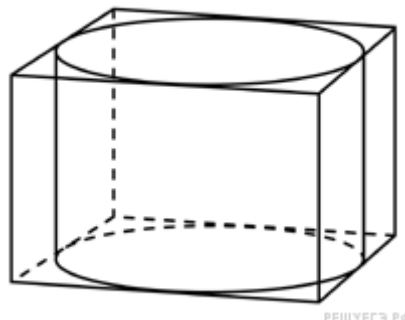


## Комбинации тел

1.

Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите объем параллелепипеда.



РЕШУЕГЭ.РФ

**Пояснение.**

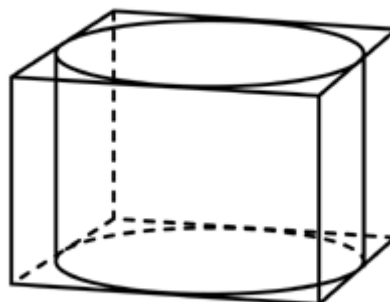
Высота параллелепипеда равна высоте вписанного в него цилиндра. Основанием параллелепипеда является квадрат, сторона которого в два раза больше радиуса вписанной в него окружности. Поэтому площадь основания равна 4, а объем параллелепипеда равен

$$V_{\text{пар}} = S_{\text{осн}} H = 4 \cdot 1 = 4.$$

Ответ: 4.

2.

Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 4. Объем параллелепипеда равен 16. Найдите высоту цилиндра.



РЕШУЕГЭ.РФ

**Пояснение.**

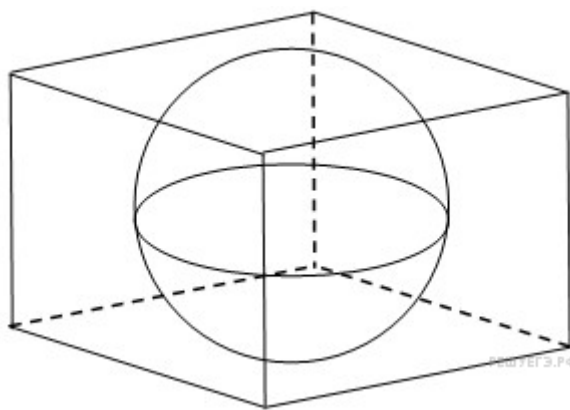
Высота параллелепипеда равна высоте вписанного в него цилиндра. Основанием параллелепипеда является квадрат, сторона которого в два раза больше радиуса вписанной в него окружности. Поэтому сторона основания равна 8, а площадь основания равна 64. Тогда высота цилиндра равна

$$H = \frac{V_{\text{пар}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{16}{64} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

3.

В куб вписан шар радиуса 1. Найдите объем куба.



**Пояснение.**

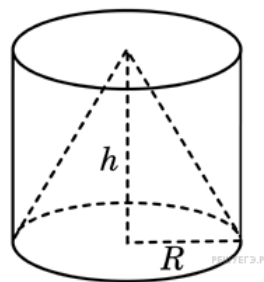
Ребро куба равно диаметру вписанного в него шара, а объем куба равен кубу его ребра. Отсюда имеем:

$$V_{\text{к}} = 2^3 = 8.$$

Ответ: 8.

**4.**

Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 25.



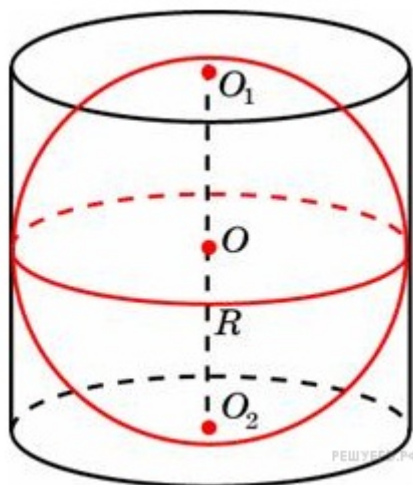
**Пояснение.**

Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту, а объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту. Поскольку они имеют общее основание и высоту, объем цилиндра в три раза больше объема конуса.

Ответ: 75.

**5.**

Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 18. Найдите площадь поверхности шара.



