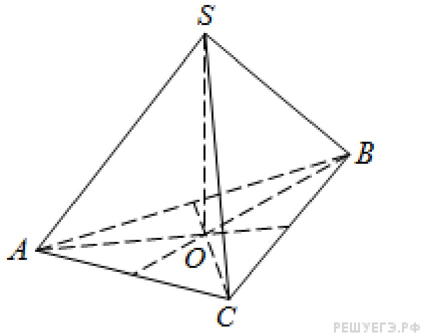
Пирамида

1.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O. Площадь треугольника ABC равна 2; объем пирамиды равен 6. Найдите длину отрезка OS.



Пояснение.

Отрезок OS высота треугольной пирамиды $SABC$, ее объем выражается формулой

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO.$$

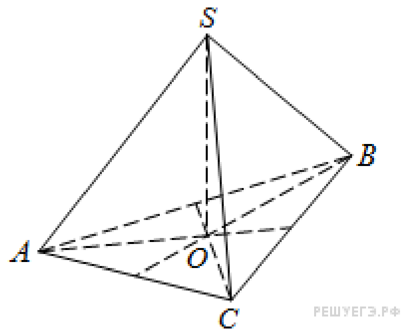
Таким образом,

$$SO = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9.$$

Ответ: 9.

2.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке O. Площадь треугольника ABC равна 9; объем пирамиды равен 6. Найдите длину отрезка OS.



Пояснение.

отрезок OS высотой треугольной пирамиды $SABC$, ее объем выражается формулой

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO.$$

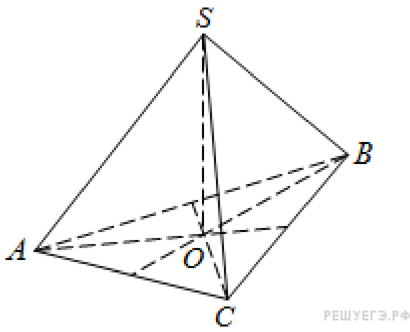
Таким образом,

$$SO = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot 6}{9} = 2.$$

Ответ: 2.

3.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке O. Площадь треугольника ABC равна 2; объем пирамиды равен 5. Найдите длину отрезка OS.



Пояснение.
отрезок OS высотой треугольной пирамиды $SABC$, ее объем выражается формулой

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO.$$

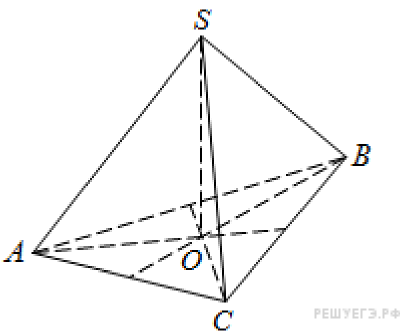
Таким образом,

$$SO = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot 5}{2} = 7{,}5.$$

Ответ: 7,5.

4.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке O. Площадь треугольника ABC равна 2; объем пирамиды равен 4. Найдите длину отрезка OS.



Пояснение.
отрезок OS высотой треугольной пирамиды $SABC$, ее объем выражается формулой

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO.$$

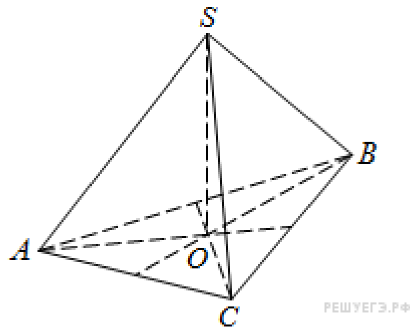
Таким образом,

$$SO = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6.$$

Ответ: 6.

5.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке O. Площадь треугольника ABC равна 4; объем пирамиды равен 6. Найдите длину отрезка OS.



Пояснение.
отрезок OS высотой треугольной пирамиды $SABC$, ее объем выражается формулой

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO.$$

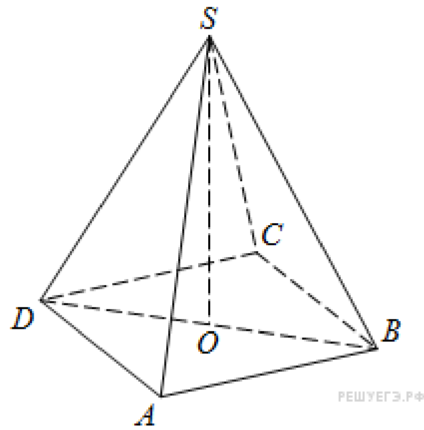
Таким образом,

$$SO = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot 6}{4} = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

6.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, $SO = 15$, $BD = 16$. Найдите боковое ребро SA.



