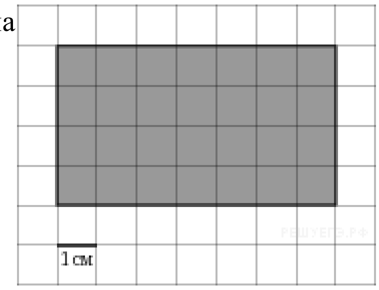
Прямоугольник: длины и площади

1.



На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена фигура (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.

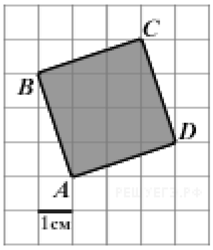
Пояснение.

Площадь прямоугольника равна произведению длины на ширину. Поэтому

$$S = 7 \cdot 4 = 28 \text{ см}^2.$$

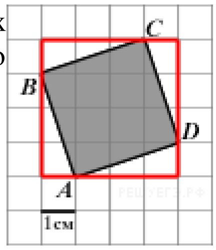
Ответ: 28.

2.



Найдите площадь квадрата *ABCD*, считая стороны квадратных клеток равными 1.

Пояснение.

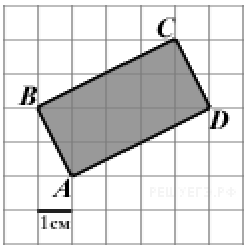


Площадь квадрата равна разности площади прямоугольника и четырех равных прямоугольных треугольников, гипотенузы которых являются сторонами исходного квадрата. Поэтому

$$S = 4 \cdot 4 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = 10 \text{ см}^2.$$

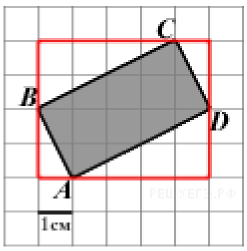
Ответ: 10.

3.



Найдите площадь прямоугольника *ABCD*, считая стороны квадратных клеток равными 1.

Пояснение.



Площадь прямоугольника равна разности площади прямоугольника и четырех прямоугольных треугольников, гипотенузы которых являются сторонами исходного прямоугольника. Поэтому

$$S = 5 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 10 \text{ см}^2.$$

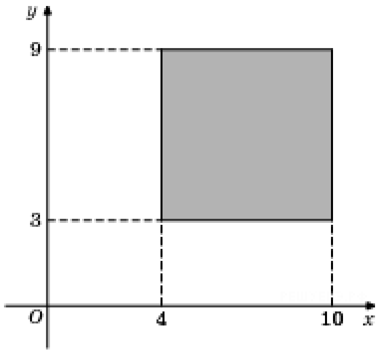
Ответ: 10.

Примечание

Для вычисления площади фигуры можно сложить площади треугольников *BCD* и *BAD*, имеющих общую сторону *BD*, длина которой равна 5, и равные проведенные к ней высоты длины 2.

4.

Найдите площадь квадрата, вершины которого имеют координаты (4;3), (10;3), (10;9), (4;9).



Пояснение.

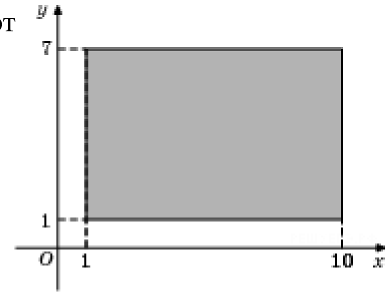
Площадь квадрата равна квадрату его стороны. Поэтому

$$S = 6 \cdot 6 = 36 \text{ см}^2.$$

Ответ: 36.

5.

Найдите площадь прямоугольника, вершины которого имеют координаты (1;1), (10;1), (10;7), (1;7).



Пояснение.

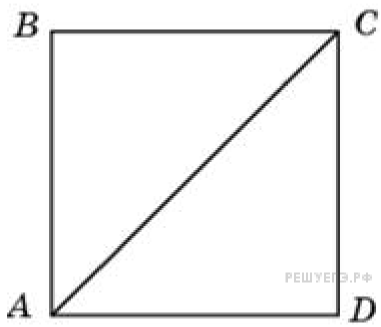
Площадь прямоугольника равна произведению длины на ширину. Поэтому

$$S = 6 \cdot 9 = 54 \text{ см}^2.$$

Ответ: 54.

