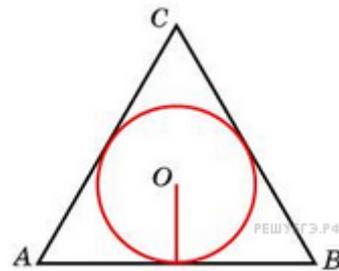


Вписанная и описанная окружности

1.

Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен 6. Найдите высоту этого треугольника.



Пояснение.

$$r = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} AC^2 \sin 60^\circ}{3AC} = \frac{AC \sin 60^\circ}{3} = \frac{h}{\sin 60^\circ} \cdot \frac{\sin 60^\circ}{3} = \frac{h}{3},$$

значит, $h = 3r = 18$.

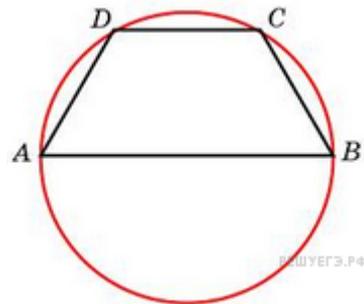
Ответ: 18.

Приведем другое решение.

Высота правильного треугольника равна 3 радиусам вписанной окружности, поэтому она равна 18.

2.

Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию, угол при основании равен 60° , большее основание равно 12. Найдите радиус описанной окружности этой трапеции.



Пояснение.

Окружность, описанная вокруг трапеции, описана и вокруг треугольника ADC . Это треугольник равнобедренный, угол при вершине равен 120° , углы при основании равны 30° . Найдём его боковую сторону:

$$AD = AB - 2AH = AB - 2AD \cos 60^\circ = 12 - AD,$$

откуда $AD = 6$. Тогда по теореме синусов:

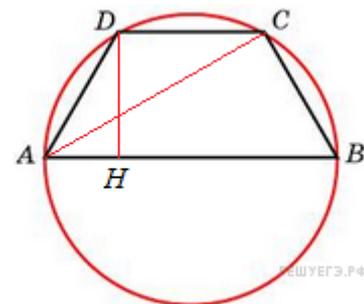
$$R = \frac{AD}{2 \sin \angle DCA} = \frac{6}{2 \sin 30^\circ} = 6.$$

Ответ: 6.

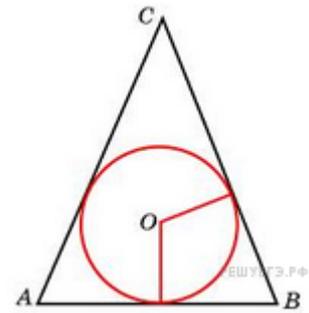
Приведем другое решение (Р. А., СПб.).

Хорды AD , DC и CB равны, поэтому равны и стягиваемые ими дуги. Вписанный угол A равен 60° , он опирается на две из этих дуг и равен половине их суммы. Поэтому каждая из дуг равна 60° , их сумма равна 180° , а хорда AB является диаметром. Отсюда получаем, что искомый радиус равен 6.

3.



Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит в точке касания одну из боковых сторон на два отрезка, длины которых равны 5 и 3, считая от вершины, противоположной основанию. Найдите периметр треугольника.

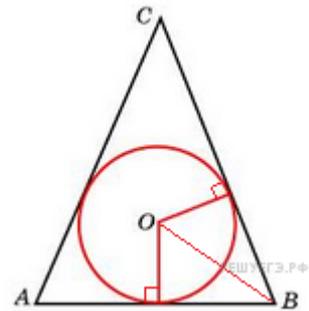


Пояснение.

Пусть точки H и K являются точками касания окружности и сторон AB и CB соответственно. Треугольники HOB и KOB равны, т. к. являются прямоугольными с общей гипотенузой и равными катетами, значит, $HB = KB = 3$.

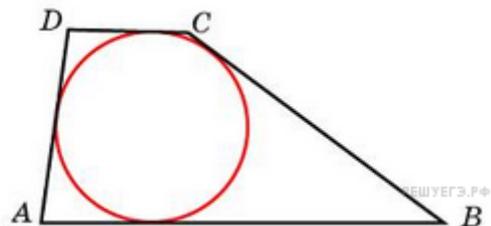
$$P_{ABC} = AC + CB + AH + HB = 2CB + 2HB = 16 + 6 = 22.$$

Ответ: 22.