Пояснение.

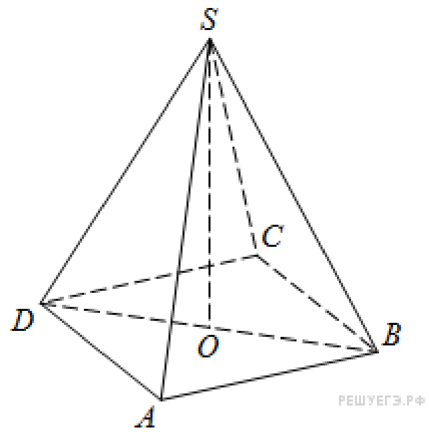
В правильной пирамиде вершина проецируется в центр основания, следовательно SO является высотой пирамиды. тогда по теореме Пифагора

$$SA = SB = \sqrt{SO^2 + BO^2} = \sqrt{SO^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = \sqrt{225 + 64} = 17.$$

Ответ: 17.

7.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, $SB = 13$, $AC = 24$. Найдите длину отрезка SO.



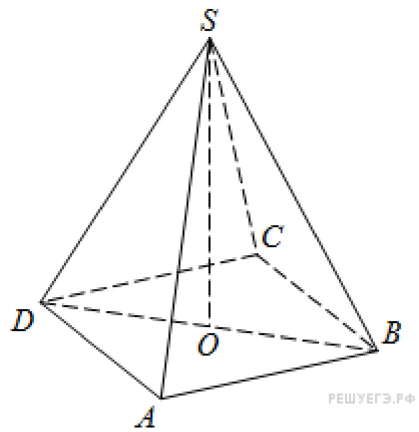
Пояснение.
в правильной пирамиде вершина проецируется в центр основания, следовательно SO является высотой пирамиды. тогда по теореме Пифагора

$$SO=\sqrt{SB^2-BO^2}=\sqrt{SB^2-\left(\frac{AC}{2}\right)^2}=\sqrt{169-144}=5.$$

Ответ: 5.

8.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, $SO=8$, $BD=30$. Найдите боковое ребро SC.



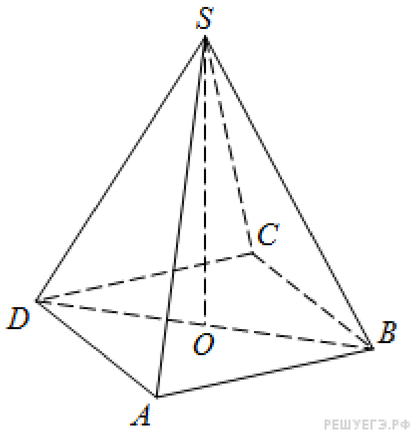
Пояснение.
в правильной пирамиде вершина проецируется в центр основания, следовательно SO является высотой пирамиды. тогда по теореме Пифагора

$$SC=SB=\sqrt{SO^2+BO^2}=\sqrt{SO^2+\left(\frac{BD}{2}\right)^2}=\sqrt{64+225}=17.$$

Ответ: 17.

9.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SD=10$, $SO=6$. Найдите длину отрезка AC.



Пояснение.

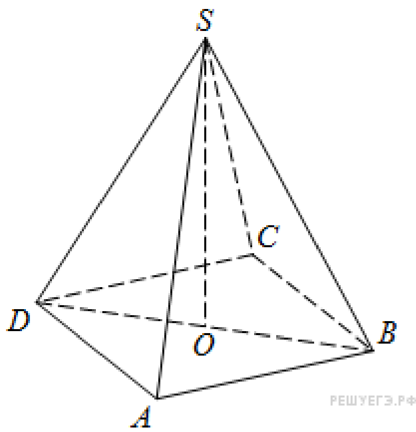
В правильной пирамиде вершина проецируется в центр основания, следовательно, SO является высотой пирамиды. Тогда по теореме Пифагора

$$AC = 2AO = 2OD = 2\sqrt{SD^2 - SO^2} = 2\sqrt{100 - 36} = 16.$$

Ответ: 16.

10.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, SO=12, BD=18. Найдите боковое ребро SA.



Пояснение.

