$

### Комментарий.

Доказательство утверждения пункта а) отсутствует. Решение пункта б) выполнено верно с использованием недоказанного утверждения пункта а).

Оценка эксперта: 1 балл.

### Пример 6.

В равнобедренном тупоугольнике  $ABC$  на продолжение боковой стороны  $BC$  опущена высота  $AH$ . Из точки  $H$  на сторону  $AB$  и основание  $AC$  опущены перпендикуляры  $HK$  и  $HM$  соответственно.

а) Докажите, что отрезки  $AM$  и  $MK$  равны.

б) Найдите  $MK$ , если  $AB = 5$ ,  $AC = 8$ .

**Ответ:** б)  $\frac{72}{25}$ .

(16)

a)  $\triangle ABC$ : р/б  $\Rightarrow \angle BAC < \angle BCA$  (1)  
 $\triangle AHС$ : прямой  $\angle HAC$  высота  $\angle$   
 $\triangle ACK \sim \triangle AKM \Rightarrow \angle ACK = \angle AKM$  (2)  
 $\triangle AOM \sim \triangle OHK$  (у/у)  $\Rightarrow \angle OAM = \angle OKH$  (3)  
(1), (2), (3)  $\Rightarrow OK$  - бисс  $\angle AHB$ .  
[OK - биссектриса прямого угла]  $\Rightarrow$  биссектриса  $\angle AHB$ .  
 $\triangle AND$ :

$HM$  - бисс и бисс  $\angle AHB \Rightarrow \triangle AND$  - р/б  $\Rightarrow HM$  - неравн.  $\Rightarrow AM = MD$

$\triangle AFD$ : прямой  $\angle AFD$   $\Rightarrow AM = MD \Rightarrow KM$  - бисс  $\angle KMD$   $\Rightarrow KM = AD$   $\Rightarrow KM = 2AM$  ч.т.д.

б) пусть  $HB = x$   ~~$\triangle AHB$~~   $\triangle AHB$ : прямой  $\angle AHB$   $\Rightarrow AH^2 = AB^2 - HB^2$   
 $\triangle AHС$ : прямой  $\angle AHС$   $\Rightarrow AH^2 = AC^2 - HC^2$   $\Rightarrow AB^2 - HB^2 = AC^2 - HC^2$   
 $25 - x^2 = 64 - CB^2 - 2KB \cdot CB - HB^2$   $\Rightarrow CB = 1,4$   
 $\triangle ACK$ :  $HC^2 = MC \cdot AC$   $\Rightarrow 1,4^2 = 8 \cdot CM$   $\Rightarrow CM = 5,12$   
 $AM = AC - MC = 8 - 5,12 = 2,88$   $\Rightarrow MK = 2,88$

Ответ: б)  $MK = 2,88$

### Комментарий.

В доказательстве утверждения пункта а есть некорректное утверждение – « $KM$  – биссектриса», при этом тут же записаны утверждения, соответствующие медиане прямоугольного треугольника.

Решение пункта б выполнено верно.

**Оценка эксперта: 3 балла.**

## 5. Критерии проверки и оценка решений задания 17 ЕГЭ–2018

Задание №17 – это текстовая задача с экономическим содержанием.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<b>3</b>

Несколько подробнее: 1 балл можно выставлять в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической, алгебраической, функциональной, геометрической) задачи. Именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию и т.п. Грубо говоря, предъявленный текст должен включать направление, «продолжаемое» до верного решения. Оценка в 2 балла, разумеется, включает в себя условие выставления 1 балла, но существенно ближе к верному решению задачи.

Здесь предполагается завершенное, практически полное решение соответствующей математической задачи. Типичные допустимые погрешности здесь – вычислительные ошибки (при наличии всех шагов решения) или недостаточно полные обоснования.

Отметим, что термин «математическая модель», быть может, излишне высокопарен для сравнительно простых задач экономического содержания, предлагаемых на ЕГЭ. Однако, по нашему мнению, он наиболее лаконичен, общеупотребим и достаточно ясен для того, чтобы пытаться отыскать ему адекватную замену. Следует подчеркнуть, что один и тот же сюжет может быть успешно сведен к различным математическим моделям и доведён до верного ответа. По этой причине в критериях проверки нигде нет жесткого упоминания о какой-либо конкретной (арифметической, алгебраической, геометрической, функциональной) модели.

Вообще, способов верного решения заданий этого типа никак не меньше, чем для привычных текстовых задач. Возможен и стиль, приближенный к высшей математике, и наивный подход, напоминающий арифметический способ решения текстовых задач, и метод использующий специфические для математической экономики понятия (целевая функция, симплекс-метод и т.п.).

### Задача 17 (демонстрационный вариант 2018 г.).

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на  $r$  процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где  $r$  — целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение  $r$ , при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

**Решение.** По условию, долг перед банком (в млн рублей) на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$1; 0,6; 0,4; 0,3; 0,2; 0,1; 0.$$

Пусть  $k = 1 + \frac{r}{100}$ , тогда долг на 1-е число каждого месяца равен:

$$k; 0,6k; 0,4k; 0,3k; 0,2k; 0,1k.$$

Следовательно, выплаты со 2-го по 14-е число каждого месяца составляют:

$$k - 0,6; 0,6k - 0,4; 0,4k - 0,3; 0,3k - 0,2; 0,2k - 0,1; 0,1k.$$

Общая сумма выплат составляет:

$$\begin{aligned} k(1 + 0,6 + 0,4 + 0,3 + 0,2 + 0,1) - (0,6 + 0,4 + 0,3 + 0,2 + 0,1) = \\ = (k-1)(1 + 0,6 + 0,4 + 0,3 + 0,2 + 0,1) + 1 = 2,6(k-1) + 1. \end{aligned}$$

По условию, общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей, значит,

$$2,6(k-1) + 1 < 1,2; 2,6 \cdot \frac{r}{100} + 1 < 1,2; r < 7\frac{9}{13}.$$

Наибольшее целое решение этого неравенства — число 7. Значит, искомое число процентов — 7.

**Ответ:** 7.

### Задача 1.

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на  $r$  процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где  $r$  — целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение  $r$ , при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

Решение.

По условию, долг перед банком (в млн рублей) на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$1; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0.$$

Пусть  $k = 1 + \frac{r}{100}$ , тогда долг на 1-е число каждого месяца равен:

$$k; 0,9k; 0,8k; 0,7k; 0,6k; 0,5k.$$

Следовательно, выплаты со 2-го по 14-е число каждого месяца составляют:

$$k - 0,9; 0,9k - 0,8; 0,8k - 0,7; 0,7k - 0,6; 0,6k - 0,5; 0,5k.$$

Общая сумма выплат составляет:

$$\begin{aligned} k(1 + 0,9 + 0,8 + 0,7 + 0,6 + 0,5) - (0,9 + 0,8 + 0,7 + 0,6 + 0,5) = \\ = (k-1)(1 + 0,9 + 0,8 + 0,7 + 0,6 + 0,5) + 1 = 4,5(k-1) + 1. \end{aligned}$$

По условию, общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей, значит,

$$4,5(k-1) + 1 > 1,2; 4,5 \cdot \frac{r}{100} + 1 > 1,2; r > 4\frac{4}{9}.$$

Наименьшее целое решение этого неравенства — число 5. Значит, искомое число процентов — 5.

**Ответ:** 5.

## Задача 2.

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 58 564 рубля, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 106 964 рубля, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите  $r$ .

Решение.

Пусть сумма кредита составляет  $S$  рублей, а ежегодные выплаты  $X$  рублей,  $k = 1 + \frac{r}{100}$ . По условию, долг перед банком (в рублях) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$S, kS - X, k^2S - kX - X, k^3S - k^2X - kX - X, k^4S - k^3X - k^2X - kX - X$ . Таким образом, если долг будет выплачен двумя равными платежами  $X_2$ , то

$$X_2 = \frac{k^2 \cdot (k-1)}{k^2 - 1} \cdot S = 106\,964.$$

Если долг будет выплачен четырьмя равными платежами  $X_4$ , то

$$X_4 = \frac{k^4 \cdot (k-1)}{k^4 - 1} \cdot S = 58\,564.$$

Таким образом,  $\frac{X_4}{X_2} = \frac{k^2}{k^2 + 1} = \frac{58\,564}{106\,964} = \frac{121}{221}$ , откуда  $k^2 = \frac{121}{100}$ ;  $k = 1,1$ . Значит,  $r = 10$ .

**Ответ:** 10.

## Примеры оценивания решений задания 17

### Пример 1.

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на  $r$  процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где  $r$  — целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение  $r$ , при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

**Ответ:** 5.

месяц	сумма долга 1-го числа (млн р.)	сумма долга кажд. 15-го числа	сумма выплат
1		1 млн	
2	$1 + 1 \cdot r$	0,9	$1 + 1 \cdot r - 0,9$
3	$0,9 + 0,9 \cdot r$	0,8	$0,9 + 0,9 \cdot r - 0,8$
4	$0,8 + 0,8 \cdot r$	0,7	$0,8 + 0,8 \cdot r - 0,7$
5	$0,7 + 0,7 \cdot r$	0,6	$0,7 + 0,7 \cdot r - 0,6$
6	$0,6 + 0,6 \cdot r$	0,5	$0,6 + 0,6 \cdot r - 0,5$
7	$0,5 + 0,5 \cdot r$	0	$0,5 + 0,5 \cdot r$

тогда общая сумма выплат:

$$1 + 1 \cdot r - 0,9 + 0,9 + 0,9 \cdot r - 0,8 + 0,8 + 0,8 \cdot r - 0,7 + 0,7 + 0,7 \cdot r - 0,6 + 0,6 + 0,6 \cdot r - 0,5 + 0,5 + 0,5 \cdot r = 1 + r + 0,9r + 0,8r + 0,7r + 0,6r + 0,5r = 1 + 4,5r$$

общая сумма выплат должна быть больше 1,2 млн  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 1 + 4,5r &> 1,2 \\ 4,5r &> 0,2 \\ r &> 0,25 \end{aligned}$$

т. к.  $r$  — целое число, то  
наименьшее  $r = 3$ .

