

## 8.1. Комбинаторика

### Теоретические сведения

#### Что изучает комбинаторика

Комбинаторика изучает различные виды комбинаций, способы их перечисления и подсчёта. Само слово «комбинация» происходит от латинского *combinare* — соединяю. Действительно, при получении любой комбинации мы составляем её из отдельных элементов, последовательно соединяя их друг с другом. Чаще всего эти элементы выбираются из некоторого конечного множества.

Комбинаторные задачи могут встречаться как в чистом виде, так и в задачах, которые возникают в алгебре, геометрии, теории вероятностей и других разделах математики. Чтобы научиться решать комбинаторные задачи, нужно овладеть следующими навыками:

- *перечислять* (перебирать, выписывать) заданные в задаче комбинации, используя для этого определённую систему;
- *подсчитывать* количество комбинаций, используя для этого специальные комбинаторные правила (правило умножения, правило сложения и др.).

#### Перечисление комбинаций

Любое натуральное число можно рассматривать как комбинацию из цифр.

**Пример 1.** Перечислим все двузначные числа, которые можно составить из цифр 0, 1, 2:

Решение:

Ответ: \_\_\_\_\_

**Пример 2.** Выпишем все четырёхбуквенные слова, которые можно составить, используя только буквы А и Б:

Решение:

Ответ: \_\_\_\_\_

**Пример 3.** Перечислим все трёхзначные числа, которые можно составить из цифр 0, 1, 2, используя каждую из цифр не более одного раза. Будем выписывать числа в порядке возрастания:

Решение:

Ответ: \_\_\_\_\_

**Пример 4.** Перечислим все четырёхзначные числа, которые можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, используя каждую из цифр не более одного раза. Снова выписываем в порядке возрастания: сначала выпишем все числа, начинающиеся с цифры 1, затем с цифры 2 и, наконец, с цифры 3:

Решение:

Ответ: \_\_\_\_\_

**Пример 5.** Из Калуги в Москву и из Москвы в Калугу можно добраться 3 способами: на автобусе, на электричке и на такси. Перечислим все способы, которыми можно совершить поездку из Калуги в Москву и обратно.

Решение:

Ответ: \_\_\_\_\_

**Пример 6.** Приехавшие в Москву на экскурсию школьники собираются посетить Третьяковскую галерею, сходить в Парк культуры и отдыха и перекусить в кафе. Выпишем все способы, которыми они могут это сделать.

Решение:

Ответ: \_\_\_\_\_

**Пример 7.** Из пяти иностранных языков (английский, немецкий, французский, испанский и итальянский) студентам предлагается выбрать для изучения любые два. Перечислим все способы, которыми они могут сделать свой выбор.

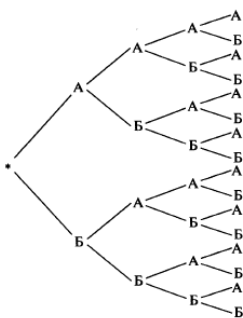
Решение:

Ответ: \_\_\_\_\_

В качестве ещё одного способа перечисления комбинаций можно использовать так называемое **дерево перебора** или **дерево вариантов**. Чтобы нарисовать такое дерево, нужно:

- отметить точку, которая будет служить его корнем;
- от этой точки провести все возможные отрезки (ветви), на концах которых отметить первые элементы комбинаций;
- от каждого из этих концов нарисовать все возможные отрезки (ветви), на концах которых отметить вторые элементы комбинаций;
- и т. д., пока вся комбинация не будет составлена.

Получится рисунок, который действительно напоминает дерево (правда, лежащее на боку или вообще «вниз головой»). Двигаясь от корня по ветвям такого дерева, можно последовательно прочитать любую из полученных комбинаций.



**Пример 8.** Составим дерево перебора для всех комбинаций из примера 2 — четырёхбуквенных слов из букв А и Б:

#### Подсчёт комбинаций

Вторая важная задача комбинаторики — *подсчёт комбинаций*. Иногда подсчёт можно свести к перечислению: выписать все комбинации и после этого их пересчитать. Но чаще всего такой способ оказывается невозможным из-за слишком большого количества комбинаций. В этом случае для подсчёта используют специальные комбинаторные правила.

#### Правило умножения (для комбинаций из двух элементов).

Если первый элемент в комбинации можно выбрать  $a$  способами, после чего второй элемент —  $b$  способами, то общее число комбинаций из двух элементов будет  $a \cdot b$ .

**Пример 9.** Сколько двузначных чисел можно составить, если использовать только цифры 0, 1, 2?

Решение:

Ответ: \_\_\_\_\_

**Пример 10.** Из Калуги в Москву и из Москвы в Калугу можно добраться 3 способами: на автобусе, на электричке и на такси. Сколькими способами можно совершить поездку из Калуги в Москву и обратно?

Решение:

Ответ: \_\_\_\_\_

**Пример 11.** В классе из 30 учеников нужно выбрать старосту и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

Ответ: \_\_\_\_\_

**Пример 12.** Из класса, в котором учится 15 девочек и 10 мальчиков, нужно выбрать девочку и мальчика для того, чтобы вести Новогодний вечер. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

Ответ: \_\_\_\_\_

**Пример 13.** В чемпионате России по футболу участвуют 16 команд. Сколькими способами могут распределиться три призовых места?