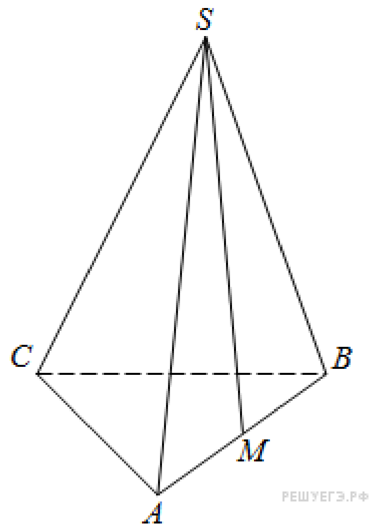
в правильной пирамиде вершина проецируется в центр основания, следовательно SO является высотой пирамиды. тогда по теореме Пифагора

$$SA = SB = \sqrt{SO^2 + BO^2} = \sqrt{SO^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = \sqrt{144 + 81} = 15.$$

Ответ: 15.

11.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка M – середина ребра AB, S – вершина. Известно, что BC = 3, а площадь боковой поверхности пирамиды равна 45. Найдите длину отрезка SM.



Пояснение.

Найдем площадь грани SAB:

$$S_{SAB} = \frac{S_{\text{бок}}}{3} = \frac{45}{3} = 15.$$

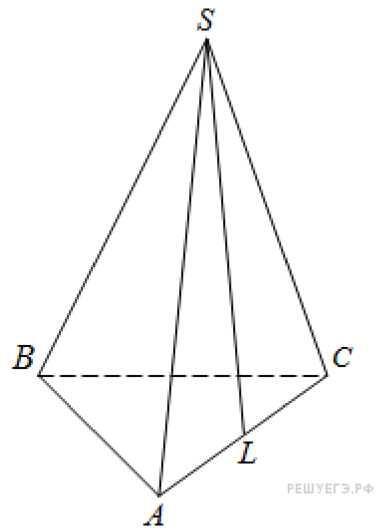
Отрезок SM является медианой равнобедренного треугольника SAB, а значит, его высотой. Тогда

$$SM = \frac{2S_{SAB}}{AB} = \frac{2S_{SAB}}{BC} = \frac{2 \cdot 15}{3} = 10.$$

Ответ: 10.

12.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка L — середина ребра AC, S — вершина. Известно, что $BC = 6$, а $SL = 5$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



Пояснение.

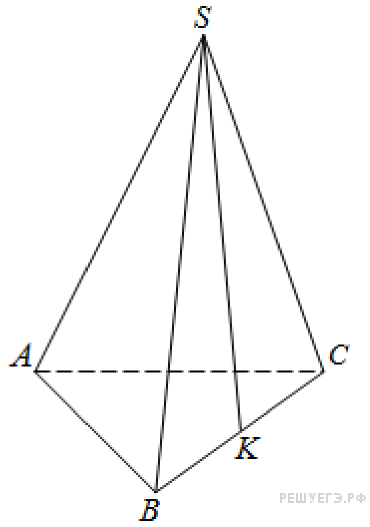
Отрезок SL является медианой правильного треугольника SAC, а значит, и его высотой. Боковые грани пирамиды равны, поэтому

$$S_{\text{бок}} = 3S_{SAC} = 3 \cdot \frac{1}{2}AC \cdot SL = \frac{3}{2}BC \cdot SL = \frac{3}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 45.$$

Ответ: 45.

13.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка K – середина ребра BC, S – вершина. Известно, что $SK = 4$, а площадь боковой поверхности пирамиды равна 54. Найдите длину ребра AC.



Пояснение.

Найдем площадь грани SBC:

$$S_{SBC} = \frac{S_{\text{бок}}}{3} = \frac{54}{3} = 18.$$

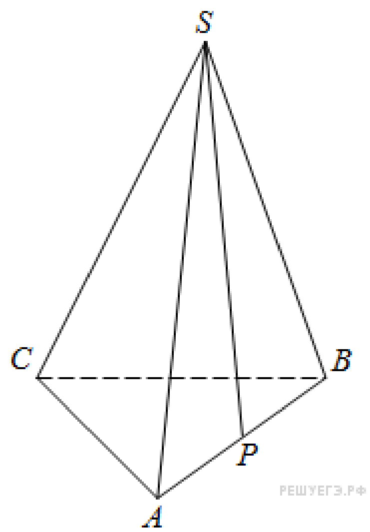
Отрезок SK является медианой равнобедренного треугольника SBC, а значит, и его высотой. Тогда

$$AC = BC = \frac{2S_{SAB}}{SK} = \frac{2 \cdot 18}{4} = 9.$$

Ответ: 9.

14.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ P – середина ребра AB, S – вершина. Известно, что BC=5, а SP=6. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



Пояснение.