**Ответ:**  $r$  наименьшим = 3

### Комментарий.

Модель построена неверно. Если подставить вместо  $r$  число 3 в таблицу, то сумма долга уже на 1 число второго месяца должна составить 4 млн рублей, кроме того, еще и неравенство решено неверно.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

## Пример 2.

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на  $r$  процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где  $r$  — целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение  $r$ , при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

**Ответ:** 5.

17) Всего было 6 платежей: $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ .							
$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 \geq 1,2$							
$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = S$							
$r$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$S$
7	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22	1,215
5	0,15	0,145	0,14	0,135	0,13	0,125	1,225
4	0,14	0,136	0,132	0,128	0,124	0,12	1,18

$P_1 = (1 + \frac{r}{100}) - 0,9$   
 $P_2 = 0,9(1 + \frac{r}{100}) - 0,8$   
 $P_3 = 0,8(1 + \frac{r}{100}) - 0,7$   
 $P_4 = 0,7(1 + \frac{r}{100}) - 0,6$   
 $P_5 = 0,6(1 + \frac{r}{100}) - 0,5$   
 $P = 0,5(1 + \frac{r}{100})$

Наименьшим значением, при котором  $S > 1,2$  является 5. При  $r = 4$ ,  $S < 1,2$ .

**Ответ:** 5

### Комментарий.

Модель построена верно. Усложняет проверку отсутствие вычислений. В таблице все результаты вычислений по формулам, записанным справа, верные. Логика решения верна.

**Оценка эксперта: 3 балла.**

### Пример 3.

15-го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на  $r$  процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где  $r$  — целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение  $r$ , при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

**Ответ:** 5.

Дано:  
 $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \geq 1,2 \text{ млн} , \text{ где } X - \text{ выплата}$

---

$N = 1$  — сумма кредита

---

$r_{\min} - ? , \text{ где } r - \% , r \in \mathbb{Z}$

$X_1 = N + \frac{rN}{100} - 0,9 ; X_2 = 0,9 + \frac{r \cdot 0,9}{100} - 0,8 ; X_3 = 0,8 + \frac{r \cdot 0,8}{100} - 0,7 ;$

$X_4 = 0,7 + \frac{r \cdot 0,7}{100} - 0,6 ; X_5 = 0,6 + \frac{r \cdot 0,6}{100} - 0,5 ; X_6 = 0,5 + \frac{r \cdot 0,5}{100}$

$1 + \frac{r}{100} - 0,9 + 0,9 + \frac{r \cdot 0,9}{100} - 0,8 + 0,8 + \frac{r \cdot 0,8}{100} - 0,7 + 0,7 + \frac{r \cdot 0,7}{100} - 0,6 + 0,6 + \frac{r \cdot 0,6}{100} - 0,5 + 0,5 + \frac{r \cdot 0,5}{100} \geq 1,2$

$1 + \frac{3,5r}{100} \geq 1,2 \quad r > \frac{20}{3,5} \quad \text{Ответ: } r = 5\%$

$\frac{3,5r}{100} > 0,2 \quad r_{\min} = 5\%$

### Комментарий.

Почти правильное решение, содержащее ошибки (вычислительного характера). Две ошибки: 1)  $1 + \frac{4,5r}{100} > 1,2$ , а не  $1 + \frac{3,5r}{100} > 1,2$ ; 2)  $\frac{20}{3,5} > 5,7$ , т.е. должно быть  $r = 6$  — не позволяют выставить 2 балла.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

#### Пример 4.

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 58 564 рубля, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 106 964 рубля, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите  $r$ .

**Ответ:** 10.

17. Пусть	$(1 + \frac{r}{100})^x = x$	
январь 2021	$Sx$	1 способ
июнь 2021	$Sx - 58564$	$Sx - 106964$
январь 2022	$Sx^2 - 58564x$	$Sx^2 - 106964x$
июнь 2022	$Sx^2 - 58564x - 58564$	$Sx^2 - 106964x - 106964$
январь 2023	$Sx^3 - 58564x^2 - 58564x$	0
июнь 2023	$Sx^3 - 58564x^2 - 58564x - 58564$	0
январь 2024	$Sx^4 - 58564x^3 - 58564x^2 - 58564x$	0
июнь 2024	$Sx^4 - 58564x^3 - 58564x^2 - 58564x - 58564$	0

$$\begin{cases} Sx^2 - 106964x - 106964 = 0 \\ Sx^4 - 58564x^3 - 58564x^2 - 58564x - 58564 = 0 \end{cases}$$

$$1) S = \frac{106964}{x} + \frac{106964}{x^2}$$

$$2) S = \frac{58564}{x} + \frac{58564}{x^2} + \frac{58564}{x^3} + \frac{58564}{x^4}$$

$$\frac{106964}{x} + \frac{106964}{x^2} = \frac{58564}{x} + \frac{58564}{x^2} + \frac{58564}{x^3} + \frac{58564}{x^4}$$

$$\frac{49400}{x} + \frac{49400}{x^2} - \frac{58564}{x^3} - \frac{58564}{x^4} = 0 \quad / \cdot x^4$$

$$49400x^3 + 49400x^2 - 58564x - 58564 = 0$$

$$49400x^2(x+1) - 58564(x+1) = 0$$

$$(x+1)(49400x^2 - 58564) = 0$$

$$x = -1, \text{ не подходит. Но } x = 1.$$

$$49400x^2 = 58564$$

$$x = \frac{29}{100}$$

$$\text{Часть 3: } \frac{(1+r)}{100} = \frac{29}{100}$$

$$r = 10$$

Ответ: 10%.

**Комментарий.**

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 3 балла.**

### Пример 5.

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 58 564 рубля, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 106 964 рубля, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите  $r$ .

**Ответ:** 10.

*S - сумма взятого кредита* №17

$$k = 1 + \frac{r}{100} \quad k > 0$$

*r - коэффициент.*

$$\left( \left( S + \frac{Sr}{100} \right) - 58564 \right) \left( 1 + \frac{r}{100} \right) - 58564 \left( 1 + \frac{r}{100} \right)^2 - 58564 \left( 1 + \frac{r}{100} \right)^3 - 58564 = 0$$

$$\left( Sk - 58564 \right) k - 58564 \left( k + 1 \right) k - 58564 = 0$$

$$\left( Sk - 106964 \right) k - 106964 = 0$$

$$12100k^3 + 12100k^2 - 14641k - 14641 = 0$$

$$12100k^2(k+1) - 14641(k+1) = 0$$

$$(12100k^2 - 14641)(k+1) = 0$$

$$k^2 = \frac{14641}{12100}, \quad k = \sqrt{\frac{14641}{12100}}$$

$$1 + \frac{r}{100} = \frac{\sqrt{14641}}{110}$$

$$r = \left( \frac{\sqrt{14641}}{110} - 1 \right) 100 = \frac{100\sqrt{14641}}{110} - 100$$

*Ответ:*  $\frac{100\sqrt{14641}}{110} - 100$

### Комментарий.

В решении без объяснений записаны уравнения. Переход от системы к уравнению относительно  $k$  не объяснен. Числовой ответ явно не получен: не извлечен корень из числа 14641. Таким образом, решение недостаточно обоснованное.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

### Пример 6.

15-го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на  $r$  процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где  $r$  — целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение  $r$ , при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

**Ответ:** 5.

$$\begin{aligned}
 & 1 + \frac{r}{100} + 0,9 + \frac{r}{100} + 0,8 + \frac{r}{100} + 0,7 + \frac{r}{100} + 0,6 + \frac{r}{100} + 0,5 + \frac{r}{100} > 1,2 \\
 & 4,5 \frac{r}{100} > 0,1 \\
 & 9 \frac{r}{100} > 0,4 \\
 & \frac{r}{100} > \frac{4}{90} \quad \text{близайшее целое 4 и 5} \\
 & * \quad \frac{4}{100} < \frac{4}{90} \quad \text{не подходит, берём на 1 балл.} \\
 & \frac{5}{100} = \frac{1}{20} > \frac{4}{90} \\
 & \frac{90}{1800} > \frac{80}{1800} \Rightarrow \text{Ответ. } r=5
 \end{aligned}$$

### Комментарий.

В решении без объяснений записано неравенство. Неравенство явно не решено. Таким образом, решение недостаточно обоснованное.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

## 6. Критерии проверки и оценка решений задания 18 ЕГЭ–2018

Задание №18 – это уравнение, неравенство или их системы с параметром.

Задачи с параметром допускают весьма разнообразные способы решения.

Наиболее распространенными из них являются:

- чисто алгебраический способ решения;
- способ решения, основанный на построении и исследовании геометрической модели данной задачи;
- функциональный способ, в котором могут быть и алгебраические, и геометрические моменты, но базовым является исследование некоторой функции.

Зачастую (но далеко не всегда) графический метод более ясно ведёт к цели. Кроме того, в конкретном тексте решения вполне могут встречаться элементы каждого из трех перечисленных способов.