4.

Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 3 и 5. Найдите среднюю линию трапеции.

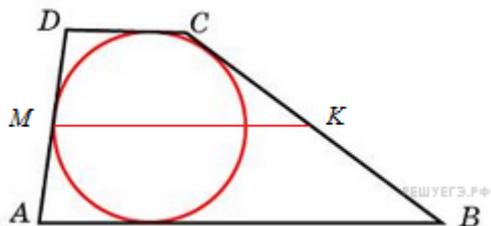


Пояснение.

в выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB + CD = BC + AD$,

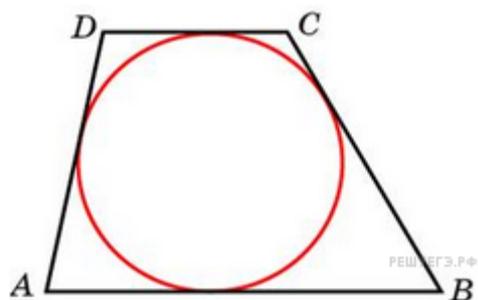
$$MK = \frac{DC + AB}{2} = \frac{AD + BC}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Ответ: 4.



5.

Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 40. Найдите ее среднюю линию.

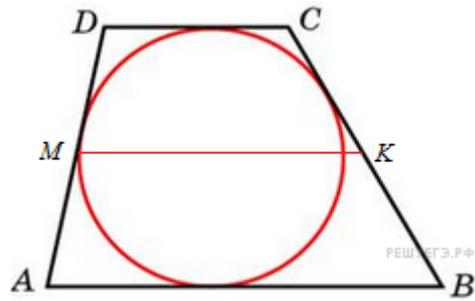


Пояснение.

В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB + CD = BC + AD$,

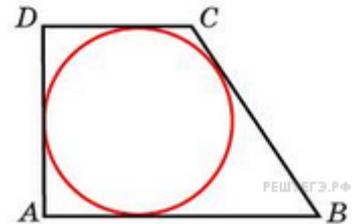
$$MK = \frac{DC + AB}{2} = \frac{P_{ABCD}}{4} = 10.$$

Ответ: 10.



6.

Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 22, ее большая боковая сторона равна 7. Найдите радиус окружности.



Пояснение.

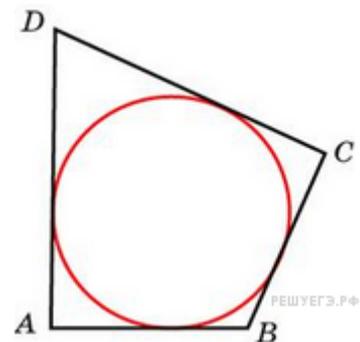
В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB + CD = BC + AD$,

$$r = \frac{AD}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{P}{2} - BC \right) = \frac{11 - 7}{2} = 2.$$

Ответ: 2.

7.

В четырехугольник ABCD вписана окружность, $AB = 10$, $CD = 16$. Найдите периметр четырехугольника.



Пояснение.

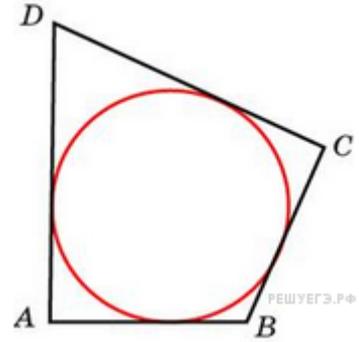
В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB + CD = BC + AD$. Тогда

$$P_{ABCD} = AB + CD + BC + DA = 2(AB + CD) = 52.$$

Ответ: 52.

8.

В четырехугольник ABCD вписана окружность, $AB = 10$, $BC = 11$ и $CD = 15$. Найдите четвертую сторону четырехугольника.



Пояснение.