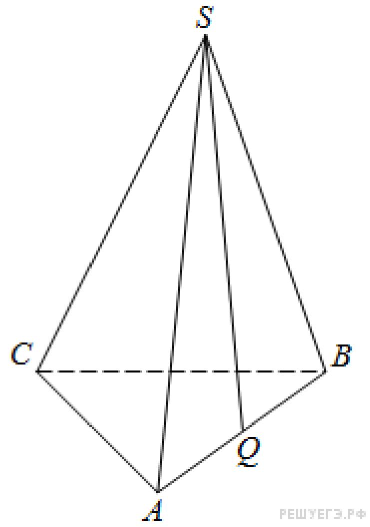
Отрезок SP является медианой равнобедренного треугольника SAB, а значит, и его высотой. Тогда

$$S_{\text{бок}} = 3S_{SAB} = \frac{3}{2} AB \cdot SP = \frac{3}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 45.$$

Ответ: 45.

15.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ Q – середина ребра AB, S – вершина. Известно, что BC=7, а площадь боковой поверхности пирамиды равна 42. Найдите длину отрезка SQ.



Пояснение.

Найдем площадь грани SAB:

$$S_{SAB} = \frac{S_{\text{бок}}}{3} = \frac{42}{3} = 14.$$

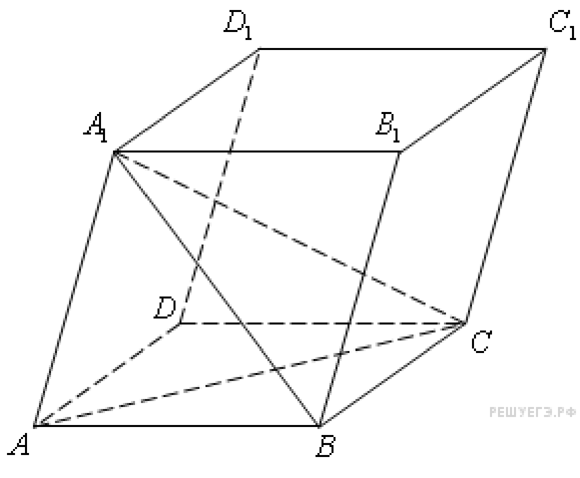
Отрезок SQ является медианой правильного треугольника SAB, а значит, и его высотой. Тогда

$$SQ = \frac{2S_{SAB}}{AB} = \frac{2S_{SAB}}{BC} = \frac{2 \cdot 14}{7} = 4.$$

Ответ: 4.

16.

Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 9. Найдите объем треугольной пирамиды $ABCA_1$.



Пояснение.

Объем параллелепипеда равен $V = Sh$, где S – площадь основания, h – высота. Объем пирамиды равен

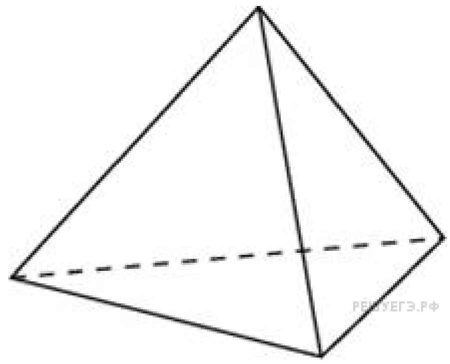
$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta} h,$$

где S_{Δ} – площадь основания пирамиды, по построению равная половине площади основания параллелепипеда. Тогда объем пирамиды в 6 раз меньше объема параллелепипеда.

Ответ: 1,5.

17.

Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?



Пояснение.

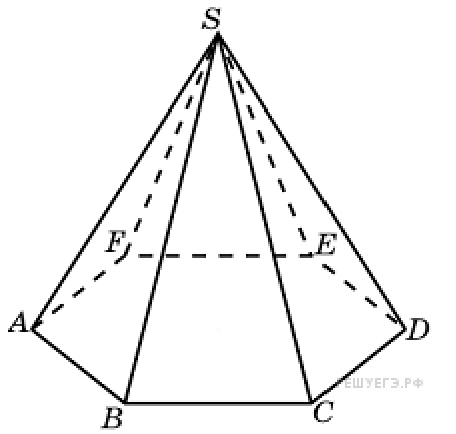
Объёмы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия. Поэтому если все ребра увеличить в 2 раза, объём увеличится в 8 раз.

Это же следует из формулы для объёма правильного тетраэдра $V=\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$, где a — длина его ребра.

Ответ: 8.

18.