### Задача 18 (демонстрационный вариант 2018 г.).

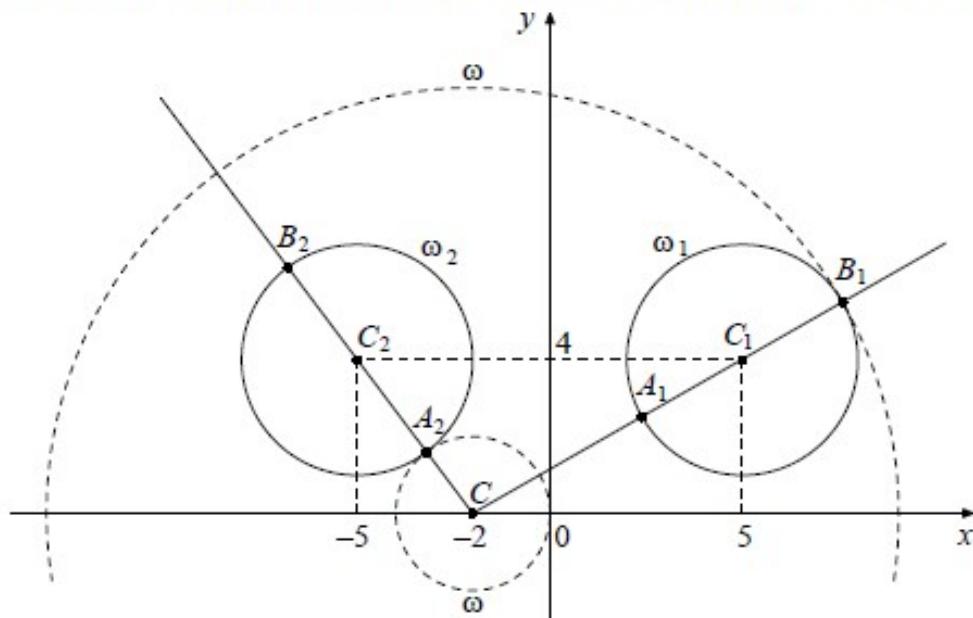
Найдите все положительные значения  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x|-5)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ (x+2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**Решение.** Если  $x \geq 0$ , то уравнение  $(|x|-5)^2 + (y-4)^2 = 9$  задаёт окружность  $\omega_1$  с центром в точке  $C_1(5; 4)$  радиусом 3, а если  $x < 0$ , то оно задаёт окружность  $\omega_2$  с центром в точке  $C_2(-5; 4)$  таким же радиусом (см. рисунок).

При положительных значениях  $a$  уравнение  $(x+2)^2 + y^2 = a^2$  задаёт окружность  $\omega$  с центром в точке  $C(-2; 0)$  радиусом  $a$ . Поэтому задача состоит в том, чтобы найти все значения  $a$ , при каждом из которых окружность  $\omega$  имеет единственную общую точку с объединением окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .



Из точки  $C$  проведём луч  $CC_1$  и обозначим через  $A_1$  и  $B_1$  точки его пересечения с окружностью  $\omega_1$ , где  $A_1$  лежит между  $C$  и  $C_1$ . Так как  $CC_1 = \sqrt{(5+2)^2 + 4^2} = \sqrt{65}$ , то  $CA_1 = \sqrt{65} - 3$ ,  $CB_1 = \sqrt{65} + 3$ .

При  $a < CA_1$  или  $a > CB_1$  окружности  $\omega$  и  $\omega_1$  не пересекаются.

При  $CA_1 < a < CB_1$  окружности  $\omega$  и  $\omega_1$  имеют две общие точки.

При  $a = CA_1$  или  $a = CB_1$  окружности  $\omega$  и  $\omega_1$  касаются.

Из точки  $C$  проведём луч  $CC_2$  и обозначим через  $A_2$  и  $B_2$  точки его пересечения с окружностью  $\omega_2$ , где  $A_2$  лежит между  $C$  и  $C_2$ . Так как  $CC_2 = \sqrt{(-5+2)^2 + 4^2} = 5$ , то  $CA_2 = 5 - 3 = 2$ ,  $CB_2 = 5 + 3 = 8$ .

При  $a < CA_2$  или  $a > CB_2$  окружности  $\omega$  и  $\omega_2$  не пересекаются.

При  $CA_2 < a < CB_2$  окружности  $\omega$  и  $\omega_2$  имеют две общие точки.

При  $a = CA_2$  или  $a = CB_2$  окружности  $\omega$  и  $\omega_2$  касаются.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность  $\omega$  касается ровно одной из двух окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и не пересекается с другой. Так как  $CA_2 < CA_1 < CB_2 < CB_1$ , то условию задачи удовлетворяют только числа  $a = 2$  и  $a = \sqrt{65} + 3$ .

Ответ: 2;  $\sqrt{65} + 3$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но <ul style="list-style-type: none"><li>– или в ответ включены также и одно-два неверных значения;</li><li>– или решение недостаточно обосновано</li></ul>	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: <ul style="list-style-type: none"><li>– или взаимного расположения трёх окружностей;</li><li>– или двух квадратных уравнений с параметром</li></ul>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

### Задача 1

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1 \text{ имеет ровно три различных корня.}$$

Решение.

Исходное уравнение равносильно уравнению  $3x^2 + 2ax + 1 = (x^2 + ax + 1)^2$  при условии  $x^2 + ax + 1 \geq 0$ .

Решим уравнение  $3x^2 + 2ax + 1 = (x^2 + ax + 1)^2$ :

$$3x^2 + 2ax + 1 = x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2)x^2 + 2ax + 1;$$

$$x^4 + 2ax^3 + (a^2 - 1)x^2 = 0; x^2(x + a + 1)(x + a - 1) = 0,$$

откуда  $x = 0$ ,  $x = 1 - a$  или  $x = -1 - a$ .

Исходное уравнение имеет три корня, когда эти числа различны и для каждого из них выполнено условие  $x^2 + ax + 1 \geq 0$ .

Рассмотрим условия совпадения корней. При  $a = 1$  имеем  $1 - a = 0$ .

При  $a = -1$  имеем  $-1 - a = 0$ . При остальных значениях  $a$  числа  $0$ ,  $1 - a$ ,  $-1 - a$  различны.

При  $x = 0$  получаем:  $x^2 + ax + 1 = 1 \geq 0$  при всех значениях  $a$ .

При  $x = 1 - a$  получаем:

$$x^2 + ax + 1 = (1 - a)^2 + a(1 - a) + 1 = 2 - a.$$

Это выражение неотрицательно при  $a \leq 2$ .

При  $x = -1 - a$  получаем:

$$x^2 + ax + 1 = (-1 - a)^2 + a(-1 - a) + 1 = a + 2.$$

Это выражение неотрицательно при  $a \geq -2$ .

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно три различных корня при

$$-2 \leq a < -1; -1 < a < 1; 1 < a \leq 2.$$

Ответ:  $-2 \leq a < -1; -1 < a < 1; 1 < a \leq 2$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого только исключением точек $a = -2$ и/или $a = 2$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $(-2; 2)$ множества значений $a$ , возможно, с включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Получены корни уравнения $3x^2 + 2ax + 1 = (x^2 + ax + 1)^2 : x = 0$ , $x = 1 - a$ , $x = -1 - a$ ; и задача верно сведена к исследованию полученных корней при условии $x^2 + ax + 1 > 0$ ( $x^2 + ax + 1 \geq 0$ )	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

### Задача 2.

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 - y - |x - 5y + 5| = 52, \\ y - 2 = a(x - 5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

**Решение.**

Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Рассмотрим два случая:

- 1) Если  $x - 5y + 5 \geq 0$ , то получаем уравнение

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + y^2 - y - x + 5y - 5 &= 52; \\ x^2 + 4x + y^2 + 4y - 57 &= 0; \\ (x + 2)^2 + (y + 2)^2 &= 65. \end{aligned}$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке  $O_1(-2; -2)$

и радиусом  $\sqrt{65}$ .

- 2) Если  $x - 5y + 5 \leq 0$ , то получаем уравнение

$$x^2 + 5x + y^2 - y + x - 5y + 5 = 52; \quad x^2 + 6x + y^2 - 6y - 47 = 0; \quad (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 65.$$

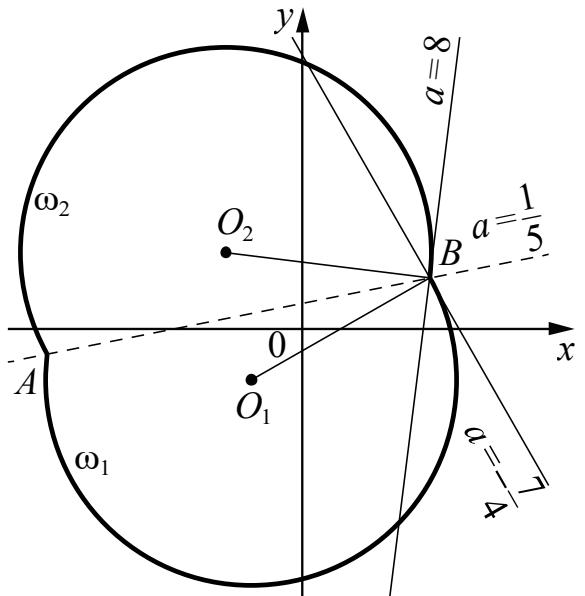
Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке  $O_2(-3; 3)$  и радиусом  $\sqrt{65}$ .

Полученные окружности пересекаются в двух точках  $A(-10; -1)$  и  $B(5; 2)$ , лежащих на прямой  $x - 5y + 5 = 0$ , поэтому в первом случае получаем дугу  $\omega_1$  с концами в точках  $A$  и  $B$ , во втором — дугу  $\omega_2$  с концами в тех же точках (см. рис.).

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую  $m$ , которая проходит через точку  $B$  и угловой коэффициент которой равен  $a$ .

При  $a = \frac{1}{5}$  прямая  $m$  проходит через точки  $A$  и  $B$ , то есть исходная система имеет два решения.

При  $a = -\frac{7}{4}$  прямая  $m$  перпендикулярна прямой  $O_1B$ , угловой коэффициент которой равен  $\frac{4}{7}$ , значит, прямая  $m$  касается дуги  $\omega_1$  в точке  $B$  и пересекает дугу  $\omega_2$  в двух точках (одна из которых — точка  $B$ ), то есть исходная система имеет два решения.