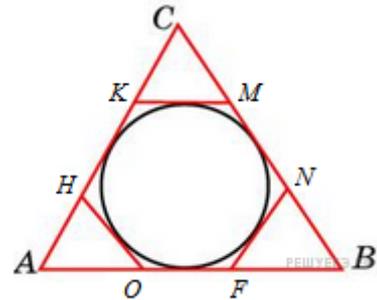
В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB + CD = BC + AD$, значит,

$$AD = (AB + CD) - BC = 14.$$

Ответ: 14.

9.

К окружности, вписанной в треугольник ABC , проведены три касательные. Периметры отсеченных треугольников равны 6, 8, 10. Найдите периметр данного треугольника.



Пояснение.

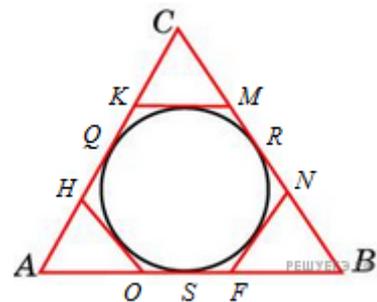
Отрезки касательных, проведенных к окружности из точек K, H, O, F, N, M , соответственно равны друг другу. Поэтому

$$CQ + CR = P_{CKM}, AQ + AS = P_{AHO}, BS + BR = P_{BFN}.$$

Следовательно,

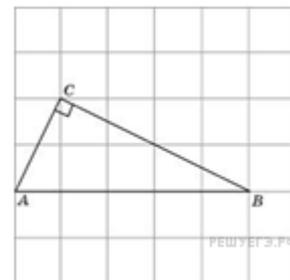
$$P_{ABC} = P_{AHO} + P_{CKM} + P_{FNB} = 24.$$

Ответ: 24.



10.

Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC , если стороны квадратных клеток равны 1.



Пояснение.

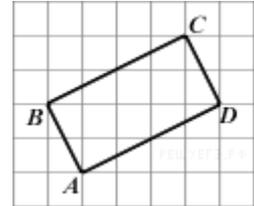
треугольник прямоугольный, значит, радиус описанной вокруг него окружности равен половине гипотенузы.

$$R = \frac{AB}{2} = 2,5.$$

Ответ: 2,5.

11.

Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, если стороны квадратных клеток равны 1.

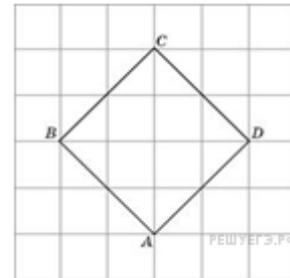
**Пояснение.**

Радиус окружности, описанной около прямоугольника, равен половине его диагонали. Диагональ равна 5, поэтому радиус равен 2,5.

Ответ: 2,5.

12.

Найдите радиус окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными $\sqrt{2}$.

**Пояснение.**

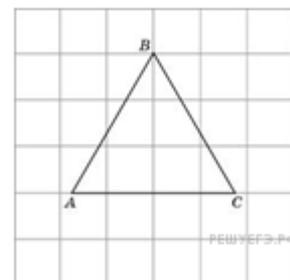
радиус окружности, вписанной в квадрат, равен половине его стороны.

$$r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{4+4}}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ответ: 2.

13.

Найдите радиус окружности, описанной около правильного треугольника ABC , считая стороны квадратных клеток равными 1.

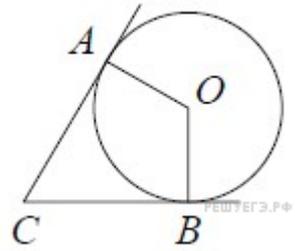
**Пояснение.**

Радиус окружности, описанной вокруг равностороннего треугольника, равен двум третьим его высоты. Поэтому он равен 2.

Ответ: 2.

14.

В угол C , равный 68° , вписана окружность с центром O , которая касается сторон угла в точках A и B . Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.



Пояснение.

Острый угол между перпендикулярами к сторонам угла равен самому углу; тупой угол между ними дополняет его до 180° . Тем самым, искомый угол равен $180^\circ - 68^\circ = 112^\circ$.

Ответ: 112.