6.

Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 1.



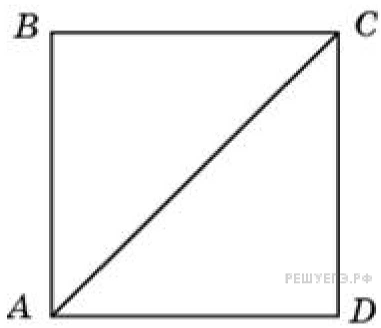
Пояснение.

Площадь квадрата равна половине произведения его диагоналей. Поэтому она равна 0,5.

Ответ: 0,5.

7.

Найдите диагональ квадрата, если его площадь равна 2.



Пояснение.

Площадь квадрата равна половине произведения его диагоналей. Поэтому произведение диагоналей равно 4, а каждая из них равна 2.

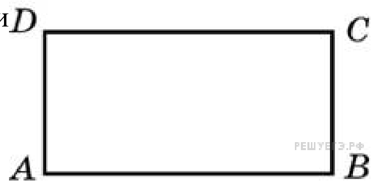
Другое решение.

Пусть сторона квадрата равна a. Тогда его площадь равна a^2, а диагональ равна $a\sqrt{2}$. Поэтому: $a^2 = 2$, значит, $a = \sqrt{2}$. Отсюда следует, что диагональ равна 2.

Ответ: 2.

8.

Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со сторонами 4 и 9.



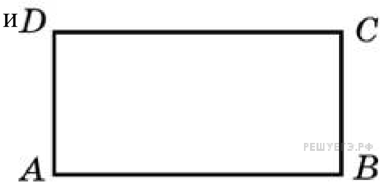
Пояснение.

Площадь прямоугольника равна произведению длины на ширину $S = 4 \cdot 9 = 36$. Площадь квадрата равна квадрату его стороны. Поэтому сторона квадрата, площадь которого равна 36, равна 6.

Ответ: 6.

9.

Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 18, и одна сторона на 3 больше другой.



Пояснение.

Площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину. Периметр прямоугольника равен сумме длин всех сторон. Пусть одна из сторон прямоугольника равна a, тогда вторая равна $a+3$. Периметр будет соответственно равен

$$P = 2 \cdot a + 2 \cdot (a + 3) = 18,$$

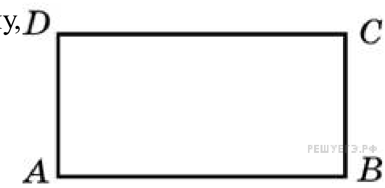
тогда одна из сторон будет равна 3, а другая 6. Поэтому

$$S = 3 \cdot 6 = 18.$$

Ответ: 18.

10.

Площадь прямоугольника равна 18. Найдите его большую сторону, если она на 3 больше меньшей стороны.



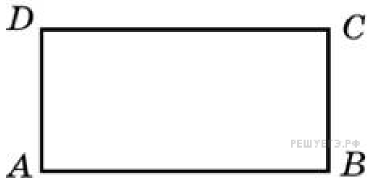
Пояснение.

Площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину. Пусть одна из сторон прямоугольника равна a, тогда вторая равна $a + 3$. Поэтому $S = a \cdot (a + 3) = 18$, получаем $a^2 + 3a - 18 = 0$, решая квадратное уравнение, получаем, что $a = 3$. Тогда большая сторона будет равна 6.

Ответ: 6.

11.

Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 18, а отношение соседних сторон равно 1:2.



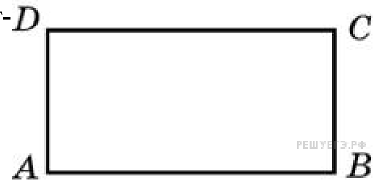
Пояснение.

Площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину. Периметр прямоугольника равен сумме длин всех сторон. Пусть одна из сторон прямоугольника равна a, тогда вторая равна $2a$. Периметр будет соответственно равен $P = 2 \cdot a + 2 \cdot 2a = 18$, тогда одна из сторон равна 3, а другая 6. Поэтому $S = 3 \cdot 6 = 18$.

Ответ: 18.

12.

Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 18, а отношение соседних сторон равно 1:2.



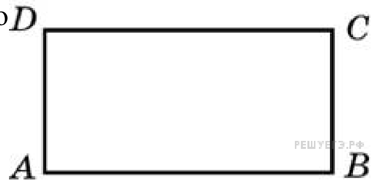
Пояснение.

Площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину. Периметр прямоугольника равен сумме длин всех сторон. Пусть одна из сторон прямоугольника равна a, тогда вторая равна $2a$. Площадь прямоугольника будет соответственно равна $S = 2a^2 = 18$, тогда одна из сторон равна 3, а другая 6. Поэтому $P = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 18$.

Ответ: 18.

13.

Периметр прямоугольника равен 42, а площадь 98. Найдите большую сторону прямоугольника.



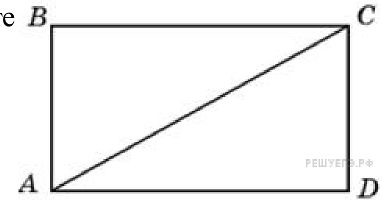
Пояснение.

Площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину. Периметр прямоугольника равен сумме длин всех сторон. Пусть одна из сторон прямоугольника равна a, вторая равна b. Площадь и периметр прямоугольника будут соответственно равны $S = a \cdot b = 98$, $P = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 42$. Решая одновременно эти два уравнения, получаем, что $a_1 = 7$, $a_2 = 14$, $b_1 = 14$, $b_2 = 7$. Поэтому большая сторона равна 14.

Ответ: 14.

14.

Периметр прямоугольника равен 28, а диагональ равна 10. Найдите площадь этого прямоугольника.



Пояснение.

Периметр прямоугольника равен сумме длин его сторон. Площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину. Пусть одна из сторон прямоугольника равна a, вторая равна b. Периметр прямоугольника будет соответственно равен $P = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 28$. Диагональ образует в прямоугольнике два прямоугольных треугольника. По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = 100$. Тогда имеем:

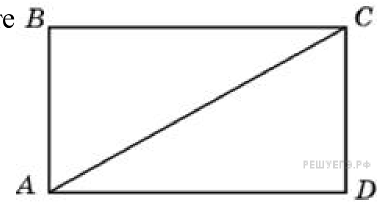
$$\begin{cases} a+b=14, \\ a^2+b^2=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=14, \\ (a+b)^2-(a^2+b^2)=196-100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=14, \\ 2ab=96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=14, \\ ab=48. \end{cases}$$

Тем самым, $S = a \cdot b = 48$.

Ответ: 48.

15.

Периметр прямоугольника равен 34, а площадь равна 60. Найдите диагональ этого прямоугольника.



Пояснение.

Периметр прямоугольника равен сумме длин его сторон. Площадь прямоугольника равна их произведению. Обозначим длины сторон a и b. Тогда периметр и площадь прямоугольника соответственно равны $P = 2(a+b) = 34$ и $S = ab = 60$. Решим систему:

$$\begin{cases} a+b=17, \\ ab=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=17-b, \\ 17b-b^2=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=17-b, \\ \left[\begin{array}{l} b=5, \\ b=12 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=12, \\ b=5, \end{cases} \\ \begin{cases} a=5, \\ b=12. \end{cases} \end{array}\right.$$

Тем самым, стороны прямоугольника треугольника равны 5 и 12.

Диагональ разбивает прямоугольник на два прямоугольных треугольника, в которых она является гипотенузой. Пусть длина диагонали равна c, тогда по теореме Пифагора

$$c = \sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{25+144} = 13.$$

Ответ: 13.

Примечание 1.