При  $a = 8$  прямая  $m$  перпендикулярна прямой  $O_2B$ , угловой коэффициент которой равен  $-\frac{1}{8}$ , значит, прямая  $m$  касается дуги  $\omega_2$  в точке  $B$  и пересекает дугу  $\omega_1$  в двух точках (одна из которых — точка  $B$ ), то есть исходная система имеет два решения.

При  $a < -\frac{7}{4}$  или  $a > 8$  прямая  $m$  пересекает каждую из дуг  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в точке  $B$  и ещё в одной точке, отличной от точки  $A$ , то есть исходная система имеет три решения.

При  $-\frac{7}{4} < a < \frac{1}{5}$  прямая  $m$  пересекает дугу  $\omega_2$  в двух точках (одна из которых — точка  $B$ ) и не пересекает дугу  $\omega_1$  в точках, отличных от точки  $B$ , то есть исходная система имеет два решения.

При  $\frac{1}{5} < a < 8$  прямая  $m$  пересекает дугу  $\omega_1$  в двух точках (одна из которых — точка  $B$ ) и не пересекает дугу  $\omega_2$  в точках, отличных от точки  $B$ , то есть исходная система имеет два решения.

Значит, исходная система имеет ровно два решения при  $-\frac{7}{4} \leq a \leq 8$ .

**Ответ:**  $-\frac{7}{4} \leq a \leq 8$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого только исключением точек $a = -\frac{7}{4}$ и/или $a = 8$	3
При всех значениях $a$ верно найдено количество решений системы в одном из двух случаев, возникающих при раскрытии модуля ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуг окружностей и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

## Примеры оценивания решений задания 18

### Пример 1.

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1 \text{ имеет ровно три различных корня.}$$

**Ответ:**  $-2 \leq a < -1$ ;  $-1 < a < 1$ ;  $1 < a \leq 2$ .

$$\begin{aligned}
 \text{18. } \sqrt{3x^2 + 2ax + 1} &= x^2 + ax + 1 \Leftrightarrow \sqrt{3(x^2 + \frac{2}{3}ax + \frac{1}{3})} = x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow \sqrt{3(x^2 + \frac{2}{3}ax + \frac{1}{3})} &+ 1 - \frac{a^2}{4} = (x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{1}{2})^2 \Leftrightarrow \sqrt{3(x^2 + \frac{2}{3}ax + \frac{1}{3})} = \sqrt{(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{1}{2})^2 - \frac{a^2}{4}} \\
 \Leftrightarrow \sqrt{3(x^2 + \frac{2}{3}ax + \frac{1}{3})} &+ 1 - \frac{a^2}{4} = (x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{1}{2})^2 \Leftrightarrow x^2 + ax + 1 \geq 0 \\
 \Leftrightarrow 3x^2 + 2ax + 1 &= (x^2 + ax + 1)^2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ 3x^2 + 2ax + 1 = x^4 + 2ax^2 + x^2/2 + 2 + a^2 + 2ax + x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ x^2(x^2 + 2ax + 2 + a^2 - 3) = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ x^2(x^2 + 2ax + a^2 - 1) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ \begin{cases} x=0 \\ x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \text{ (2)} \\ x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0 \text{ (1)} \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Для того чтобы система имела 3 различных решения, необходимо, чтобы  
(1) имело 2 различных решения не равных 0 и удовлетворяющие (2), пусть  $g(x) = x^2 + 2ax + a^2 - 1$ ,  
 $f(x) = x^2 + ax + 1$ ;  $\Delta \neq 0 \Rightarrow g(0) = 0 \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1 \Rightarrow a = 1$  (если  $a = -1$ , то  $x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$  для всех  $x$ )

$$\begin{aligned}
 \text{Заметим, что } (1) \text{ или } x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+a)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+a-1)(x+a+1) = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \\ x = -1-a \end{cases}; \text{ тогда (2) } \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ x = -a \\ x = -1-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2x + a^2 + a - a^2 + 1 \geq 0 \\ x = -a \\ x = -1-a \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ a \in \mathbb{R} \\ x = -a \\ x = -1-a \end{cases} \text{ (3) } + (4) \text{ три различных решения системы имеют тогда} \\
 (3) \text{ и (4) имеют различные, но равные} \\
 \text{нуль решения; } \text{тогда найдём, при каких } a \text{ обладают корни 3 и 4:} \\
 -a = -1-a \Leftrightarrow 1 = 0 \Rightarrow \text{таких } a \text{ не существует. (3) имеет реш. равное 0} \\
 \text{при } a = -1 \text{ - не подходит, (4) имеет реш. } = 0 \text{ при } a = 1 \text{ - не подходит.}
 \end{aligned}$$

(3) имеет реш. при  $a \geq -2$ ; (4) имеет реш. при  $a \leq 2 \Rightarrow (3) \cup (4)$  имеют различные реш., отлич. от 0 при  $a \in [-2; 2]$  и  $a \neq \pm 1$

**Ответ:**  $a \in [-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2]$

### Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 4 балла.**

## Пример 2.

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1 \text{ имеет ровно три различных корня.}$$

**Ответ:**  $-2 \leq a < -1$ ;  $-1 < a < 1$ ;  $1 < a \leq 2$ .

$$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$$

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ 3x^4 + 2ax^3 + x^2 = x^4 + a^2x^2 + x^2 + 2x^2 + 2ax^3 + 2ax^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ x^4 + a^2x^2 - x^2 + 2ax^3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ x^2(x^2 + a^2 - 1 + 2ax) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ x^2 = 0 \\ x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Уравнение имеет решение, когда

$$x^2 + 2ax + a^2 - 1 \text{ имеет 2 корня и}$$

или удовлетворяет неравенству  $x^2 + 2ax + 1 \geq 0$ .

$$x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$$

$$(x+a)^2 - 1 = 0$$

$$(x+a-1)(x+a+1) = 0.$$

$$\begin{cases} x = -a+1 & \text{Решениями } x \text{ б} x^2 + ax + 1 \geq 0. \\ x = -a-1 \end{cases}$$

$$1) (-a+1)^2 + a(-a+1) + 1 \geq 0. \quad 2) (-a-1)^2 + a(-a-1) + 1 \geq 0$$

$$a^2 - 2a + 1 - a^2 + a + 1 \geq 0. \quad a^2 + 2a + 1 - a^2 - a + 1 \geq 0$$

$$-a + 2 \geq 0 \quad a \leq 2$$

$$2a + 2 \geq 0$$

$$a \in [-1, 2].$$

$$a \geq -2.$$

Найдены значения  $x$ , когда они совпадают;

3 случая

$$1) -a+1 = -a-1 \quad 1) \text{- нет решений}$$

$$2) 0 = -a+1$$

$$2) a = 1 \quad 3) a = -1. \quad \left. \begin{array}{l} \text{3) } a = -1. \\ \text{3) } a = -1. \end{array} \right\} \text{ - выполняются эти} \\ \text{точки}$$

$$a \in (-1, 1) \cup (1, 2).$$

Очевидно!  $(-1, 1) \cup (1, 2)$ . Уравнение имеет 3 разн. корня.

**Комментарий.**

Решение логично, все шаги присутствуют, но при решении неравенства в пункте 2) допущена ошибка вычислительного характера, что соответствует критерию на 2 балла.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

### Пример 3.

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1 \text{ имеет ровно три различных корня.}$$

**Ответ:**  $-2 \leq a < -1$ ;  $-1 < a < 1$ ;  $1 < a \leq 2$ .

$$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1 \quad (1); \quad a?$$

ур-е имеет 3 различных корня

1)  $D \geq 0$ :

$$x^2 + ax + 1 = 0; \quad D \leq 0, \text{ тк}$$

$D = a^2 - 4$

как тогда на графике будет расположение

так, как на рисунках ④ или ⑤

всегда на графике

верх ток как корр, при  $x^2$  рабен 1 > 0

$$D \leq 0 \Rightarrow a^2 - 4 \leq 0; \quad (a-2)(a+2) \leq 0$$

$$\Rightarrow a \in [-2; 2] \quad (\star)$$

2) при  $a \in [-2; 2]$  безведём обе части уравнения в квадрат, тогда

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2ax + 1 &= (x^2 + ax + 1)^2 \\ 3x^2 + 2ax + 1 &= (x^2 + ax)^2 + 2(x^2 + ax) + 1 \\ 3x^2 + 2ax + 1 &= x^4 + 2ax^3 + a^2x^2 + 2x^2 + 2ax + 1 \\ x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2 - 3)x^2 + 2ax + 1 &= 0 \\ x^2 \cdot (x^2 + 2ax + a^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

тогда уравнение имело ровно 3 различных корня нужно, чтобы  $x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$  имело ровно 2 корня, отмеченные  $\circ$  и  $\bullet$  друг друга

$$x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0 \quad (\star\star)$$

$$\frac{D}{4} = a^2 - a^2 + 1 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = -a \pm 1$$

$x_1 \neq x_2$ , т.к.  $-a + 1 = -a - 1 \Rightarrow 1 = -1$  - не верно

уравнение  $(\star\star)$  имеет 2 различных корня при  $\forall a$  из  $OD3$

уравнение имеет 3 различных корня при  $\forall a$  из  $OD3$ ,

то есть  $a \in [-2; 2]$

Ответ:  $a \in [-2; 2]$

**Комментарий.**

Получены корни уравнения  $x = 0$ ,  $x = 1 - a$ ,  $x = -1 - a$  и задача сведена к исследованию полученных корней при условии  $x^2 + ax + 1 \geq 0$  (есть только указание).

