Действия с дробями

Действия с дробями. В этой статье разберём примеры, всё подробно с пояснениями. Рассматривать будем обыкновенные дроби. В дальнейшем разберём и десятичные. Рекомендую посмотреть весь список материалов и изучать последовательно.

1. Сумма дробей, разность дробей.

Правило: при сложении дробей с равными знаменателями, в результате получаем дробь – знаменатель которой остаётся тот же, а числитель её будет равен сумме числителей дробей.

Правило: при вычислении разности дробей с одинаковыми знаменателями получаем дробь – знаменатель остаётся тот же, а из числителя первой дроби вычитается числитель второй.

Формальная запись суммы и разности дробей с равными знаменателями:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \qquad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Примеры (1):

$$\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2+1}{9}=\frac{3}{9} \qquad \frac{12}{33}+\frac{5}{33}=\frac{12+5}{33}=\frac{17}{33}$$

$$\frac{12}{27}-\frac{5}{27}=\frac{12-5}{27}=\frac{7}{27} \qquad \frac{112}{93}-\frac{100}{93}=\frac{112-100}{93}=\frac{12}{93}$$

Понятно, что когда даны обыкновенные дроби, то всё просто, а если смешанные? Ничего сложного…

Вариант 1 – можно перевести их в обыкновенные и далее вычислять.

Вариант 2 – можно отдельно «работать» с целой и дробной частью.

Примеры (2):

$$6\frac{2}{13}+4\frac{1}{13}=\frac{6\cdot 13+2}{13}+\frac{4\cdot 13+1}{13}=\frac{80}{13}+\frac{53}{13}=\frac{133}{13}=10\frac{3}{13}$$

$$6\frac{2}{13}+4\frac{1}{13}=6+\frac{2}{13}+4+\frac{1}{13}=10\frac{3}{13}$$

$$13\frac{7}{9}-4\frac{1}{9}=\frac{13\cdot 9+7}{9}-\frac{4\cdot 9+1}{9}=\frac{124}{9}-\frac{37}{9}=\frac{87}{9}=9\frac{6}{9}$$

$$13\frac{7}{9}-4\frac{1}{9}=13+\frac{7}{9}-\left(4+\frac{1}{9}\right)=13+\frac{7}{9}-4-\frac{1}{9}=13-4+\left(\frac{7}{9}-\frac{1}{9}\right)=9\frac{6}{9}$$

Ещё:

$$2\frac{11}{15}+6\frac{9}{15}=2+\frac{11}{15}+6+\frac{9}{15}=8+\frac{20}{15}=8+1\frac{5}{15}=9\frac{5}{15}=9\frac{1}{3}$$

А если будет дана разность двух смешанных дробей и числитель первой дроби будет меньше числителя второй? Тоже можно действовать двумя способами.

Примеры (3):

$$4\frac{2}{11}-1\frac{7}{11}=\frac{4\cdot 11+2}{11}-\frac{1\cdot 11+7}{11}=\frac{46}{11}-\frac{18}{11}=\frac{28}{11}=2\frac{6}{11}$$

*Перевели в обыкновенные дроби, вычислили разность, перевели полученную неправильную дробь в смешанную.

$$4\frac{2}{11}-1\frac{7}{11}=4+\frac{2}{11}-1-\frac{7}{11}=3+\frac{2}{11}-\frac{7}{11}=2+\frac{11}{11}+\frac{2}{11}-\frac{7}{11}=$$
$$=2+\frac{2}{11}+\frac{11}{11}-\frac{7}{11}=2+\frac{2}{11}+\frac{11-7}{11}=2+\frac{2}{11}+\frac{4}{11}=2\frac{6}{11}$$

*Разбили на целые и дробные части, получили тройку, далее представили 3 как сумму 2 и 1, при чём единицу представили как 11/11, далее нашли разность 11/11 и 7/11 и вычислили результат. Смысл изложенных преобразований заключается в том, чтобы взять (выделить) единицу и представить её в виде дроби с нужным нам знаменателем, далее от этой дроби мы уже можем вычесть другую.

