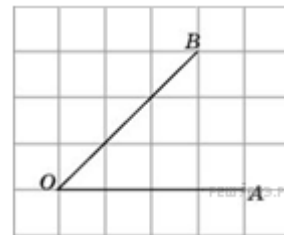


Треугольники общего вида

1.

Найдите синус угла AOB . В ответе укажите значение синуса, умноженное на $2\sqrt{2}$.

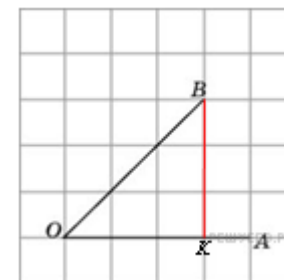


Пояснение.

Проведем высоту BK из точки B на сторону OA . Тогда, принимая во внимание, что $BK = OK$, получим:

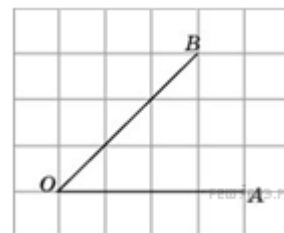
$$2\sqrt{2} \sin \angle AOB = 2\sqrt{2} \sin \angle KOB = \frac{2\sqrt{2}BK}{OB} = \frac{2\sqrt{2}BK}{BK\sqrt{2}} = 2.$$

Ответ: 2.



2.

Найдите косинус угла AOB . В ответе укажите значение косинуса, умноженное на $2\sqrt{2}$.

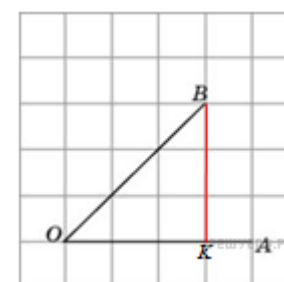


Пояснение.

Проведем высоту BK из точки B на сторону OA . Из прямоугольного треугольника KOB по теореме Пифагора $OB = \sqrt{OK^2 + KB^2} = \sqrt{2OK^2} = OK\sqrt{2}$. Получаем:

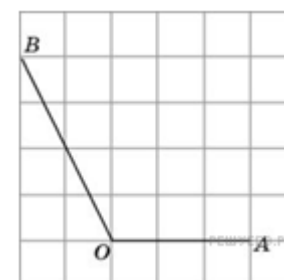
$$2\sqrt{2} \cos \angle AOB = 2\sqrt{2} \cos \angle KOB = \frac{2\sqrt{2}OK}{OB} = \frac{2\sqrt{2}OK}{OK\sqrt{2}} = 2.$$

Ответ: 2.



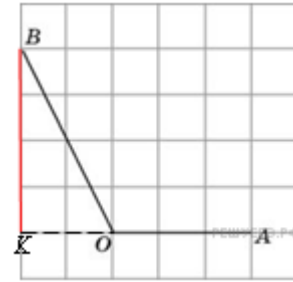
3.

Найдите синус угла AOB . В ответе укажите значение синуса, умноженное на $\frac{\sqrt{5}}{2}$.



Пояснение.

проведем высоту BK из точки B на продолжение стороны OA . Тогда:

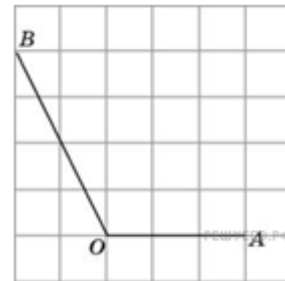


$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5}}{2} \sin \angle AOB &= \frac{\sqrt{5}}{2} \sin(\pi - \angle KOB) = \frac{\sqrt{5}}{2} \sin \angle KOB = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{BK}{BO} = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{BK}{\sqrt{BK^2 + KO^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{16 + 4}} = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

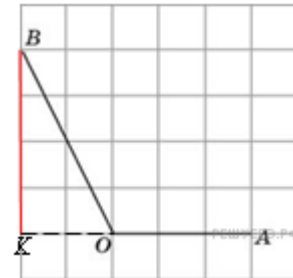
4.

Найдите косинус угла AOB . В ответе укажите значение косинуса, умноженное на $2\sqrt{5}$.



Пояснение.

Проведем высоту BK из точки B на продолжение стороны OA . Тогда:

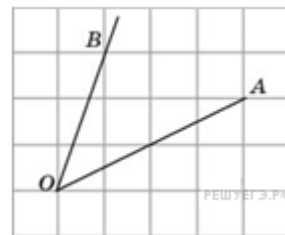


$$\begin{aligned} 2\sqrt{5} \cos \angle AOB &= 2\sqrt{5} \cos(\pi - \angle KOB) = -2\sqrt{5} \cos \angle KOB = -2\sqrt{5} \cdot \frac{KO}{BO} = \\ &= -2\sqrt{5} \cdot \frac{KO}{\sqrt{BK^2 + KO^2}} = -2\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{16 + 4}} = -2. \end{aligned}$$

Ответ: -2.