**Оценка эксперта: 1 балл.**

#### Пример 4.

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^4 + ax + 1} = x^2 + ax + 1 \text{ имеет ровно три различных корня.}$$

**Ответ:**  $-2 \leq a < -1$ ;  $-1 < a < 1$ ;  $1 < a \leq 2$ .

$\sqrt{3x^4 + ax + 1} = x^2 + ax + 1$  \*\*\*  
 $x^4 + ax^2 + 1 = x^4 + 2ax^2 + a^2$   
 $ax^2 + 1 = 2ax^2 + a^2$   
 $ax^2 - 2ax^2 = a^2 - 1$   
 $a^2 - 3x^2 = a^2 - 1$   
 $3x^2 = 2$   
 $x^2 = \frac{2}{3}$   
 $x_1, 2 = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$

3 различных корня

все возможные случаи

(1) имеет 2 корня  
 $a > 0$

(2) имеет 1 корень  
 $a = 0$

(3) имеет 1 корень  
 $a < 0$

если  $a = \pm \sqrt{3}$  то б) (1) не  $> 0 \Rightarrow a \neq \pm \sqrt{3}$

$a = \pm 1$  проверить

корни различны

аналогично при  $a = -2$

$x_1, 2 = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$

$x_1, 2 = \pm \sqrt{\frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{3}} = \pm \frac{\sqrt{2 \pm 1}}{\sqrt{3}}$

$x_1, 2 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

$x_3 = 1$

$x_4 = x_3$

$a = -2$  не подходит

$x^4 + ax^2 + 1 > 0$   
 $3x^4 + 2ax^2 + 1 = x^4 + a^2x^2 + 1 + 2ax^2 + 2x^2 + 2ax$

и.к.п. не подходит

$a \neq \pm 1$

и.к.п. не подходит

Чтобы решить № 18.

$$\textcircled{3} \quad x^4 + ax^3 - x^2 + rx + s = 0 \quad x^4 + ax^3 + 1 > 0 \quad (\text{*)} \quad \text{после вынесения коэффициента } a$$

$$x^2(x^2 + a^2 - 1 + rx) = 0$$

$x_1 \neq 0$

- кратность  
которой  
не может  
быть  
равной  
одной  
или  
нечётной

$$x^2 + ax + 1 > 0$$

$$a^2 - a^2 - 1 > 0$$

$$a^2 - a^2 + 1 > 0$$

другие две  
корни

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm 1}{2}$$

корни  
не являются  
и не образуют  
нечётных  
разностей  
 $x_3$ )

$$x_1 = -a + 1 \quad x_2 = -a - 1$$

$$x_1 x_2 = \frac{-a+1 \cdot -a-1}{2} = \frac{a^2 - 1}{2} \quad \text{одно из значений } a$$

$x_1 x_3$

$$\frac{-a+1-1}{2} = 0$$

$$\frac{-a-1-1}{2} = -1$$

$$\text{(*)}: \quad x_1 = -a + 1$$

$$(a+1)^2 + a(-a+1) + 1 > 0 \quad \text{решение включает } x_1 = -a + 1$$

~~$$(1-a)^2 - a^2 + a + 1 > 0$$~~

~~$$1 - 2a + a^2 - a^2 + a + 1 > 0$$~~

$$x_1^2 - a - 1$$

$$(a+1)^2 + a(-a-1) + 1 > 0$$

~~$$(1-a)^2 - a^2 + a + 1 > 0$$~~

~~$$1 - 2a + a^2 - a^2 + a + 1 > 0$$~~

$$2 - a > 0$$

$$a < 2$$

$$a + 2 > 0$$

$$a > -2$$

Эквивалентное условие для градуса кратности  $a$ :

$$a \in (-x_1 - 1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2)$$

$$\text{График: } \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \xrightarrow{\text{---}} \begin{array}{ccccccc} -2 & -1 & 1 & 2 & \dots & \dots & \dots \end{array} \quad a \quad \text{Ответ: } (-x_1 - 1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2)$$

### Комментарий.

В решении присутствуют все этапы. Решение соответствует критерию на 3 балла: с помощью верного рассуждения получено множество значений  $a$ , отличающееся от искомого только исключением точек  $a = -2$  и/или  $a = 2$ .

Оценка эксперта: 3 балла.

### Пример 5.

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 - y - |x + 5y + 5| = 52, \\ y - 2 = a(x - 5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

**Ответ:**  $-8 \leq a \leq \frac{7}{4}$ .

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 - y - |x + 5y + 5| = 52 & (1) \\ y - 2 = a(x - 5) & (2) \end{cases}$$

(1)  $\begin{cases} x + 5y + 5 \geq 0 \\ x^2 + 5x + y^2 + y - x - 5y - 5 = 52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -\frac{x+5}{5} \\ x^2 + 4x + y^2 - 4y - 5 = 52 \end{cases}$

$\begin{cases} y \leq -\frac{x+5}{5} \\ x^2 + 5x + y^2 + y + 5y + 5 = 52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -\frac{x+5}{5} \\ x^2 + 6x + y^2 + 6y = 42 \end{cases}$

$\begin{cases} y \geq -\frac{x+5}{5} & (1.1) \\ (x+2)^2 + (y-2)^2 = 65 & R_1 = \sqrt{65} \text{ - радиус с центром } C_1(-2; 2) \text{ и} \\ y < -\frac{x+5}{5} & (1.2) \\ (x+3)^2 + (y+3)^2 = 65 & R_2 = \sqrt{65} \text{ - радиус с центром } C_2(-3; -3) \text{ и} \\ R_1 = R_2 = \sqrt{65} \end{cases}$

(1.1)  $\begin{cases} y \geq -\frac{x+5}{5} \\ (x+2)^2 + (y+2)^2 = 65 \end{cases}$

на пересечении с прямой  $y = -\frac{x+5}{5}$

$(x+2)^2 + \left(-\frac{x+5}{5} - 2\right)^2 = 65$

$(x+2)^2 + \left(-\frac{(x+5) + 10}{5}\right)^2 = 65$

$(x+2)^2 + \frac{(x+15)^2}{25} = 65$

$x^2 + 4x + 4 + \frac{x^2 + 30x + 225}{25} = 65$

$25x^2 + 100x + 100 + x^2 + 30x + 225 = 65 \cdot 25 = 0$

$26x^2 + 130x - 130 = 0$

$2x^2 + 10x - 100 = 0$

$x^2 + 5x - 50 = 0$

$x = -25 \pm \sqrt{625 + 200} = -25 \pm 225$

$x_1 = \frac{-25 + 225}{2} = 5, \quad y_1 = \frac{-5 - 5}{5} = -2$

$x_2 = \frac{-25 - 225}{2} = -110, \quad y_2 = \frac{10 - 5}{5} = 1$

$$1.2. ) \quad \begin{cases} y < -\frac{x-5}{5} \\ (x+3)^2 + (y+3)^2 = 65 \end{cases}$$

и решаем сис

$$(x+3)^2 + \frac{(x+5-15)^2}{25} = 65$$

$$25x^2 + 6 \cdot 25x + 9 \cdot 25 + (x-10)^2 - 65 \cdot 25 = 0$$

$$25x^2 + 150x + 225 - 20x + 100 - 1625 = 0$$

$$25x^2 + 130x - 1300 = 0$$

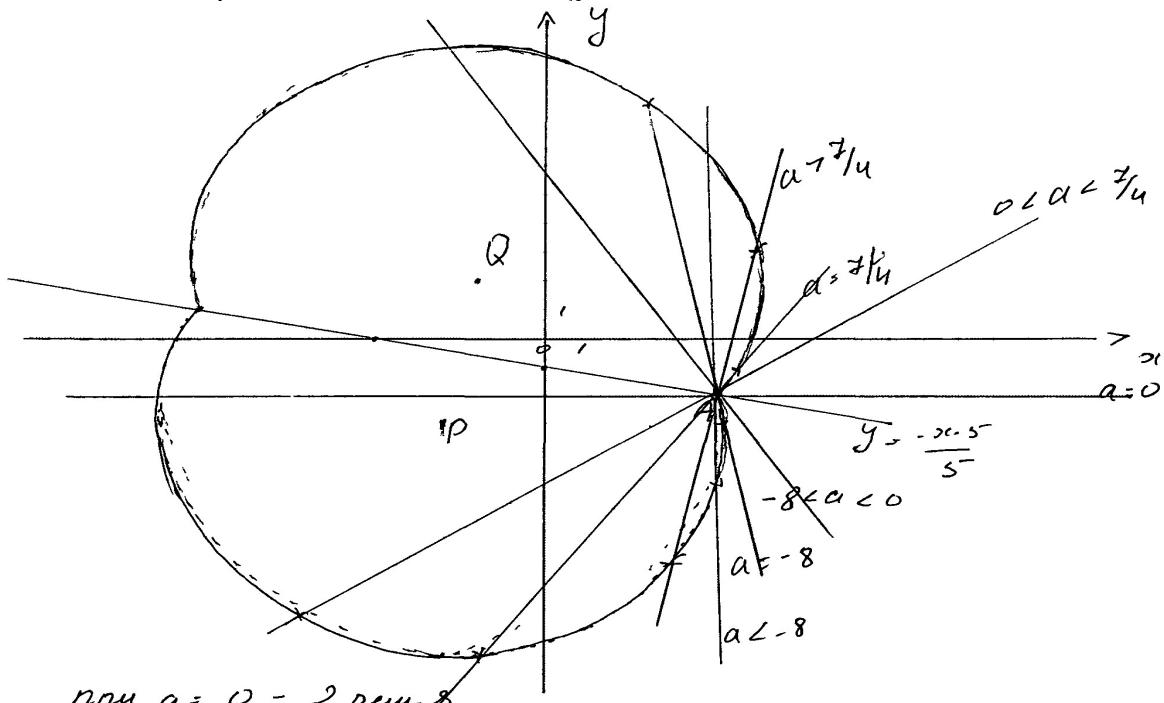
$$x^2 + 5x - 50 = 0$$

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -10$$

$$y_1 = y_2 = -2$$

$$y_3 = y_4 = 1$$

(2)  $y = a(x-5) - 2$  — прямая проходит, проходя через точку  $A(5; -2)$  и касается окружности на диаметре