Ещё пример:

$$8\frac{7}{15}-\frac{44}{15}=8+\frac{7}{15}-2\frac{14}{15}=8+\frac{7}{15}-2-\frac{14}{15}=6+\frac{7}{15}-\frac{14}{15}=$$
$$=5+1+\frac{7}{15}-\frac{14}{15}=5+\frac{15}{15}+\frac{7}{15}-\frac{14}{15}=5+\frac{7}{15}+\left(\frac{15}{15}-\frac{14}{15}\right)=$$
$$=5+\frac{7}{15}+\frac{1}{15}=5+\frac{7+1}{15}=5+\frac{8}{15}=5\frac{8}{15}$$

Вывод: имеется универсальный подход – для того, чтобы вычислить сумму (разность) смешанных дробей с равными знаменателями их всегда можно перевести в неправильные, далее выполнить необходимое действие. После этого если в результате получаем неправильную дробь переводим её в смешанную.

Выше мы рассмотрели примеры с дробями, у которых равные знаменатели. А если знаменатели будут отличаться? В этом случае дроби приводятся к одному знаменателю и выполняется указанное действие. Для изменения (преобразования) дроби используется основное свойство дроби.

Рассмотрим простые примеры:

$$\frac{5}{12}+\frac{1}{3}=\frac{5}{12}+\frac{1\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{5}{12}+\frac{4}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4} \qquad (9)$$

$$\frac{6}{15}+\frac{7}{3}=\frac{6}{15}+\frac{7\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{6}{15}+\frac{35}{15}=\frac{41}{15}=2\frac{11}{15} \qquad (10)$$

В данных примерах мы сразу видим каким образом можно преобразовать одну из дробей, чтобы получить равные знаменатели.

Если обозначить способы приведения дробей к одному знаменателю, то этот назовём **СПОСОБ ПЕРВЫЙ**.

То есть, сразу при «оценке» дроби нужно прикинуть сработает ли такой подход – проверяем делится ли больший знаменатель на меньший. И если делится, то выполняем преобразование — домножаем числитель и знаменатель так чтобы у обеих дробей знаменатели стали равными.

Теперь посмотрите на эти примеры:

$$\frac{11}{15}+\frac{12}{35} \qquad \frac{23}{60}-\frac{1}{40} \qquad \frac{25}{4}-\frac{9}{14} \qquad \frac{8}{51}+\frac{27}{119}$$

К ним указанный подход не применим. Существуют ещё способы приведения дробей к общему знаменателю, рассмотрим их.

Способ ВТОРОЙ.

Умножаем числитель и знаменатель первой дроби на знаменатель второй, а числитель и знаменатель второй дроби на знаменатель первой:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{a\cdot d}{c\cdot d}+\frac{b\cdot c}{d\cdot c}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{c\cdot d}$$

*Фактически мы приводим дроби к виду, когда знаменатели становятся равными. Далее используем правило сложения робей с равными знаменателями.

Пример: $\frac{7}{8}+\frac{11}{9}=\frac{7\cdot 9}{8\cdot 9}+\frac{11\cdot 8}{9\cdot 8}=\frac{63}{72}+\frac{88}{72}=\frac{151}{72}=2\frac{7}{72}$

*Данный способ можно назвать универсальным, и он работает всегда. Единственный минус в том, что после вычислений может получится дробь которую необходимо будет ещё сократить.

Рассмотрим пример: $\frac{11}{15}+\frac{12}{35}=\frac{11\cdot 35}{15\cdot 35}+\frac{12\cdot 15}{35\cdot 15}=\frac{385}{525}+\frac{180}{525}=\frac{565}{525}$

Видно что числитель и знаменатель делится на 5:

$$\frac{565}{525}=\frac{565:5}{525:5}=\frac{113}{105}=1\frac{8}{105}$$

Способ ТРЕТИЙ.