Во сколько раз увеличится объем пирамиды, если ее высоту увеличить в четыре раза?



Пояснение.

Объем пирамиды равен

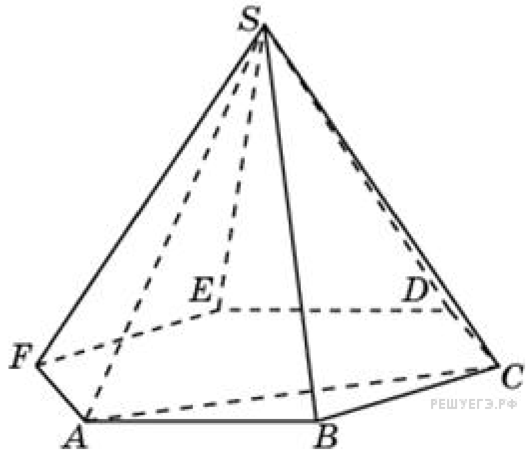
$$V=\frac{1}{3}Sh,$$

где S – площадь основания, а h – высота пирамиды. При увеличении высоты в 4 раза объем пирамиды также увеличится в 4 раза.

Ответ: 4.

19.

Объем треугольной пирамиды $SABC$, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, равен 1. Найдите объем шестиугольной пирамиды.



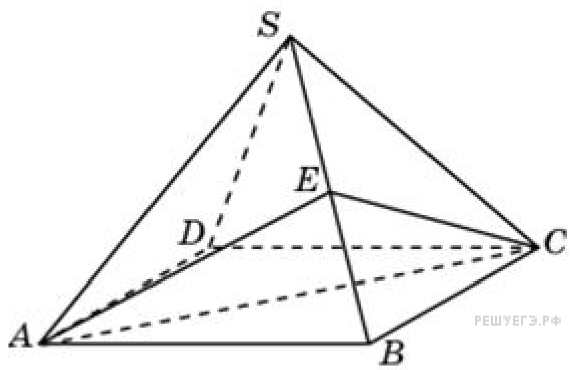
Пояснение.

Данные пирамиды имеют общую высоту, поэтому их объемы соотносятся как площади их оснований. Площадь правильного шестиугольника со стороной a равна $S=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2$. Площадь же равнобедренного треугольника ACB с боковой стороной a и углах при основании 30° равна $S_\Delta=a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Получаем, что площадь шестиугольника больше площади треугольника ACB в $\dfrac{S}{S_\Delta}=6$ раз и равна 6.

Ответ: 6.

20.

Объем правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен 12. Точка E – середина ребра SB. Найдите объем треугольной пирамиды $EABC$.



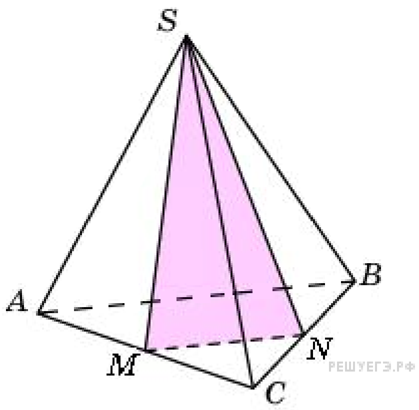
Пояснение.

Площадь основания пирамиды $EABC$ по условию в 2 раза меньше площади основания пирамиды $SABCD$. Также высота данной треугольной пирамиды в 2 раза меньше высоты пирамиды $SABCD$ (т.к. точка E – середина ребра SB). Поскольку объем пирамиды равен $V=\dfrac{1}{3}Sh$, то объем данной треугольной пирамиды в 4 раза меньше объема пирамиды $SABCD$ и равен 3.

Ответ: 3.

21.

От треугольной пирамиды, объем которой равен 12, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.



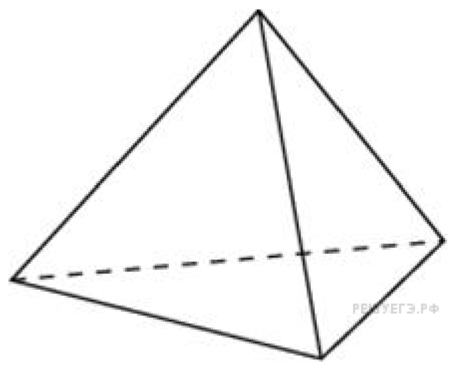
Пояснение.

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3}Sh$. Площадь основания отсеченной части меньше в 4 раза (так как высота и сторона треугольника в основании меньше исходных в 2 раза), поэтому и объем оставшейся части меньше в 4 раза. Тем самым, он равен 3.