5.

Найдите синус угла AOB . В ответе укажите значение синуса, умноженное на $2\sqrt{2}$.

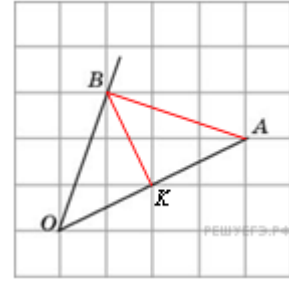


Пояснение.

достроим угол до треугольника OBA , $OB = BA$. BK делит основание OA пополам, значит, BK – высота. Из рисунка находим $BK = \sqrt{5}$, $OB = \sqrt{10}$.

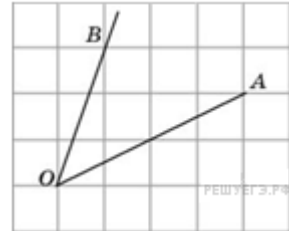
$$2\sqrt{2} \sin \angle AOB = 2\sqrt{2} \cdot \frac{BK}{OB} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = 2.$$

Ответ: 2.



6.

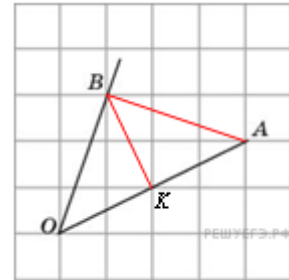
Найдите косинус угла AOB . В ответе укажите значение косинуса, умноженное на $2\sqrt{2}$.

**Пояснение.**

Достроим угол до треугольника OBA , $OB = BA$. Отрезок BK делит основание OA пополам, значит, BK – высота. Из рисунка находим $OK = \sqrt{5}$, $OB = \sqrt{10}$ и

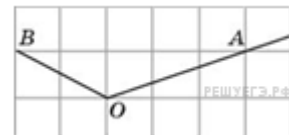
$$2\sqrt{2} \cos \angle AOB = 2\sqrt{2} \cdot \frac{OK}{OB} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = 2.$$

Ответ: 2.



7.

Найдите синус угла AOB . В ответе укажите значение синуса, умноженное на $2\sqrt{2}$.



Пояснение.

Достроим угол до треугольника BOA и опустим высоту OK на основание AB . Из рисунка находим $OK = 1$, $OA = \sqrt{10}$, $OB = \sqrt{5}$, $AB = 5$. Воспользуемся теоремой синусов:

$$\frac{OA}{\sin \angle ABO} = \frac{AB}{\sin \angle AOB}, \text{ где } \sin \angle ABO = \frac{OK}{OB} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Тогда:

$$2\sqrt{2} \sin \angle AOB = 2\sqrt{2} \cdot \frac{AB\sqrt{5}}{5OA} = 2.$$

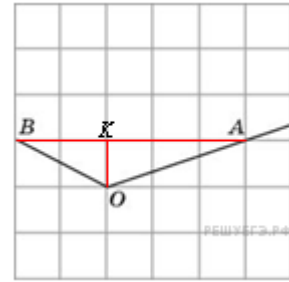
Ответ: 2.

Приведем другое решение.

По теореме косинусов в треугольнике AOB имеем:

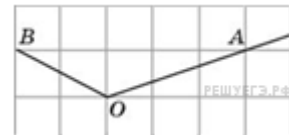
$$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cos \angle AOB, \text{ откуда } \cos \angle AOB = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда из основного тригонометрического тождества находим $\sin \angle AOB = \frac{\sqrt{2}}{2}$, что дает $2\sqrt{2} \sin \angle AOB = 2$.



8.

Найдите косинус угла AOB . В ответе укажите значение косинуса, умноженное на $2\sqrt{2}$.

**Пояснение.**

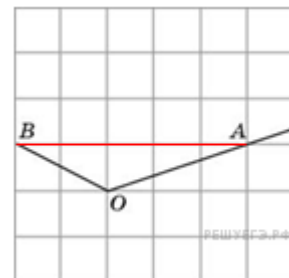
достроим угол до треугольника BOA . Из рисунка находим $OA = \sqrt{10}$, $OB = \sqrt{5}$, $AB = 5$. Воспользуемся теоремой косинусов:

$$AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2OB \cdot OA \cdot \cos \angle AOB.$$

Тогда:

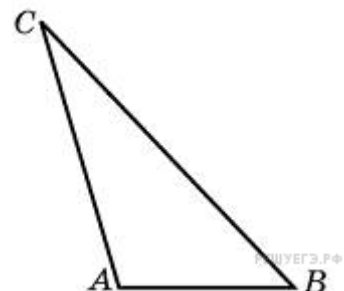
$$2\sqrt{2} \cos \angle AOB = 2\sqrt{2} \cdot \frac{OB^2 + OA^2 - AB^2}{2OB \cdot OA} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{5 + 10 - 25}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = -2.$$

Ответ: -2.