при  $a = 0$  — 2 решения

находим  $a$ , при к-м  $y = a(x-5) - 2$  касается окружности в точке  $P$

$$(x+2)^2 + (a(x-5)-2-2)^2 = 65$$

$$x^2 + 4x + 4 + (a(x-5) - 4)^2 = 65$$

$$x^2 + 4x + 4 + a^2(x-5)^2 - 8a(x-5) + 16 = 65$$

$$x^2 + 4x + a^2(x^2 - 10x + 25) - 8ax + 40a - 45 = 0$$
 ~~$x^2 + a^2(x^2 + 1 + a^2) + x(4 - 10a^2 - 8a) + 25a^2 + 40a - 45 = 0$~~ 

$$\frac{D}{4} = (2 - 5a^2 - 4a)^2 - (a^2 + 1)(25a^2 + 40a - 45) =$$

$$(5a^2 + 4a - 2)^2 - (a^2 + 1)(25a^2 + 40a - 45) =$$

и можем наложить

$$25x^4 + 40x^3 + 16x^2 - 26x^2 - 16x + 4 - 25x^4 - 40x^3 + 45x^2 -$$

$$- 25x^2 - 40x + 45 = 16x^2 - 40x + 45 - 16x + 4 =$$

$$- 16x^2 - 56x + 49 = 0 \text{ (т.к. ур-е должно иметь ед-е реш-е)}$$

реш-е )

$$16x^2 - 56x + 49 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 28^2 - 16 \cdot 49 = 0$$

$$(4x - 7)^2 = 0$$

$$\text{при } x = \frac{7}{4} - 3 \text{ реш-я}$$

$$\text{при } x > \frac{7}{4} - 3 \text{ реш-я}, \text{ при } x < 0; \frac{7}{4} - 3 \text{ реш-я}$$

найдём  $a$ , прик-е  $y = a(x-5) - 2$  кас. окр-тии  $C$  в  $P$

$$x^2 + 6x + (a(x-5) - 2)^2 + 6(a(x-5) - 2) - 4y = 0$$

$$x^2 + 6x + a^2(x-5)^2 - 4a(x-5) + 4 + 6a(x-5) - 12 - 4y = 0$$

$$x^2 + 6x + a^2(x^2 - 10x + 25) - 4ax + 20a + 6ax - 30a - 55 = 0$$

$$x^2(1 + a^2) + 6x - 10a^2x + 25a^2 + 2ax - 40a - 55 = 0$$

$$x^2(1 + a^2) + x(6 - 10a^2 + 2a) + 25a^2 - 10a - 55 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = (3 + a - 5a^2)^2 - (a^2 + 1)(25a^2 - 10a - 55) =$$

$$= 9 + 6(a - 5a^2) + (a - 5a^2)^2 - 25a^4 + 10a^3 + 55a^2 -$$

$$- 25a^2 + 10a + 55 = \cancel{6a^2} \cancel{- 6a^3} \cancel{+ 25a^4} - 10a^3 + a^2 + 6a - 30a^2 +$$

$$+ 9 - 25a^4 + 10a^3 + 55a^2 - 25a^2 + 10a + 55 = a^2 + 16a + 64$$

$$a^2 + 16a + 64 = 0 \text{ (т.к. ур-е должно иметь ед-е реш-е)}$$

$$(a + 8)^2 = 0$$

$$\text{при } a = -8 - 3 \text{ р-я}$$

$$\text{при } a = -8 - 3 \text{ р-я}, \text{ при } a \in (-\infty, -8; 0) - 2 \text{ р-я}$$

*Ответ:*  $2 \text{ р-я}$  при  $a \in (-8, 0) \cup (0; \frac{7}{4})$  и  $0$ , т.е. при  $a \in (-8; \frac{7}{4})$

### Комментарий.

Ход решения ясен, изложен более чем подробно. Ошибок нет, кроме недочета: концы промежутка не включены в ответ.

**Оценка эксперта: 3 балла.**

### Пример 6.

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 - y - |x + 5y + 5| = 52, \\ y - 2 = a(x - 5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

**Ответ:**  $-8 \leq a \leq \frac{7}{4}$ .

*Решение:*

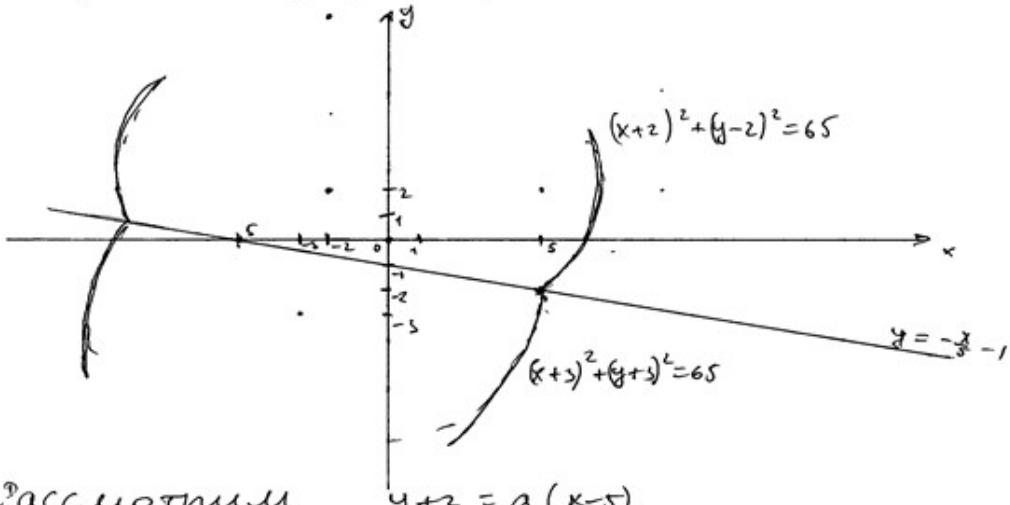
$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 + y - |x + 5y + 5| = 52 \\ y - 2 = a(x - 5) \end{cases}$$

Рассмотрим 2 случая при  $x + 5y + 5 \geq 0$  и при  $x + 5y + 5 < 0$

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 + y - x - 5y - 5 = 52 \\ x + 5y + 5 \geq 0 \\ x^2 + 5x + y^2 + y + x + 5y + 5 = 52 \\ x + 5y + 5 < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + 5x + y^2 + y - x - 5y - 5 = 52 \\ x + 5y + 5 \geq 0 \\ x^2 + 5x + y^2 + y + x + 5y + 5 = 52 \\ x + 5y + 5 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-2)^2 = 65 - \text{графиком окр. с центром } (-2; 2) \text{ и } r = \sqrt{65} \\ y \geq -\frac{x}{5} - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+5)^2 + (y+3)^2 = 65 - \text{графиком окр. с центром } (-5; -3) \text{ и } r = \sqrt{65} \\ y \leq -\frac{x}{5} - 1 \end{cases}$$

Построим эскизы графиков.



Рассмотрим  $y - 2 = a(x - 5)$ .

$y = a(x - 5) + 2$  — графиком прямой является множество прямых, проходящих через точку  $(5; 2)$ . Тогда, для касания окр.  $(-2; 2); \sqrt{65}$   $a$  должно быть равно  $-5$ , а для касания окр.  $(-5; -3); \sqrt{65}$   $a$  должно быть равно  $\frac{7}{4}$ .  
при  $a \in [-8; \frac{7}{4}]$  система имеет 2 корня.  
при  $a \in (-\infty; -8) \cup (\frac{7}{4}; +\infty)$  система имеет 3 корня.  
Общий:  $a \in [-8; \frac{7}{4}]$ .

**Комментарий.**

Решение и ответ верные, хотя нет обоснования, почему для касания  $a$  « $a$  должно быть равно  $-8$ » или « $\dots 7/4$ ».

**Оценка эксперта: 4 балла.**

## 7. Критерии проверки и оценка решений заданий 19 ЕГЭ-2018

Содержательно задание №19 проверяет в первую очередь не уровень математической (школьной) образованности, а уровень математической культуры. Формирования культуры происходит на протяжении всех лет обучения (и не только в школе). Для решения этой задачи никаких фактов из теории чисел типа теоремы Вильсона, чисел Мерсенна, малой теоремы Ферма, теории сравнений и т.п. для решения этих заданий не требуется. Тот, кто эти факты знает, разумеется, может их использовать, но, подчёркиваем, при решении всегда можно обойтись и без них.

Условия задания №19 разбиты на пункты. По существу, задача разбита на ряд подзадач (частных случаев), последовательно решая которые можно в итоге справится с ситуацией в целом.

### Задача 19 (демонстрационный вариант 2018 г.).

На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно  $-3$ , среднее арифметическое всех положительных из них равно  $4$ , а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно  $-8$ .

- a) Сколько чисел написано на доске?
- b) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
- v) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

**Решение.** Пусть среди написанных чисел  $k$  положительных,  $l$  отрицательных и  $m$  нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому

$$4k - 8l + 0 \cdot m = -3(k + l + m).$$

- a) Заметим, что в левой части приведённого выше равенства каждое слагаемое делится на 4, поэтому  $k + l + m$  — количество целых чисел — делится на 4.

По условию  $40 < k + l + m < 48$ , поэтому  $k + l + m = 44$ . Таким образом, написано 44 числа.

б) Приведём равенство  $4k - 8l = -3(k + l + m)$  к виду  $5l = 7k + 3m$ . Так как  $m \geq 0$ , получаем, что  $5l \geq 7k$ , откуда  $l > k$ . Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в) Подставим  $k + l + m = 44$  в правую часть равенства  $4k - 8l = -3(k + l + m)$ :  $4k - 8l = -132$ , откуда  $k = 2l - 33$ . Так как  $k + l \leq 44$ , получаем:  $3l - 33 \leq 44$ ;  $3l \leq 77$ ;  $l \leq 25$ ;  $k = 2l - 33 \leq 17$ , то есть положительных чисел не более 17.