Ответ: 3.

22.

Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?



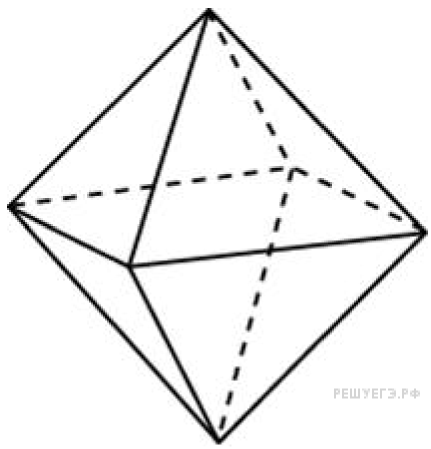
Пояснение.

Площадь поверхности тетраэдра равна сумме площадей его граней, которые равны $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Поэтому при увеличении ребер вдвое, площадь поверхности увеличится в 4 раза.

Ответ: 4.

23.

Во сколько раз увеличится площадь поверхности октаэдра, если все его ребра увеличить в 3 раза?



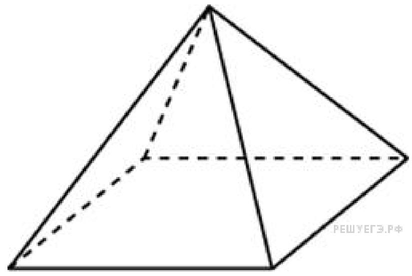
Пояснение.

При увеличении ребер в 3 раза площади треугольников, образующих грани октаэдра, увеличатся в 9 раз, поэтому суммарная площадь поверхности также увеличится в 9 раз.

Ответ: 9.

24.

Во сколько раз увеличится площадь поверхности пирамиды, если все ее ребра увеличить в 2 раза?



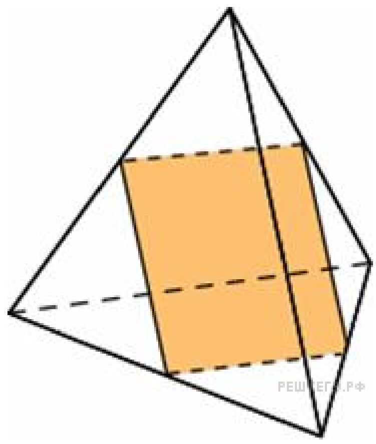
Пояснение.

Площади подобных тел относятся как квадрат коэффициента подобия. Поэтому, если все ребра увеличены в 2 раза, площадь поверхности увеличится в 4 раза.

Ответ: 4.

25.

Ребра тетраэдра равны 1. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырех его ребер.



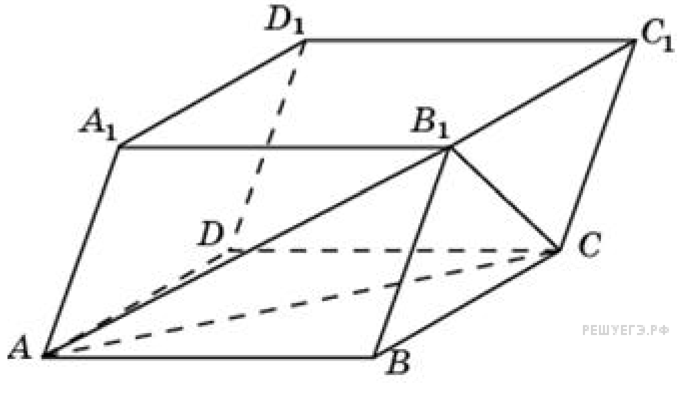
Пояснение.

В правильном тетраэдре скрещивающиеся ребра перпендикулярны. Каждая сторона сечения является средней линией соответствующей грани, которая, как известно, в 2 раза меньше параллельной ей стороны и равна поэтому 0,5. Значит сечением является квадрат со стороной 0,5. Тогда площадь сечения $S = a^2 = 0,25$.

Ответ: 0,25.

26.

Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 12. Найдите объем треугольной пирамиды B_1ABC.



Пояснение.