Необходимо найти наименьшее общее кратное (НОК) знаменателей. Это и будет общий знаменатель. Что это за число такое? Это наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из чисел.

Посмотрите, вот два числа: 3 и 4, есть множество чисел, которые делятся на них – это 12, 24, 36, … Наименьшее из них 12. Или 6 и 15, на них делятся 30, 60, 90 …. Наименьшее 30. Вопрос – а как определить это самое наименьшее общее кратное?

Имеется чёткий алгоритм, но часто это можно сделать и сразу без вычислений. Например, по указанным выше примерам (3 и 4, 6 и 15) никакого алгоритма не надо, мы взяли большие числа (4 и 15) увеличили их в два раза и увидели, что они делятся на второе число, но пары чисел могут быть и другими, например 51 и 119.

Алгоритм. Для того, чтобы определить наименьшее общее кратное нескольких чисел, необходимо:

— разложить каждое из чисел на ПРОСТЫЕ множители

— выписать разложение БОЛЬШЕГО из них

— умножить его на НЕДОСТАЮЩИЕ множители других чисел

Рассмотрим примеры:

50 и 60 => $50 = 2\cdot5\cdot5$ $\quad 60 = 2\cdot2\cdot3\cdot5$

в разложении большего числа не хватает одной пятёрки

$$\Rightarrow \quad НОК(50,60) = 2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot5 = 300$$

48 и 72 => $48 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3$ $\quad 72 = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3$

в разложении большего числа не хватает двойки и тройки

$$\Rightarrow \quad НОК(48,72) = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3 = 144$$

* Наименьшее общее кратное двух простых чисел равно их произведению

Вопрос! А чем полезно нахождение наименьшего общего кратного, ведь можно пользоваться вторым способом и полученную дробь просто сократить? Да, можно, но это не всегда удобно. Посмотрите, какой получится знаменатель для чисел 48 и 72, если их просто перемножить $48\cdot72 = 3456$. Согласитесь, что приятнее работать с меньшими числами.

Рассмотрим примеры:

$$\frac{8}{51}+\frac{27}{119}=\frac{8}{3\cdot17}+\frac{27}{7\cdot17}=\frac{8\cdot7}{3\cdot7\cdot17}+\frac{27\cdot3}{3\cdot7\cdot17}=\frac{56+81}{357}=\frac{137}{357}$$

*51 = 3·17   119 = 7·17

в разложении большего числа не хватает тройки

=> НОК(51,119) = 3·7·17

А теперь применим первый способ:

$$\frac{8}{51}+\frac{27}{119}=\frac{8\cdot119}{51\cdot119}+\frac{27\cdot51}{119\cdot51}=\frac{952}{6059}+\frac{1377}{6059}=\frac{2329}{6059}$$

*Посмотрите какая разница в вычислениях, в первом случае их минимум, а во втором нужно потрудиться отдельно на листочке, да ещё и дробь, которую получили сократить необходимо. Нахождение НОК упрощает работу значительно.

Ещё примеры:

$$\frac{11}{15}+\frac{12}{35}=\frac{11}{3\cdot5}+\frac{12}{5\cdot7}=\frac{11\cdot7+12\cdot3}{3\cdot5\cdot7}=\frac{77+36}{3\cdot5\cdot7}=\frac{113}{105}=1\frac{8}{105}$$

$$\frac{23}{60}-\frac{1}{40}=\frac{23}{2\cdot2\cdot3\cdot5}+\frac{1}{2\cdot2\cdot2\cdot5}=\frac{23\cdot2+1\cdot3}{2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5}=\frac{46+3}{120}=\frac{49}{120}$$

*Во втором примере и так видно, что наименьшее число, которое делится на 40 и 60 равно 120.

$$\frac{25}{6}-\frac{9}{14}=\frac{25}{2\cdot3}-\frac{9}{2\cdot7}=\frac{25\cdot7-9\cdot3}{2\cdot3\cdot7}=\frac{175-27}{42}=\frac{148}{42}=3\frac{22}{42}=3\frac{11}{21}$$

ИТОГ! ОБЩИЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЙ!