Приведём пример, когда положительных чисел ровно 17. Пусть на доске 17 раз написано число 4, 25 раз написано число  $-8$  и 2 раза написан 0. Тогда  $\frac{4 \cdot 17 - 8 \cdot 25}{44} = -3$ ; указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

**Ответ:** а) 44; б) отрицательных; в) 17.

<b>Содержание критерия</b>	<b>Баллы</b>
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта <i>a</i> ; — обоснованное решение пункта <i>b</i> ; — искомая оценка в пункте <i>c</i> ; — в пункте <i>c</i> приведён пример, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<b>4</b>

### Задача 1.

В последовательности  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ , состоящей из целых чисел,  $a_1 = 1$ ,  $a_n = 235$ . Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

- а) Приведите пример такой последовательности.
- б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?
- в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

Решение.

- а) Например, последовательность 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, ..., 233, -230, 235 удовлетворяет условию задачи (чередуются суммы чисел 3 и 5).
- б) Поскольку 3, 5 и 25 — нечётные числа, любые два соседних члена последовательности имеют разную чётность. На нечётных местах должны стоять нечётные числа, а на чётных — чётные. Число 235 нечётное, поэтому оно не может стоять на чётном месте. Значит, последовательность не может состоять из 1000 членов.

- в) Рассмотрим три члена последовательности:  $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}$  ( $1 \leq k \leq n-2$ ).

Поскольку  $a_k + a_{k+1} \geq 3$ ,  $a_{k+1} + a_{k+2} \leq 25$ , получаем:  $a_{k+2} \leq a_k + 22$ .

В предыдущем пункте было показано, что последовательность должна состоять из нечётного числа членов. Пусть  $n = 2m + 1$ , тогда

$$a_n = a_{2m+1} \leq a_{2m-1} + 22 \leq a_{2m-3} + 22 \cdot 2 \leq \dots \leq a_1 + 22 \cdot m; 235 \leq 1 + 22m,$$

откуда  $m \geq 11$ . Значит, последовательность состоит не менее чем из 23 чисел. Приведём пример последовательности, удовлетворяющей условию задачи, состоящей из 23 членов: 1, 2, 23, -20, 45, -42, 67, -64, 89, -86, 111, -108, 133, -130, 155, -150, 175, -170, 195, -190, 215, -210, 235.

**Ответ:** а) например, 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, ..., 233, -230, 235; б) нет; в) 23.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — пример в п. а; — обоснованное решение п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

## Задача 2.

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше  $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$ , если все числа на доске кратны 3?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

**Решение.**

а) Если на доске записано 29 зелёных чисел: 3, 6, ..., 87 — и одно красное число 21, то их сумма меньше 1395.

б) Пусть на доске ровно одно красное число. Тогда зелёных чисел 29, а их сумма не меньше, чем сумма 29 наименьших чисел, делящихся на 3:

$$3 + 6 + \dots + 87 = \frac{90 \cdot 29}{2} = 1305.$$

Это противоречит тому, что сумма написанных чисел равна 1067.

в) Пусть на доске написано  $n$  красных чисел и  $30 - n$  зелёных чисел. Тогда

$$\text{сумма красных чисел не меньше } 7 + 14 + \dots + 7n = \frac{7n^2 + 7n}{2},$$

а сумма зелёных чисел не меньше

$$3 + 6 + \dots + 3(30 - n) = \frac{3(31 - n)(30 - n)}{2} = \frac{3n^2 - 183n + 2790}{2}.$$

Таким образом,  $1067 \geq 5n^2 - 88n + 1395$ ;  $5n^2 - 88n + 328 \leq 0$ , откуда, учитывая, что  $n$  — целое, получаем  $n \geq 6$ .

Приведём пример 6 красных чисел и 24 зелёных чисел, сумма которых равна 1067: 7, 14, 21, 28, 35, 56, 3, 6, ..., 66, 69, 78.

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 6.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта а; — обоснованное решение пункта б; — искомая оценка в пункте в; — пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<b>4</b>

## Примеры оценивания решений задания 19

### Пример 1.

В последовательности  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ , состоящей из целых чисел,  $a_1 = 1, a_n = 235$ . Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

- Приведите пример такой последовательности.
- Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?
- Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

**Ответ:** а) например, 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, ..., 233, -230, 235; б) нет; в) 23.

б). Нет. Р.к. в этой посл.  $a_i + a_{i+1} = \begin{cases} 5 \\ 3 \\ 25 \end{cases} \Rightarrow$   
р.к.  $a_1$  - неч., то все чётные члены - чет,  
а нечетные - неч  $\Rightarrow a_n = 235$  - неч член р.к.  
 $n$  не 1000.  $\Rightarrow$  невозможн. не может.

в)  $(1, 2, -1, 6, 2, 3)$

а)  $1, -26, 51, -46, 71, -66, 91, -86, 111, -106, 131, -126, 151, -146, 171, -166, 191, -188, 213, -210, 235$

### Комментарий.

В пункте а допущена ошибка – сумма первых двух чисел равна -25. При ответе на вопрос пункта б участник экзамена верно показал, что случай  $n=1000$  невозможен.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

## Пример 2.

В последовательности  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ , состоящей из целых чисел,  $a_1 = 1, a_n = 235$ . Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

- Приведите пример такой последовательности.
- Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?
- Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

**Ответ:** а) например, 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, ..., 233, -230, 235; б) нет; в) 23.

(19) А) Пример такой последовательности:

1, 3, 0, 5, -2, 7, -4, 9, -6, 11, -8, 13, -10, 15, -12, 17, -14, 19, -16, 21, -18, 23, -20, 25, -22, 27, -24, 29, -26, 31, -28, 33, -30, 35, -32, 37, -34, 59, -56, 81, -78, 103, -100, 125, -122, 147, -144, 169, -166, 191, -188, 213, -210, (235).

б) Да, например, последовательность, членами которой являются чередующиеся числа 0 и 3.

0, 3, 0, 3, 0, 3...

Сумма любых двух соседних членов в последовательности равна 3, что соответствует условию.

В последовательности, состоящей из 1000 членов, будет 333 члена 0 и 334 члена 3. Все нечётные члены последовательности будут нулями, все чётные — тройками.

### Комментарий.

В пункте а верно приведен пример. Решение пункта б неверно.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

### Пример 3.

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше  $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$ , если все числа на доске кратны 3?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 6.

а)  $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$  - 30 чисел. Число можно вычесть из 30 зелёных.

Да, может, т.к. мы можем заменить число 90 на число 21, при котором оно будет красного цвета (красное), а в будущем оно будет зелёным на 969 - 2.т.г.

б) Возьмём наименьшую сумму чисел написанных только зелёных.

Это  $1395 = 3 + 6 + \dots + 20$ . К нам нужно что добавить одно красное число. Для этого, чтобы минимизировать сумму мы добавляем самое большое зелёное - 90 и добавляем минимальное возможное красное - 7. Итоговая сумма  $1395 - 90 + 7 = 1312 > 1067 \Rightarrow$  не возможно.

в) Числа при делении на 3 дают остатки при делении на 7

остаток неравен: 3 6 2 5 1 4 0

Число 1067 даёт остаток 3 при делении на 7  $\Rightarrow$

Знаем, что остаток при делении на 7 не может быть больше 6.

Они не могут получиться при делении на 3.  $1067 - 726 = 341 \Rightarrow 1067 - 759 = 308 \Rightarrow$

= они дают остаток на 6.

$$3 + \dots + 6 = 6 \cdot 11 = 66, \quad 1067 - 726 = 341, \quad 1067 - 759 = 308$$

**Комментарий.**

Приведено верное решение пункта а. Приведено верное решение пункта б. Решение в пункте в не завершено.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

#### Пример 4.

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше  $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$ , если все числа на доске кратны 3?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

а) Да., пример:

$$\underbrace{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots, 87}_{\text{зелёные}} / \begin{array}{c} 21 \\ | \\ \text{красное} \end{array}$$

Сумма чисел  $= 1326 < 1395$ , так что возможно

да.

б) Найдем минимально возможную сумму с одним красным числом.

т.к. сумма  $\Rightarrow$  чётн.  $\Rightarrow$  красное число  $\equiv 7$ ,  
зелёные -  $3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots, 87$ .

$\sum_{\text{числ}} = 1305 + 7 = 1312 > 1067 \Rightarrow$  Не может

ответ: нет.

в) Пусть  $f(n)$ - функция, значение которой равно минимальной возможной сумме при данных  $n$ . где  $n$ - кол-во красных чисел.

$$\begin{aligned} f(n) &= 7 \cdot \left( \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right) + 3 \cdot \left( \frac{\cancel{(30-n)} (31-n)}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( 7n^2 + 7n + 3n^2 - 3 \cdot 61n + 3 \cdot 30 \cdot 31 \right) = \\ &= \frac{1}{2} (10n^2 - 176n + 2790) = 5n^2 - 88n + 1395. \end{aligned}$$

найдем минимальное  $n$  (~~нечетное~~  $\mathbb{Z}^+$ ), такое что  $f(n) \leq 1067$ .

$$5n^2 - 88n + 1395 \leq 1067$$

$$5n^2 - 88n + 328 \leq 0.$$

$$\frac{D}{4} = \frac{44^2 - 328 \cdot 5}{4} = 1936 - 1640 = 296.$$
$$n \in \left[ \frac{44 - \sqrt{296}}{5}, \frac{44 + \sqrt{296}}{5} \right] \Rightarrow n = 6.$$

$$f(6) = 7 \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} + 3 \cdot \frac{24 \cdot 25}{2} = 3(49 + 12 \cdot 25) = 3 \cdot 349 = 1047.$$

~~Чтобы~~  $f(5) = 1380 > \underset{1067}{\text{запро}} \text{шено}$ .