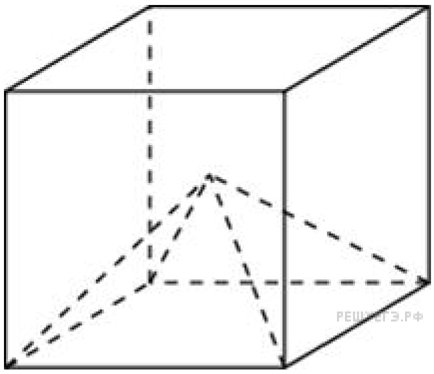
Объем параллелепипеда равен $V_{\text{пар}} = S_{\text{пар}} H_{\text{пар}}$, а объем пирамиды равен $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{пир}} H_{\text{пир}}$. Высота пирамиды равна высоте параллелепипеда, а ее основание вдвое меньше, поэтому

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{пир}} H_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \frac{S_{\text{пар}}}{2} H_{\text{пар}} = \frac{1}{6} S_{\text{пар}} H_{\text{пар}} = \frac{1}{6} \cdot 12 = 2.$$

Ответ: 2.

27.

Объем куба равен 12. Найдите объем четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной — центр куба.



Пояснение.

Объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} a^2 \frac{a}{2} = \frac{1}{6} a^3 = \frac{1}{6} V_{\text{куба}} = 2.$$

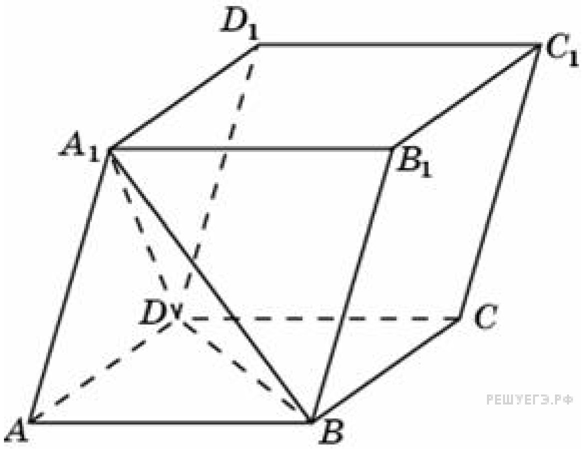
Ответ: 2.

Примечание.

Куб состоит из 6 таких пирамид, объем каждой из них равен 2.

28.

Найдите объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если объем треугольной пирамиды $ABDA_1$ равен 3.



Пояснение.

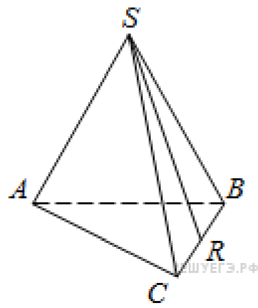
Объем параллелепипеда равен $V = Sh$, где S – площадь основания, h – высота. Объем пирамиды равен $V = \frac{1}{3} S_{\Delta} h$, где S_{Δ} – площадь основания пирамиды, равная половине площади основания параллелепипеда. Тогда объем параллелепипеда в 6 раз больше объема пирамиды $ABDA_1$.

Ответ: 18.

29.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ R — середина ребра BC, S — вершина. Известно, что $AB = 1$, а $SR = 2$. Найдите площадь боковой поверхности.

Пояснение.
Площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему:



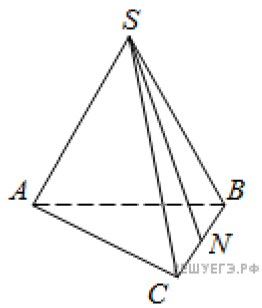
$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}P_{ABC} \cdot SR = \frac{1}{2} \cdot 3AB \cdot SR = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3.$$

Ответ:3.

30.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ N — середина ребра BC, S — вершина. Известно, что $AB = 1$, а площадь боковой поверхности равна 3. Найдите длину отрезка SN.

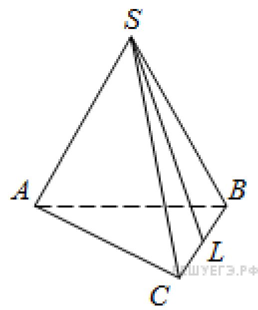
Пояснение.
Площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему: $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}P_{ABC} \cdot SN$. Тогда $SN = \frac{2S_{\text{бок}}}{P_{ABC}} = \frac{2S_{\text{бок}}}{3AB} = \frac{2 \cdot 3}{3} = 2$.



31.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка L — середина ребра BC, S — вершина. Известно, что $SL = 2$, а площадь боковой поверхности равна 3. Найдите длину отрезка AB.

Пояснение.
Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению апофемы на полупериметр основания. Поэтому



$$SL \cdot \frac{AB + BC + AC}{2} = 3 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{3AB}{2} = 3 \Leftrightarrow AB = 1.$$

Ответ: 1.