9.

Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 8 и 12, а угол между ними равен 30° .



Пояснение.

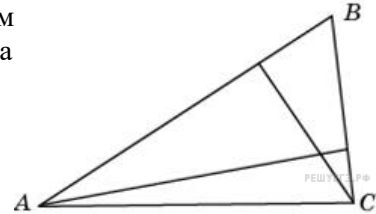
Площадь треугольника равна половине произведения его сторон на синус угла между ними. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = 24 \text{ см}^2.$$

Ответ: 24.

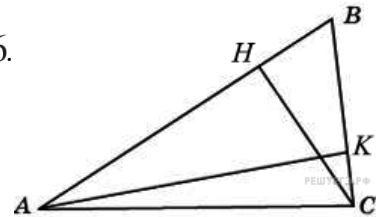
10.

У треугольника со сторонами 9 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведенная к первой стороне, равна 4. Чему равна высота, проведенная ко второй стороне?

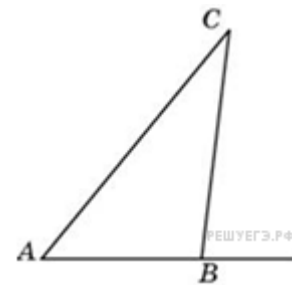
**Пояснение.**

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} CH \cdot AB = \frac{1}{2} AK \cdot CB \Leftrightarrow AK = \frac{CH \cdot AB}{CB} = \frac{4 \cdot 9}{6} = 6.$$

Ответ: 6.

**11.**

Один из внешних углов треугольника равен 85° . Углы, не смежные с данным внешним углом, относятся как $2 : 3$. Найдите наибольший из них. Ответ дайте в градусах.

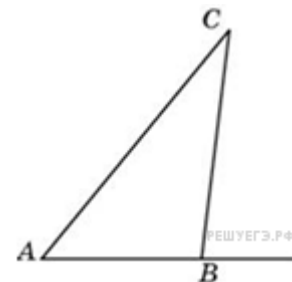
**Пояснение.**

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов, не смежных с ним. Поэтому если принять эти углы за $2x$ и $3x$, получим $5x = 85^\circ$, откуда $x = 17^\circ$. Следовательно, больший угол равен 51° .

Ответ: 51.

12.

Сумма двух углов треугольника и внешнего угла к третьему равна 40° . Найдите этот третий угол. Ответ дайте в градусах.

**Пояснение.**

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов, несмежных с ним. Поэтому внешний угол равен $40^\circ / 2 = 20^\circ$, а значит, искомый угол, смежный к найденному внешнему, равен $180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$.

Ответ: 160.

13.

Углы треугольника относятся как $2 : 3 : 4$. Найдите меньший из них. Ответ дайте в градусах.

Пояснение.

обозначим углы треугольника как $2x$, $3x$ и $4x$, соответственно. Их сумма равна 180° , то есть

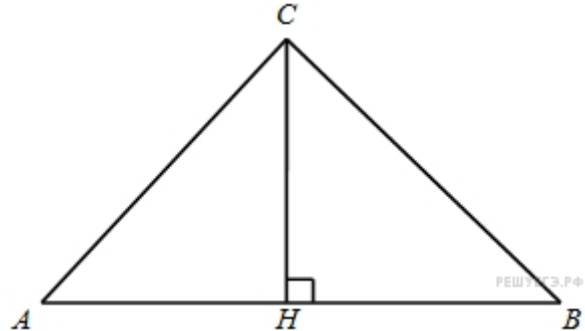
$$2x + 3x + 4x = 9x = 180^\circ \Leftrightarrow x = 20^\circ.$$

Значит, меньший угол равен $2x = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$.

Ответ: 40.

14.

В треугольнике ABC угол A равен 60° , угол B равен 70° , CH – высота. Найдите разность углов ACH и BCH . Ответ дайте в градусах.