Можно заметить, что система уравнений $a+b=17, ab=60$ является системой Виета. Поэтому её решения — корни квадратного уравнения $t^2-17t+60=0$, откуда $t=5$ и $t=12$.

Примечание 2.

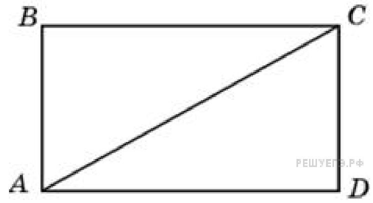
Можно было и вовсе не решать систему уравнений: действительно,

$$c^2 = a^2+b^2 = (a+b)^2-2ab = 17^2-2\cdot 60 = 169 = 289-120 = 169,$$

откуда $c = 13$.

16.

Сторона прямоугольника относится к его диагонали, как 4:5, а другая сторона равна 6. Найдите площадь прямоугольника.



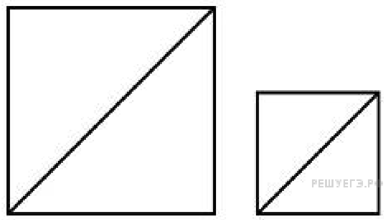
Пояснение.

Площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину. Пусть одна из сторон прямоугольника равна $4a$, тогда диагональ равна $5a$. Диагональ образует в прямоугольнике два прямоугольных треугольника. По теореме Пифагора $16a^2 + 36 = 25a^2$, тогда $9a^2 = 36$, откуда $a = 2$. Поэтому $S = 8 \cdot 6 = 48$.

Ответ: 48.

17.

Даны два квадрата, диагонали которых равны 10 и 6. Найдите диагональ квадрата, площадь которого равна разности площадей данных квадратов.



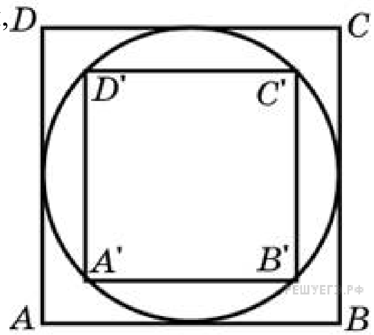
Пояснение.

Площадь квадрата равна половине квадрата его диагонали. Поэтому площадь первого квадрата равна 50, а площадь второго квадрата равна 18. Разность найденных площадей равна 32, значит, квадрат искомой диагонали равен 64, а сама она равна 8.

Ответ: 8.

18.

Во сколько раз площадь квадрата, описанного около окружности, больше площади квадрата, вписанного в эту окружность?



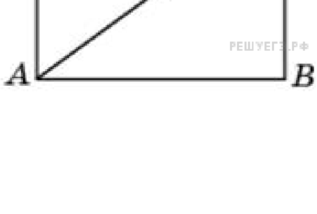
Пояснение.

Пусть радиус окружности равен R. Тогда сторона описанного вокруг нее квадрата равна $2R$, а его площадь, равная квадрату стороны, равна $4R^2$. Диагональ вписанного квадрата также равна $2R$, поэтому его площадь, равная половине произведения диагоналей, равна $2R^2$. Следовательно, отношение площади описанного квадрата к площади вписанного равно 2.

Ответ: 2.

19.

Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AC}$.



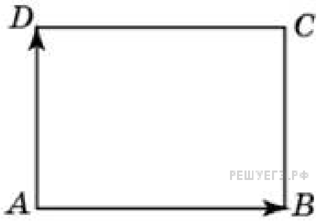
Пояснение.

Вектор $\overrightarrow{AC}$образует в прямоугольнике два прямоугольных треугольника. Поэтому по теореме Пифагора $AC=\sqrt{6^2+8^2}=10.$

Ответ: 10.

20.

Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.



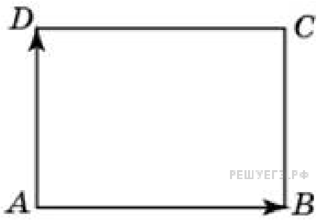
Пояснение.