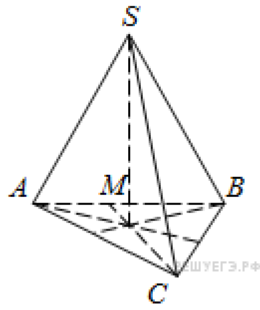
32.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания пересекаются в точке M. Площадь треугольника ABC равна 3, объем пирамиды равен 1. Найдите длину отрезка MS.

Пояснение.
Основание пирамиды — равносторонний треугольник, поэтому, точка M является центром основания, а MS — высотой пирамиды $SABC$. Ее объем вычисляется по формуле $V_{SABC}=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot MS$. Тогда

$$MS=\frac{3V_{SABC}}{S_{\text{осн}}}=\frac{3}{3}=1.$$

Ответ: 1.



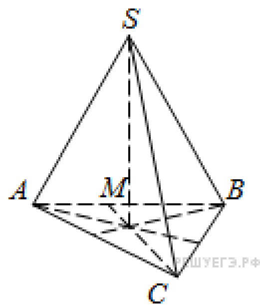
33.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания пересекаются в точке M. Площадь треугольника ABC равна 3, $MS=1$. Найдите объем пирамиды.

Пояснение.
Основание пирамиды — равносторонний треугольник, поэтому, M является центром основания, а MS — высотой пирамиды $SABC$. Тогда

$$V_{SABC}=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot MS=\frac{1}{3}\cdot 3=1.$$

Ответ: 1.



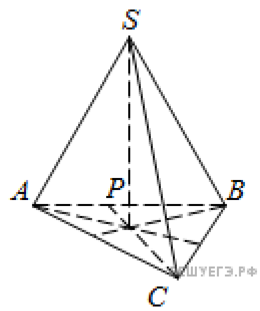
34.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания пересекаются в точке P. Объем пирамиды равен 1, $PS=1$. Найдите площадь треугольника ABC.

Пояснение.
Основание пирамиды — равносторонний треугольник, поэтому, P является центром основания, а SP — высотой пирамиды $SABC$. Ее объем вычисляется по формуле $V_{SABC}=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot PS$. Тогда

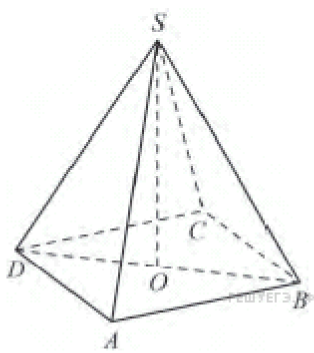
$$S_{\text{осн}}=\frac{3V_{SABC}}{PS}=3.$$

Ответ: 3.



35.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O − центр основания, S − вершина, $SA=13$, $BD=10$. Найдите длину отрезка SO.



Пояснение.

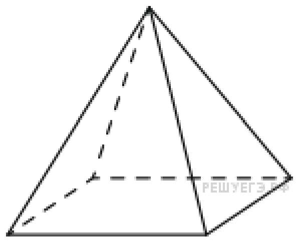
В правильной пирамиде вершина проецируется в центр основания, следовательно, SO является высотой пирамиды. Тогда по теореме Пифагора

$$SO=\sqrt{SB^2-BO^2}=\sqrt{SB^2-\left(\frac{BD}{2}\right)^2}=\sqrt{169-25}=12.$$

Ответ: 12.

36.

Пирамида Снофру имеет форму правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 220 м, а высота — 104 м. Сторона основания точной музейной копии этой пирамиды равна 44 см. Найдите высоту музейной копии. Ответ дайте в сантиметрах.



Пояснение.

Переведём сантиметры в метры и найдём во сколько раз сторона основания пирамиды отличается от музейной копии:

$$\frac{220}{0,44}=500\text{ раз.}$$

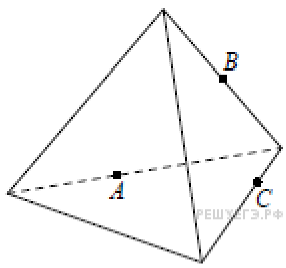
Найдём высоту музейной копии:

$$\frac{104}{500}=0,208\,\text{м}=20,8\text{ см.}$$

Ответ: 20,8.

37.

Плоскость, проходящая через точки A, B и C, рассекает тетраэдр на два многогранника (см. рисунок). Сколько вершин у получившегося многогранника с большим числом граней?



Пояснение.

У многогранника с большим числом граней количество вершин равно 6.

Ответ: 6.