**Пояснение.**

По построению радиусы шара и основания цилиндра равны. Площадь поверхности цилиндра, с радиусом основания  $r$  и высотой  $2r$  равна

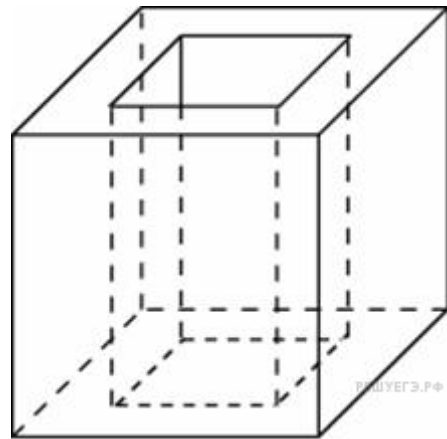
$$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2.$$

Площадь поверхности шара радиуса  $r$  равна  $S = 4\pi r^2$ , то есть в 1,5 раза меньше площади поверхности цилиндра. Следовательно, площадь поверхности шара равна 12.

Ответ: 12.

**6.**

Из единичного куба вырезана правильная четырехугольная призма со стороной основания 0,5 и боковым ребром 1. Найдите площадь поверхности оставшейся части куба.

**Пояснение.**

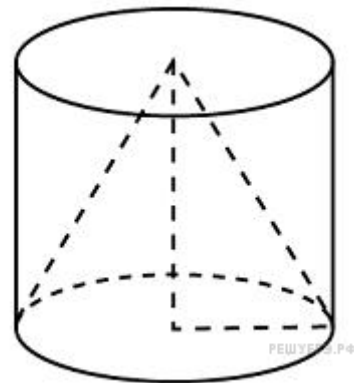
Площадь поверхности получившегося многогранника равна сумме площадей поверхностей куба со стороной 1 и параллелепипеда со сторонами 1, 0,5, 0,5 минус 2 площади основания вырезанной призмы:

$$S = 6 + 4(0,5 \cdot 1) - 2(0,5 \cdot 0,5) = 7,5.$$

Ответ: 7,5.

**7.**

Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объем конуса, если объем цилиндра равен 150.

**Пояснение.**

Объем конуса равен

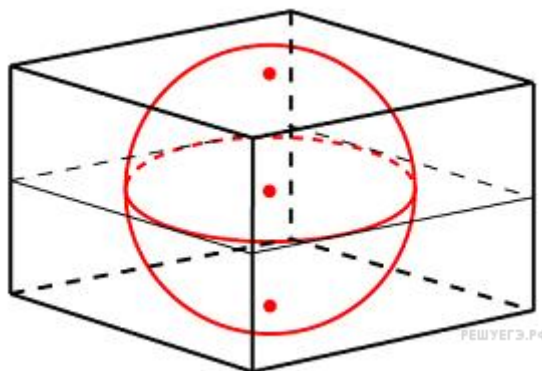
$$V = \frac{1}{3}Sh,$$

где  $S$  — площадь основания, а  $h$  — высота конуса. Объем цилиндра равен  $V = Sh$  и, как видно, в 3 раза больше объема конуса. Поэтому объем конуса равен 50.

Ответ: 50.

**8.**

Объем прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 216. Найдите радиус сферы.



**Пояснение.**

Прямоугольный параллелепипед, описанный вокруг сферы, является кубом. Тогда длина его ребра

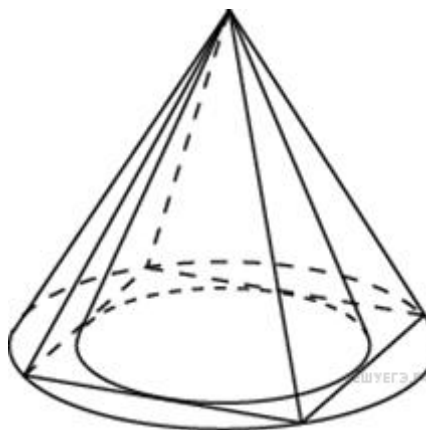
$$a = \sqrt[3]{V} = 6.$$

Радиус сферы равен половине длины ребра  $r = 3$ .

Ответ: 3.

**9.**

Во сколько раз объем конуса, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, больше объема конуса, вписанного в эту пирамиду?