Сумма векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ равна вектору $\overrightarrow{AC}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ образует в прямоугольнике два прямоугольных треугольника. Поэтому по теореме Пифагора $AC=\sqrt{6^2+8^2}=10.$

Ответ: 10.

21.

Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.



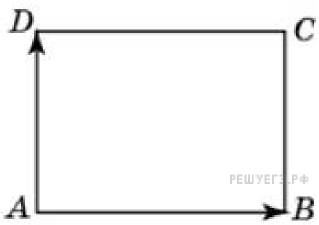
Пояснение.

Разность векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ равна вектору $\overrightarrow{DB}$. Вектор $\overrightarrow{DB}$ образует в прямоугольнике два прямоугольных треугольника. Поэтому по теореме Пифагора $DB=\sqrt{6^2+8^2}=10.$

Ответ: 10.

22.

Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.



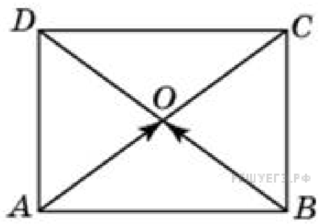
Пояснение.

Скалярное произведение двух векторов равно произведению их длин на косинус угла между ними. Так как косинус прямого угла равен нулю, то и скалярное произведение тоже равно нулю.

Ответ: 0.

23.

Две стороны изображенного на рисунке прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.



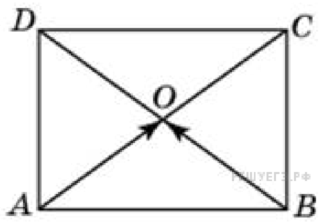
Пояснение.

Сумма векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$ равна вектору $\overrightarrow{AD}$. Его длина равна 6.

Ответ: 6.

24.

Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Диагонали пересекаются в точке O.Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.



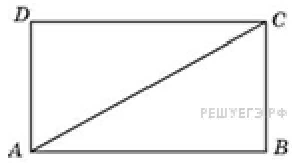
Пояснение.

Разность векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$ равна вектору $\overrightarrow{AB}$. Длина вектора $\overrightarrow{AB} = 8$.

Ответ: 8.

25.

Найдите диагональ прямоугольника, две стороны которого равны 6 и 8.



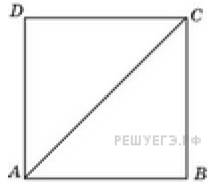
Пояснение.

по теореме Пифагора диагональ равна $\sqrt{6^2+8^2}=10$.

Ответ: 10.

26.

Найдите сторону квадрата, диагональ которого равна $\sqrt{8}$.



Пояснение.

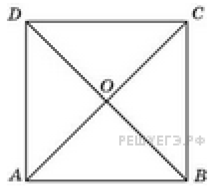
По теореме Пифагора $AC^2=AB^2+BC^2=2AB^2$, значит,

$$AB=\sqrt{\frac{AC^2}{2}}=2.$$

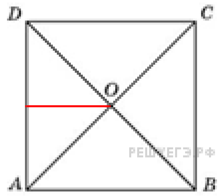
Ответ: 2.

27.

В квадрате расстояние от точки пересечения диагоналей до одной из его сторон равно 7. Найдите периметр этого квадрата.



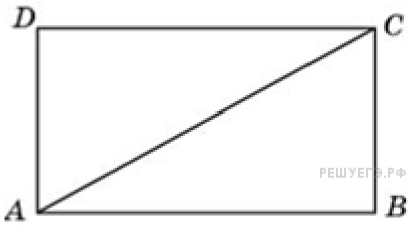
Пояснение.
В квадрате расстояние от точки пересечения диагоналей до стороны равно половине стороны. Поэтому сторона квадрата равна 14, а его периметр 56.



Ответ: 56.

28.

Найдите диагональ прямоугольника, если его периметр равен 28, а периметр одного из треугольников, на которые диагональ разделила прямоугольник, равен 24.



Пояснение.