Ответ: 6 - наименьшее кол-во красных  
птиц.

7, 14, 21, 28, 35, 56.

3, 6, 9, 12, ..., 69, 78, 87

### Комментарий.

Обоснованно получены верные ответы во всех пунктах.

Оценка эксперта: 4 балла.

### Пример 5.

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше  $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$ , если все числа на доске кратны 3?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 6.

а) Идеи обозначали числа, которые не были числами

пример:  $3_1, 6_1, \dots, 17_1, 21_n$

б) Нет.

Если только одно число красное, то в последовательности с наименьшим наборе  
числом ( $3_1, 6_1, \dots, 17_1, 21_n$ ) сумма равна 1312, что больше, чем 1067

в) 6.

В последовательности с наименьшими красными числами и наименьшей  
суммой ( $3_1, 6_1, \dots, 17_1, 21_n, 14_k, \dots, 35_k$ ) сумма равна 1077,  $1077 > 1067$   
одного числа будем писать 1067, если в последовательности выше наборе  
66<sub>22</sub> на 56<sub>n</sub>.

### Комментарий.

Обоснованно получен ответ в пунктах а и б. В решении пункта в есть логическая ошибка: не доказано, что красных чисел не может быть меньше 5. Взяв пять красных, нужно взять 25 зеленых чисел, а не 26. Кроме того, сумма чисел найдена неверно.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Указания по оцениванию развернутых ответов участников ЕГЭ  
для эксперта, проверяющего развернутые ответы  
на задания 13–19 по МАТЕМАТИКЕ**

*(документ предоставается эксперту при проведении оценивания экзаменационных работ вместе с критериями оценивания)*

Эксперт, проверяющий задания с развернутым ответом, располагает следующими материалами:

- 1) тексты заданий;
- 2) возможный вариант решения каждой задачи 13–19;
- 3) критерии оценивания заданий 13–19.

*При проверке заданий с развернутым ответом эксперт имеет возможность пользоваться непрограммируемым калькулятором.*

В критериях оценивания выполнения заданий с развернутым ответом КИМ ЕГЭ по математике для каждого задания приводится один возможный вариант решения. Однако предлагаемый разработчиками КИМ способ (метод) решения не является эталонным. Он лишь помогает эксперту в решении соответствующего задания.

Выполнение заданий оценивается в соответствии с критериями оценивания ответов на задания с развернутым ответом. Принципом построения системы оценивания является оценка продвижений участника экзамена в решении задачи в виде достижения формализованных в критериях промежуточных результатов. Максимальный балл выставляется только при наличии в тексте решения обоснованно полученного правильного ответа. Наличие в тексте решения недостатка в обосновании ответа или вычислительной ошибки не позволяет выставить за решение задания в соответствии с критериями максимальный балл. В случае, когда решение не подпадает ни под один из критериев положительных баллов (не достигнут ни один промежуточный математический результат), выполнение задания оценивается 0 баллов.

При использовании обобщенной схемы оценивания ответов на каждое из **заданий 13–19 рекомендуется обращать внимание на следующие моменты:**

- ✓ Перед проведением проверки выполнения каждого из заданий необходимо изучить критерии его оценивания в материалах для эксперта, обратив внимание **на детализацию и конкретизацию обобщенной схемы оценивания применительно к конкретному заданию.**

- ✓ Решение участника экзамена может иметь логику, отличную от логики решения, данного в критериях (альтернативное решение). В этом случае эксперт оценивает допустимость решения конкретной задачи тем способом, который выбрал участник экзамена. Если ход решения допустим, то эксперт *оценивает обоснованность этого решения на основании той совокупности свойств (признаков), формул или утверждений, которые соответствуют выбранному способу решения.*
- ✓ Участник экзамена может использовать без доказательства математические факты и формулы, содержащиеся в учебниках, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования (далее – Федеральный перечень).
- ✓ Если экзаменуемый использует в решении без доказательства формулы и факты, которые не представлены в учебниках, входящих в Федеральный перечень, то такое решение классифицируется как недостаточно обоснованное.
- ✓ Если математические преобразования, представленные в решении, не отражают основных необходимых логических шагов, то решение не может оцениваться максимальным баллом.
- ✓ Если при решении геометрической задачи использует рисунок, то ошибки в соотношении длин отрезков на рисунке, не влекут за собой снижения баллов за решение геометрической задачи, если на рисунке верно отображена геометрическая конфигурация и верно обозначены точки, описанные в решении.
- ✓ При проверке правильности решения необходимо проверять корректность промежуточных шагов решения, в том числе числовых выкладок (при необходимости, с помощью калькулятора). Наличие ошибок в промежуточных выкладках, даже не повлиявших на итоговый ответ, означает наличие математически некорректного перехода в решении задачи, что не позволяет оценить решение задачи максимальным баллом.
- ✓ Если участник экзамена решает задачу с другими числовыми данными, то такое решение задачи оценивается в 0 баллов, даже если он решают содержательно более сложную задачу.

- ✓ При проверке решения каждого из *заданий 13–19* необходимо вычленить в решении *три элемента*:
  - логика (последовательность и закономерность) решения,
  - обоснованность решения,
  - числовой ответ.

Количество логических шагов в решении и перечень условий и закономерностей зависит от выбранного способа решения. Это необходимо учитывать при применении критериев оценивания выполнения задания с развернутым ответом.

В процессе проверки необходимо придерживаться *следующих общих правил*:

- ✓ При работе эксперт выставляет свои оценки в протокол проверки развернутых ответов.
- ✓ Выставление баллов в протокол проверки развернутых ответов рекомендуется проводить по работам: все задания первой проверяемой работы, все задания второй проверяемой работы и т.д. Это позволяет обнаружить ошибки, допущенные экзаменуемым в нумерации задач, а также обнаружить непронумерованную, или пронумерованную неверно, или случайно пропущенную экспертом задачу. Ошибочное указание участником экзамена номера задачи, которую он выполняет, не может служить основанием для снижения оценки за фактически выполненное задание.
- ✓ Результаты оценивания переносятся в протокол проверки развернутых ответов, при этом баллы по каждому заданию переносятся в колонку, название которой соответствует номеру задания (см. Рисунок 1):
  - баллы по заданию **13** переносятся в колонку **13** протокола;
  - баллы по заданию **14** переносятся в колонку **14** протокола;
  - баллы по заданию **15** переносятся в колонку **15** протокола;
  - баллы по заданию **16** переносятся в колонку **16** протокола;
  - баллы по заданию **17** переносятся в колонку **17** протокола;
  - баллы по заданию **18** переносятся в колонку **18** протокола;
  - баллы по заданию **19** переносятся в колонку **19** протокола.
- ✓ Баллы выставляются в протокол проверки *гелевой черной ручкой*.
- ✓ Внесение изменений в протокол проверки крайне нежелательно. Все исправления вносятся *только поверх неверных записей*. Использование замазок и затирок с целью исправления записей категорически недопустимо!

Рисунок 1. Протокол проверки развернутых ответов 2018 года. Образец.

Протокол проверки развернутых ответов															
 Регион 90 ФИО эксперта Иванов И.И. Примечание		Код предмета 2		Название предмета Математика профильная (2018.03.30)		Номер протокола 1000009		Код эксперта 011224							
		Образец заполнения 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 X													
№	Код бланка	Позиции оценивания													
		13	14	15	16	17	18	19							
1		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

■ Дата проверки  -  -  ■
■ Подпись эксперта  ■

**Внимание!** При выставлении баллов за выполнение задания в Протокол проверки развернутых ответов следует иметь в виду, что **если ответ отсутствует** (нет никаких записей, свидетельствующих о том, что экзаменуемый приступал к выполнению задания), то в протокол проставляется «X», а не «0». Если в работе записан только номер задания без попыток ее решения, то в протокол выставляется «0».

### Пример 6.

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше  $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$ , если все числа на доске кратны 3?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

(19) а) Да, может. Например, вместо зелёного числа 24 можно использовать красное число 21 (сказано, что красные числа могут равняться зелёным). Тогда сумма примет вид  $3 + 6 + \dots + 21 + 21 + 27 + \dots + 90 = 1392 < 1395$ .

Ответ: да, может.

б) Число 1067 имеет остаток 2 при делении на 3. Следовательно, красное число тоже должно иметь остаток 2 при делении на 3 (т.к. все зелёные числа имеют остаток 0). Наименьшее такое число - 14. Как известно из пункта а), сумма 30 наименьших зелёных чисел равна 1395. Если если заменить наибольшее из них (90) на 14, то сумма будет равна  $1395 - 90 + 14 = 1319 > 1067$ . Следовательно, такого быть не может.

Ответ: нет, не может.

в)  $1395 - 1067 = 328 \Rightarrow$  в сумме  $3 + 6 + \dots + 90$  необходимо так заменить несколько зелёных чисел на красные, чтобы суммарная разница между ними составила 328.

Во-первых, заметим, что за 5 замен это сделать невозможно, поскольку даже если заменить самое большое зелёное число (90, 87, 84, 81, 78) на самые маленькие красные ( $7, 14, 21, 28, 35$ ), то суммарная разница составит  $305 < 328$ .

Во-вторых, заметим, что если будем менять 72 на 49 ( $72 - 49 = 23$ ), то суммарная разница составит как раз  $328 (305 + 23 = 328) \Rightarrow$  ищем наименьшее количество красных чисел - 6.

Ответ: 6.

### Комментарий.

Обоснованно получен ответ в пунктах а и б. В пункте в неверное обоснование, поскольку не доказано, что набор с минимальным количеством красных чисел получается заменой максимальных чисел из набора 3, 6, ..., 90 на минимально возможные различные красные числа. Кроме того, разница между пятью самыми большими зелёными числами и пятью самыми маленькими красными числами составляет 315.

Оценка эксперта: 2 балла.