СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Общий вид:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y) \\ f_2(x, y) = g_2(x, y) \end{cases}$$

Решением системы двух уравнений с двумя неизвестными называется **пара** чисел (x_0, y_0), при подстановке которых вместо соответствующих переменных x, y **оба** уравнения системы обращаются в верные числовые равенства.

Примеры:

1. $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$ Решение системы: (3; 1)

2. $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$ Решения системы: (−1; 1) и (2; 4)

Решить систему уравнений — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Равносильными называются системы, множества решений которых совпадают.

В частности, равносильны все системы, не имеющие решений. Система, не имеющая решений, называется *несовместной*.

Пример несовместной системы:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x + 6y = 5 \end{cases}$$

Замечание. Наряду с системами уравнений часто рассматриваются *совокупности* уравнений. Решением совокупности является объединение решений всех уравнений совокупности.

Для обозначения совокупности уравнений используют квадратную скобку.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

МЕТОД ПОДСТАНОВКИ

Этапы решения	Примеры	
1. С помощью какого-либо из уравнений выразить одно неизвестное через другое.	$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$ из первого уравнения $y = 2x - 4$	$\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ из второго уравнения $y = 2 - x$
2. Подставить найденное выражение в другое уравнение системы: в результате получится одно уравнение с одним неизвестным.	$x + 3(2x - 4) = 9;$ $7x = 21$	$x^2 + x(2 - x) -$ $- (2 - x)^2 = 1;$ $x^2 - 6x + 5 = 0$
3. Найти корень (корни) этого уравнения, то есть найти значение (значения) одного из неизвестных системы.	$x = 3$	$x_1 = 1;$ $x_2 = 5$
4. Использовать найденное выражение одного неизвестного через другое (подстановку), то есть найти значение (соответствующие значения) второго неизвестного.	$y = 2x - 4 =$ $= 2 \cdot 3 - 4 = 2$	$y_1 = 2 - x_1 =$ $= 2 - 1 = 1;$ $y_2 = 2 - x_2 =$ $= 2 - 5 = -3$
5. Записать ответ.	(3; 2)	(1; 1), (5; −3)

МЕТОД СЛОЖЕНИЯ

Этапы решения	Примеры	
1. Сложить почленно уравнения системы, умножив предварительно каждое из уравнений на подходящее число так, чтобы в результате сложения получилось одно уравнение с одним неизвестным.	$\begin{cases}4x+5y=19 \mid \times 4\\7x-4y=-5 \mid \times 5\end{cases}$ $\begin{cases}16x+20y=76\\35x-20y=-25\end{cases}$ $51x=51$	$\begin{cases}2xy+x^2=2 \mid \times 3\\3xy-4x=5 \mid \times(-2)\end{cases}$ $\begin{cases}6xy+3x^2=6\\-6xy+8x=-10\end{cases}$ $3x^2+8x=-4$
2. Найти корень (корни) этого уравнения, то есть найти значение (значения) одного из неизвестных системы.	$x=1$	$x_1=-2$; $x_2=-2/3$
3. Подставить найденное значение (значения) одного из неизвестных в любое из уравнений системы: в результате снова получится уравнение (уравнения) с одним неизвестным.	Подстановка в первое уравнение дает: $4\cdot 1+5y=19$; $5y=15$	Подстановка во второе уравнение дает: при $x=x_1=-2$ $6y=3$; при $x=x_2=-2/3$ $2y=-7/3$
4. Найти решение (решения) этого уравнения (этих уравнений), то есть найти значение (соответствующие значения) второго неизвестного.	$y=3$	$y_1=1/2$; $y_2=-7/6$
5. Записать ответ.	(1; 3)	(−2; 1/2), (−2/3; −7/6)

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Надо построить графики обоих уравнений и найти координаты общих точек этих графиков — эти координаты являются решениями системы.