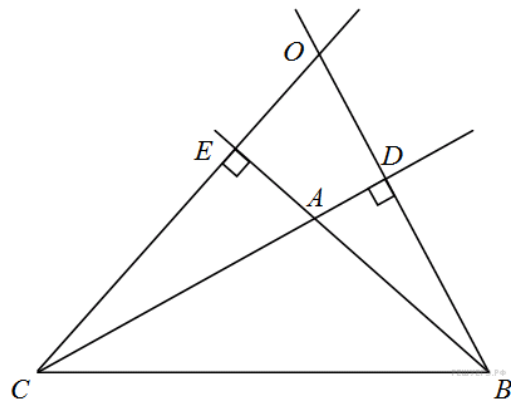
Пояснение.

$$\angle ACH - \angle BCH = (90^\circ - \angle A) - (90^\circ - \angle B) = \angle B - \angle A = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ.$$

Ответ: 10.

15.

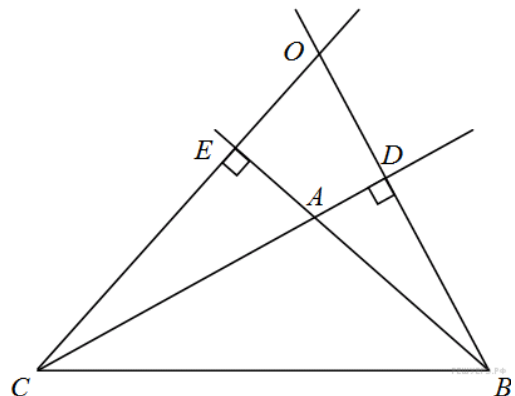
В треугольнике ABC угол A равен 135° . Продолжения высот BD и CE пересекаются в точке O . Найдите угол DOE . Ответ дайте в градусах.



Пояснение.

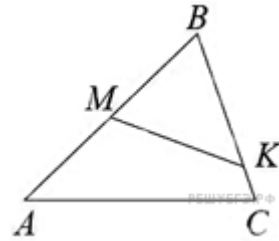
Угол между прямыми равен углу между перпендикулярами к ним, поэтому $\angle DOE = \angle CAE = 180^\circ - \angle CAB = 45^\circ$.

Ответ: 45.



16.

В треугольнике ABC на сторонах AB и BC отмечены точки M и K соответственно так, что $BM : AB = 1 : 2$, а $BK : BC = 4 : 5$. Во сколько раз площадь треугольника ABC больше площади треугольника MBK ?



Пояснение.

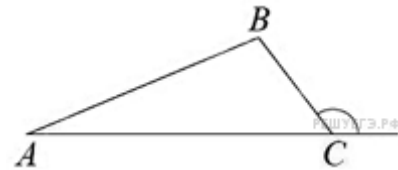
Площади треугольников с сонаправленными сторонами относятся как произведения этих сторон:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MBK}} = \frac{AB \cdot BC}{MB \cdot BK} = \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Ответ: 2,5.

17.

В треугольнике ABC $BC = \sqrt{7}$, $AC = 3\sqrt{7}$, внешний угол при вершине C равен 120° . Найдите AB .



Пояснение.

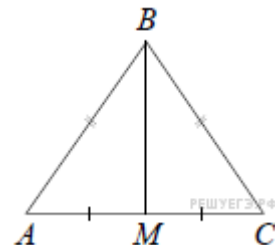
Угол C треугольника смежный с углом 120° , поэтому он равен 60° . Применим теорему косинусов:

$$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cos C} = \sqrt{7 + 63 - 2 \cdot \sqrt{7} \cdot 3\sqrt{7} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{70 - 21} = \sqrt{49} = 7.$$

Ответ: 7.

18.

В равнобедренном треугольнике ABC боковые стороны $AB = BC = 5$, медиана $BM = 4$. Найдите $\cos \angle BAC$.



Пояснение.

В равнобедренном треугольнике медиана опущенная на основание является высотой и биссектрисой. Рассмотрим треугольник ABM . По теореме Пифагора найдём $AM = 3$.

Найдём $\cos \angle BAC$

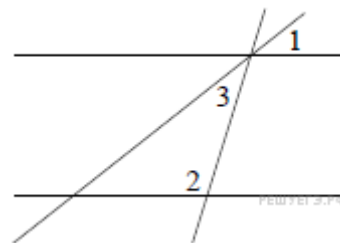
$$\cos A = \frac{AM}{AB} \Leftrightarrow \cos A = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Ответ: 0,6.

19.

Прямые m и n параллельны. Найдите $\angle 3$, если $\angle 1 = 36^\circ$, $\angle 2 = 101^\circ$.

Ответ дайте в градусах.



Пояснение.

В получившемся треугольнике угол напротив угла 2 будет равен 36 градусов — он накрест лежащий углу 1. Найдём сумму углов: $36 + 101 = 137$. Так как сумма углов треугольника равна 180 градусов имеем: $180 - 137 = 43$.

Ответ: 43.