— приводим дроби к обыкновенным, если есть целая часть.

— приводим дроби к общему знаменателю (сначала смотрим делится ли один знаменатель на другой, если делится, то умножаем числитель и знаменатель этой другой дроби; если не делится действуем посредством других указанных выше способов).

— получив дроби с равными знаменателями, выполняем действия (сложение, вычитание).

— если необходимо, то результат сокращаем.

— если необходимо, то выделяем целую часть.

2. Произведение дробей.

Правило простое. При умножении дробей умножаются их числители и знаменатели:

$$\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}=\frac{a\cdot b}{c\cdot d}$$

Примеры:

$$\frac{25}{7}\cdot\frac{2}{9}=\frac{25\cdot 2}{7\cdot 9}=\frac{50}{63} \qquad \frac{2}{11}\cdot\frac{4}{7}=\frac{2\cdot 4}{11\cdot 7}=\frac{8}{77}$$

Если есть возможность сократить дробь на стадии вычисления, то лучше это сделать:

$$\frac{2}{21}\cdot\frac{7}{8}=\frac{2\cdot 7}{7\cdot 3\cdot 2\cdot 4}=\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{12}$$

Ещё правило относящееся к умножению!

Для того, чтобы найти часть от числа, необходимо эту часть умножить на само число.

Примеры, которые мы уже рассмотрели:

Определить, сколько составляет 3/7 от числа 63?

$$\frac{3}{7}\cdot 63=\frac{3\cdot 63}{7}=\frac{3\cdot 7\cdot 9}{7}=27$$

Задача. Весь путь составляет 180 километров. Турист в первый день прошёл 3/10 пути. Сколько километров турист прошёл в первый день?

$$\frac{3}{10}\cdot 180=\frac{3\cdot 180}{10}=\frac{3\cdot 18\cdot 10}{10}=54\text{ км}$$

Задача. На базу привезли 13 тонн овощей. Картофель составляет ¾ от всех завезённых овощей. Сколько килограмм картофеля завезли на базу?

$$\frac{3}{4}\cdot 13000=\frac{3\cdot 13000}{4}=\frac{39000}{4}=9750\text{ кг}$$

С произведением закончим.

*Ранее обещал вам привести формальное объяснение основного свойства дроби через произведение, пожалуйста:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m}=\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{m}=\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m}=\frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}}=\frac{a\cdot\frac{1}{m}}{b\cdot\frac{1}{m}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{m}}=\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}$$

3. Деление дробей.

Деление дробей сводится к их умножению. Здесь важно запомнить, что дробь являющаяся делителем (та, на которую делят) переворачивается и действие меняется на умножение:

$$\boxed{\frac{a}{c}:\frac{b}{d}=\frac{a}{c}\cdot\frac{d}{b}=\frac{a\cdot d}{c\cdot b}}$$

Данное действие может быть записано в виде так называемой четырёхэтажной дроби, ведь само деление «:» тоже можно записать как дробь: $\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}}=\frac{a}{c}:\frac{b}{d}=\frac{a}{c}\cdot\frac{d}{b}=\frac{a\cdot d}{c\cdot b}$

Примеры: $\frac{2}{19}:\frac{9}{7}=\frac{2}{19}\cdot\frac{7}{9}=\frac{14}{171}$ $\quad\frac{2}{11}:\frac{15}{11}=\frac{2}{11}\cdot\frac{11}{15}=\frac{2\cdot 11}{11\cdot 15}=\frac{2}{15}$

На этом пока всё! Успеха вам!