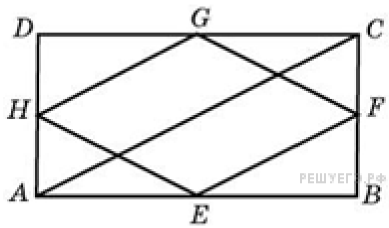
Сумма двух периметров треугольников отличается от периметра прямоугольника на две длины диагонали, поэтому

$$AC = \frac{2P_{ACD} - P_{ABCD}}{2} = \frac{48-28}{2} = 10.$$

Ответ: 10.

29.

Середины сторон прямоугольника, диагональ которого равна 5, последовательно соединены отрезками. Найдите периметр образовавшегося четырехугольника.



Пояснение.

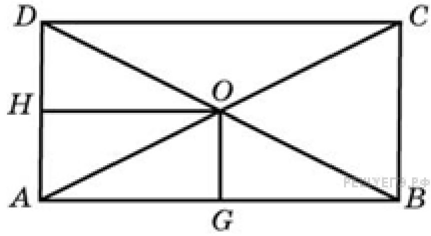
Четырехугольник $EHGF$ ромб, значит, его периметр равен $4EF$. Стороны искомого четырехугольника равны средним линиям треугольников, образуемых диагоналями и сторонами данного четырехугольника. Таким образом, стороны искомого четырехугольника равны половинам диагоналей. Соответственно, имеем:

$$P_{EHGF} = 4EF = 4 \cdot \frac{1}{2}AC = 10.$$

Ответ: 10.

30.

В прямоугольнике расстояние от точки пересечения диагоналей до меньшей стороны на 1 больше, чем расстояние от нее до большей стороны. Периметр прямоугольника равен 28. Найдите меньшую сторону прямоугольника.



Пояснение.

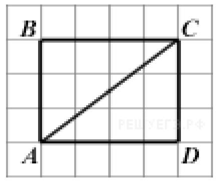
Так как $OH = OG + 1$, то $AB = AD + 2$. Тогда

$$P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2(AD + AD + 2) = 4AD + 4,$$
$$28 = 4AD + 4 \Leftrightarrow AD = 6.$$

Ответ: 6.

31.

Найдите диагональ прямоугольника $ABCD$, если стороны квадратных клеток равны 1.



Пояснение.

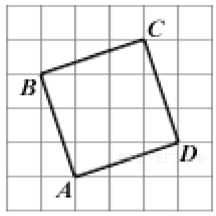
по теореме Пифагора находим диагональ:

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{16 + 9} = 5.$$

Ответ: 5.

32.

Найдите периметр четырехугольника $ABCD$, если стороны квадратных клеток равны $\sqrt{10}$.



Пояснение.

по теореме Пифагора найдем сторону четырехугольника:

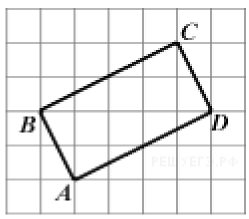
$$AB = \sqrt{10} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2} = 10,$$

тогда периметр равен $4AB = 40$.

Ответ: 40.

33.

Найдите периметр четырехугольника $ABCD$, если стороны квадратных клеток равны $\sqrt{5}$.



Пояснение.

По теореме Пифагора для прямоугольных треугольников, гипотенузы которых являются сторонами заданного четырехугольника, имеем:

$$AB = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2} = 5,$$

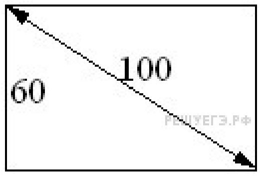
$$BC = \sqrt{5} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2} = 10,$$

тогда периметр равен $2(AB + BC) = 30$.

Ответ: 30.

34.

Диагональ прямоугольного телевизионного экрана равна 100 см, а высота экрана — 60 см. Найдите ширину экрана. Ответ дайте в сантиметрах.



Пояснение.

Согласно теореме Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$, где a, b — катеты в прямоугольном треугольнике. Таким образом: $60^2 + x^2 = 100^2 \Leftrightarrow x^2 = 100^2 - 60^2 = 10000 - 3600 = 6400 = 80^2$

Ответ: 80.