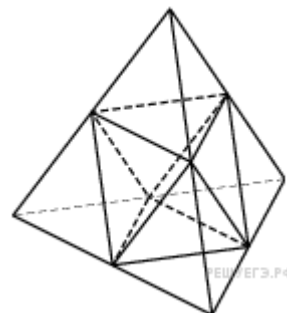
**Пояснение.**

Объемы данных конусов соотносятся как площади их оснований, и, следовательно, как квадраты их диаметров. Диаметр вписанного конуса равен стороне квадрата, диаметр описанного – диагонали квадрата, длина которой равна  $\sqrt{2}$  длины стороны. Поэтому объем описанного конуса в 2 раза больше объема вписанного.

Ответ: 2.

**10.**

Объем тетраэдра равен 19. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются середины ребер данного тетраэдра.



**Пояснение.**

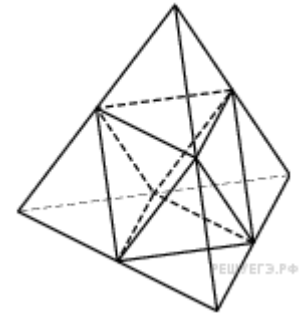
Объем данного многогранника равен разности объемов исходного тетраэдра  $V_0$  и четырех тетраэдров, одни из вершин которых совпадают с вершинами исходного:

$$V = V_0 - 4 \cdot \frac{1}{8} V_0 = \frac{1}{2} V_0 = 9,5.$$

Ответ: 9,5.

**11.**

Площадь поверхности тетраэдра равна 12. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины рёбер данного тетраэдра.

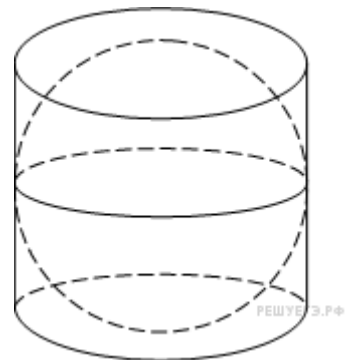
**Пояснение.**

Искомая поверхность состоит из 8 равносторонних треугольников со стороной, вдвое меньшей ребра исходного тетраэдра. Поверхность исходного тетраэдра состоит из 16-ти таких треугольников (см. рис.), поэтому искомая площадь равна половине площади поверхности тетраэдра и равна 6.

Ответ: 6.

**12.**

Цилиндр описан около шара. Объем цилиндра равен 33. Найдите объем шара.

**Пояснение.**

$$V_{\text{цил}} = S_{\text{осн}} h = \pi R^2 2R = 2\pi R^3 = 33,$$

$$V_{\text{шар}} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

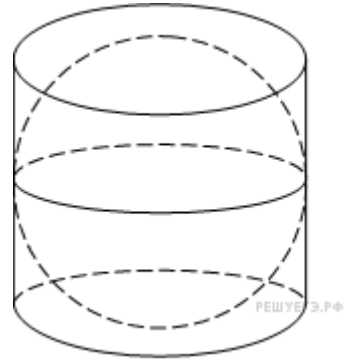
Выразим из формулы для объёма цилиндра  $R^3$  и подставим в формулу для объёма шара

$$V_{\text{шар}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \frac{33}{2\pi} = 22$$

Ответ: 22.

**13.**

Цилиндр описан около шара. Объем шара равен 24. Найдите объем цилиндра.



**Пояснение.**

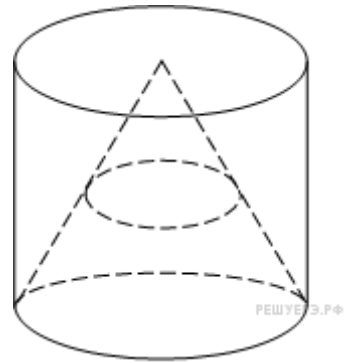
Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту. Площадь основания цилиндра равна площади большого круга вписанного шара, а высота цилиндра равна диаметру вписанного шара. Поэтому

$$V_{\text{цил}} = S_{\text{осн}} h = \pi R^2 2R = 2\pi R^3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{3}{2} V_{\text{шар}} = \frac{3}{2} \cdot 24 = 36.$$

Ответ: 36.

**14.**

Конус вписан в цилиндр. Объем конуса равен 5. Найдите объем цилиндра.