Примеры:

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^3 - y = 0 \end{cases}$

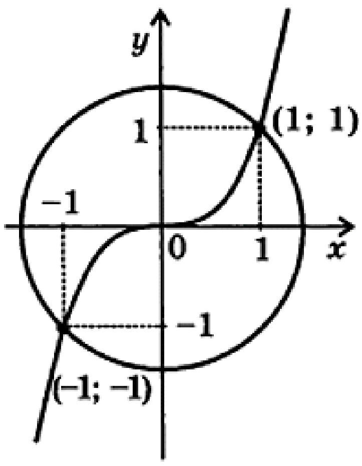


График первого уравнения — окружность радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат, график второго уравнения — кубическая парабола $y = x^3$. Эти два графика пересекаются в двух точках с координатами $(-1; -1)$ и $(1; 1)$.

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$

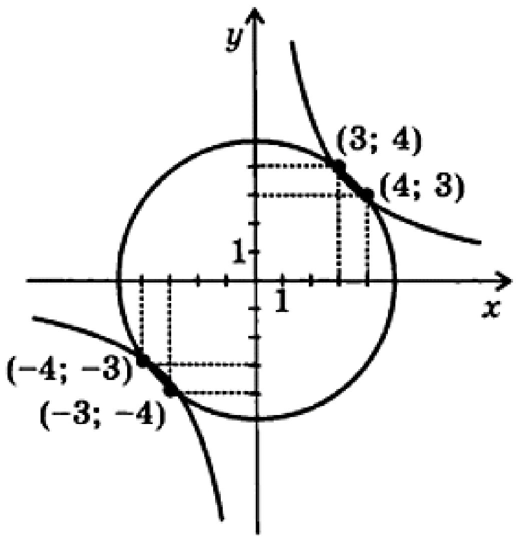
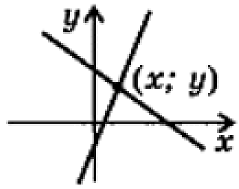
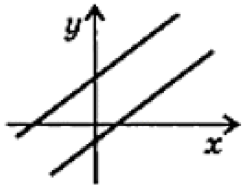
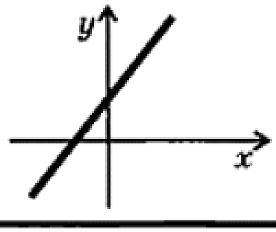


График первого уравнения — окружность радиуса 5 с центром в начале координат, график второго уравнения — гипербола $y = \dfrac{12}{x}$. Эти два графика пересекаются в четырех точках с координатами $(-4; -3)$, $(-3; -4)$, $(4; 3)$ и $(3; 4)$.

Замечание. Хотя графический метод не всегда позволяет найти точные решения системы уравнений, он помогает обнаружить решения, которые часто упускаются из виду при аналитическом решении (например, отрицательные значения неизвестных в приведенных примерах).

СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ*)

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Возможные случаи	Графическая интерпретация
1. Коэффициенты при неизвестных в уравнениях не пропорциональны, т.е. $a_1b_2 \neq a_2b_1$. Система имеет единственное решение: $x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$	Прямые — графики уравнений системы пересекаются в одной точке, координаты которой являются решением системы: 
2. Коэффициенты при неизвестных в уравнениях пропорциональны, т.е. $a_1b_2 = a_2b_1$, но они не пропорциональны свободным членам, т.е. $a_1c_2 \neq a_2c_1$ или $b_1c_2 \neq b_2c_1$. Система не имеет решений.	Прямые — графики уравнений системы параллельны: 
3. Коэффициенты при неизвестных и свободные члены в уравнениях пропорциональны, т.е. $a_1b_2 = a_2b_1,\ a_1c_2 = a_2c_1,\ b_1c_2 = b_2c_1$. Система имеет бесконечно много решений: решениями является любая пара $(x;\ y)$, удовлетворяющая одному (любому) уравнению системы.	Прямые — графики уравнений системы совпадают: 

*) Предполагается, что в каждом уравнении системы хотя бы один из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля, т.е. графиком каждого уравнения системы является прямая.