Решение:

Ответ: \_\_\_\_\_

**Пример 14.** В компьютере каждый символ (буква, цифра, специальный знак) кодируется последовательностью из восьми 0 и 1, например:

Решение:

Ответ: \_\_\_\_\_

Если правило умножения использовать для подсчёта комбинаций, в которых порядок следования элементов не важен, то полученный результат будет ошибочным: ведь в таких комбинациях не нужно учитывать, какой элемент был выбран первым, какой — вторым и т. д. Для правильного ответа в таких случаях нужно использовать **правило деления**: если при подсчёте комбинаций по правилу умножения каждая из них была посчитана  $k$  раз, то полученный результат нужно поделить на  $k$ .

Типичный пример такой ситуации — **подсчёт неупорядоченных пар**.

**Пример 15.** Из класса, в котором учится 25 человек, нужно выбрать двоих для участия в олимпиаде по краеведению. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

Ответ: \_\_\_\_\_

**Пример 16.** Из 11 футболистов, участвовавших в матче, нужно выбрать троих для проведения антидопинговой пробы. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

Ответ: \_\_\_\_\_

**Пример 17.** Подсчитаем количество двузначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 так, чтобы первая цифра была меньше второй.

Решение:

Ответ: \_\_\_\_\_

**Пример 18.** Сколькими способами можно посадить 6 школьников на скамейку так, чтобы Коля и Оля оказались рядом?

Решение:

Ответ: \_\_\_\_\_

Существует и четвёртое комбинаторное правило — **правило вычитания**. Так же, как и правило сложения, это скорее практический совет для решения некоторых комбинаторных задач: при подсчёте комбинаций, обладающих заданным свойством, иногда проще найти количество комбинаций, которые этим свойством не обладают, и вычесть его из общего количества комбинаций.

**Пример 19.** Найдём количество трёхзначных чисел, в записи которых есть хотя бы один 0.  
Решение:

Ответ: \_\_\_\_\_

### Тренировочные задания

#### ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Если выписать в порядке возрастания все трёхзначные числа, в записи которых используются только 0, 2, 4, 6, то какое число будет следующим за 426?
2. Если выписать по возрастанию все двоичные коды длины 8, то какой код будет следовать за кодом 10101011?
3. Если выписать по возрастанию все двоичные коды длины 8, то какой код будет предшествовать коду 10001000?
4. Из класса, в котором учатся 13 девочек и 10 мальчиков, нужно выбрать девочку и мальчика для ведения школьного вечера. Сколькими способами это можно сделать?
5. В чемпионате города по футболу играет 10 команд. Сколькими способами могут распределиться 3 призовых места?
6. В меню школьной столовой 2 разных супа, 4 вторых блюда и 3 вида сока. Сколько можно составить вариантов обеда из трёх блюд?
7. На деловую встречу пришло 5 человек. Каждый с каждым обменялся рукопожатием. Сколько всего рукопожатий было совершено?
8. В конференции участвовало 30 человек. Каждый с каждым обменялся визитной карточкой. Сколько всего понадобилось карточек?
9. В расписании уроков на вторник для 7-го класса должно быть 5 уроков: алгебра, русский язык, литература, география, физкультура. Сколькими способами можно составить расписание на этот день?
10. Сколько трёхзначных чисел можно записать, используя только цифры 0, 2, 4, 6?
11. Монету подбрасывают 10 раз подряд и каждый раз записывают, что выпало — орёл или решка. Сколько разных последовательностей из орлов и решек может при этом получиться?

#### ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ

12. В автомобиле 5 мест. Сколькими способами 5 человек могут занять в ней места для путешествия, если водить машину могут только 3 из них?
13. В расписании уроков на среду для 4-го класса должно быть 4 урока: 2 урока математики, чтение и физкультура. Сколькими способами можно составить расписание на этот день?
14. В расписании уроков на среду для 4-го класса должно быть 4 урока: 2 урока математики, которые должны стоять рядом, чтение и физкультура. Сколькими способами можно составить расписание на этот день?
15. В расписании уроков на среду для 7-го класса должно быть 5 уроков: алгебра, русский язык, литература, география и физкультура. Сколькими способами можно составить расписание на этот день, если русский язык и литература должны стоять рядом, а физкультура — быть последним уроком?
16. После хоккейного матча каждый игрок одной команды пожал руку каждому игроку другой. Сколько всего игроков присутствовало на площадке, если было совершено 323 рукопожатия?
17. Из нечётных цифр составляют все возможные числа, содержащие не более 4 цифр. Сколько существует таких чисел?
18. Сколько сигналов можно поднять на мачте, если имеется 4 разных флага и каждый сигнал должен состоять, по крайней мере, из 2 флагов? (Сигналы, составленные из флагов, взятых в разном порядке, считаются различными.)
19. Номера паспортов состоят из 6 цифр. Сколько таких номеров являются палиндромами, т. е. читаются в обе стороны одинаково (например: 089980)?
20. Номера паспортов состоят из 6 цифр. Сколько из них содержат хотя бы 2 одинаковые цифры?
21. Номера паспортов состоят из 6 цифр. Сколько из них содержат, по крайней мере, 2 нуля?
22. Из 12 фильмов, номинированных за лучшую режиссёрскую работу, жюри кинофестиваля должно отобрать 3 финалиста. Сколькими способами это можно сделать?