**Пояснение.**

Поскольку

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h = 5$$

а конус и цилиндр имеют общую высоту и основание, имеем:

$$V_{\text{цил}} = S_{\text{осн}} h = 3V_{\text{кон}} = 15.$$

Ответ: 15.

**15.**

Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания которого равен 2. Площадь боковой поверхности призмы равна 48. Найдите высоту цилиндра.

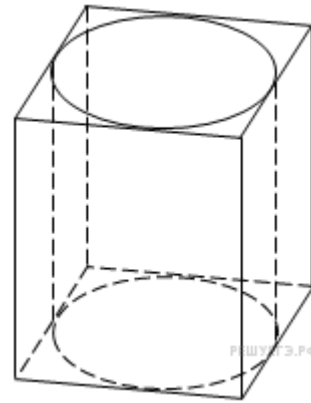
**Пояснение.**

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на боковое ребро. Боковое ребро равно высоте цилиндра. В основании призмы лежит квадрат, его сторона равна диаметру вписанного круга. Поэтому

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} H = 4 \cdot 4 \cdot H = 16H.$$

Поскольку по условию площадь боковой поверхности равна 48, искомая высота равна 3.

Ответ: 3.

**16.**

Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна  $7\sqrt{2}$ . Найдите радиус сферы.

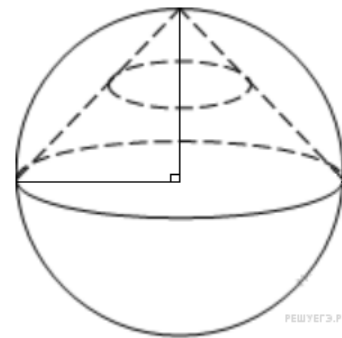
**Пояснение.**

Высота конуса перпендикулярна основанию и равна радиусу сферы. Тогда по теореме Пифагора получаем:

$$l^2 = r^2 + r^2 \Leftrightarrow l = r\sqrt{2}.$$

Поскольку по условию образующая равна  $7\sqrt{2}$ , радиус сферы равен 7.

Ответ: 7.

**17.**

Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Радиус сферы равен  $28\sqrt{2}$ . Найдите образующую конуса.

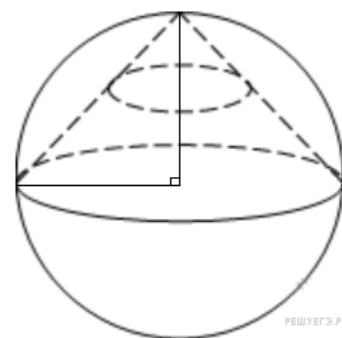
**Пояснение.**

Высота конуса перпендикулярна основанию и равна радиусу сферы. Тогда по теореме Пифагора получаем:

$$l^2 = r^2 + r^2 \Leftrightarrow l = r\sqrt{2}.$$

Радиус сферы равен  $28\sqrt{2}$ , поэтому образующая равна  $28\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 56$ .

Ответ: 56.

**18.**

Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 111. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

**Пояснение.**

Высота цилиндра равна диаметру шара, а радиус основания цилиндра равен радиусу шара (см. рис.).

Площадь основания цилиндра:

$$S_{\text{осн}} = \pi R^2.$$

Площадь боковой поверхности цилиндра:

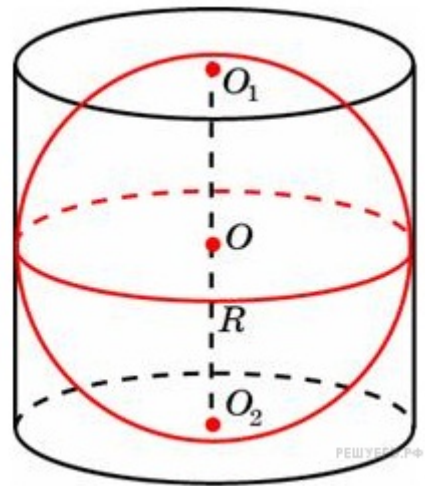
$$S_{\text{бок}} = 2\pi R \cdot h = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2.$$

Площадь полной поверхности цилиндра:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}} = 4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2.$$

Поскольку площадь поверхности шара дается формулой

$$S_{\text{ш}} = 4\pi R^2, \text{ имеем: } S_{\text{полн}} = 1,5S_{\text{ш}} = 166,5.$$



Ответ: 166,5.