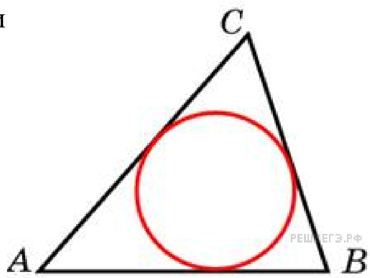
Окружность, вписанная в треугольник

1.

Периметр треугольника равен 12, а радиус вписанной окружности равен 1. Найдите площадь этого треугольника.



Пояснение.

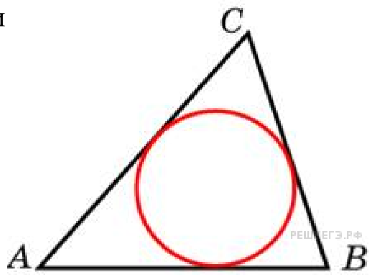
Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности:

$$S = \frac{p}{2} r = 6 \cdot 1 = 6.$$

Ответ: 6.

2.

Площадь треугольника равна 24, а радиус вписанной окружности равен 2. Найдите периметр этого треугольника.



Пояснение.

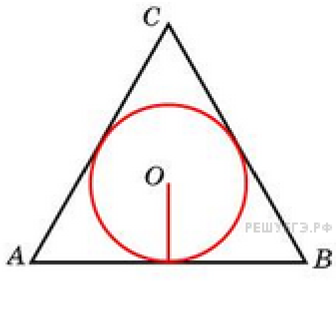
Из формулы $S = pr$, где p - полупериметр, находим, что периметр описанного многоугольника равен отношению удвоенной площади к радиусу вписанной окружности:

$$P = \frac{2S}{r} = \frac{2 \cdot 24}{2} = 24.$$

Ответ: 24.

3.

Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



Пояснение.

Радиус вписанной в треугольник окружности равен отношению площади к полупериметру:

$$r = \frac{S_{ABC}}{p_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} AB^2 \sin A}{\frac{3AB}{2}} = \frac{\sqrt{3} \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}5.$$

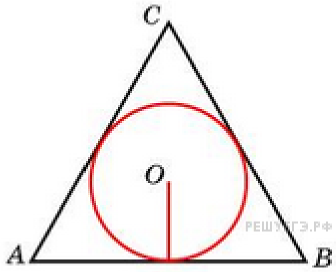
Ответ: 0,5.

Примечание

Другой способ решения состоит в использовании формулы, выражающей радиус вписанной в равносторонний треугольник через его сторону: $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

4.

Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Найдите сторону этого треугольника.



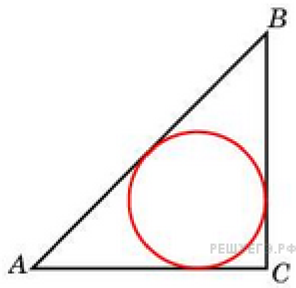
Пояснение.

Известно, что $r = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a$, а по условию $r = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Поэтому длина стороны треугольника $a = 1$.

Ответ: 1.

5.

Радиус окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник, равен 2. Найдите гипотенузу c этого треугольника. В ответе укажите $c(\sqrt{2}-1)$.



Пояснение.

Пусть длина катетов равна x, тогда длина гипотенузы равна $x\sqrt{2}$, а радиус вписанной окружности, вычисляемый по формуле $r = 0,5(a+b-c)$, равен

$$r = \frac{x+x-x\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}x.$$

По условию $r = 2$, откуда

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2}x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{4}{2-\sqrt{2}}.$$

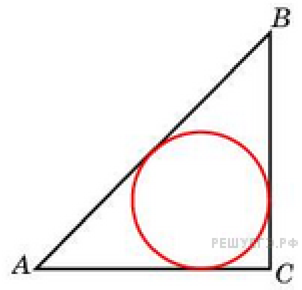
Требовалось найти $c(\sqrt{2}-1)$, имеем:

$$c(\sqrt{2}-1) = x\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = x(2-\sqrt{2}) = \frac{4}{2-\sqrt{2}} \cdot (2-\sqrt{2}) = 4.$$

Ответ: 4.

6.

Катеты равнобедренного прямоугольного треугольника равны $2+\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



Пояснение.

Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен половине разности суммы катетов и гипотенузы:

$$r=\frac{a+b-c}{2}=\frac{2a-a\sqrt{2}}{2}=\frac{a(2-\sqrt{2})}{2}=\frac{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{2}=1.$$

Ответ: 1.

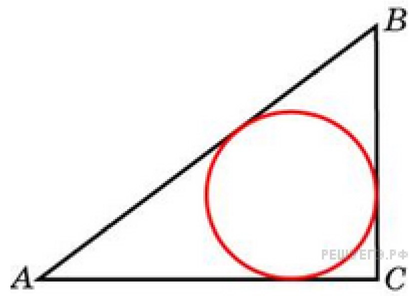
Приведём другое решение.

Радиус вписанной в многоугольник окружности равен отношению его удвоенной площади к периметру. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов. Тем самым, для катетов $a=b=2+\sqrt{2}$ и гипотенузы $c=\sqrt{a^2+b^2}=a\sqrt{2}$ имеем:

$$r=\frac{2S}{P}=\frac{ab}{a+b+c}=\frac{a^2}{2a+a\sqrt{2}}=\frac{a^2}{a(2+\sqrt{2})}=\frac{a}{2+\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=1.$$

7.

В треугольнике ABC $AC=4$, $BC=3$, угол C равен 90°. Найдите радиус вписанной окружности.



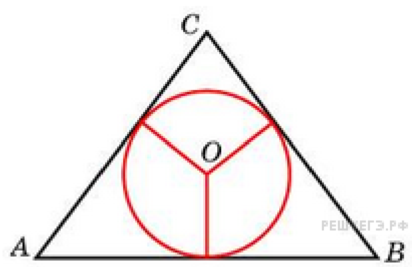
Пояснение.

$$r=\frac{AC+BC-AB}{2}=\frac{AC+BC-\sqrt{AC^2+BC^2}}{2}=\frac{7-\sqrt{25}}{2}=1.$$

Ответ: 1.

8.

Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 5, основание равно 6. Найдите радиус вписанной окружности.



Пояснение.

Имеем: $r = \dfrac{2S_{ABC}}{P_{ABC}}$. Для нахождения площади, воспользуемся формулой Герона:

$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{P_{ABC}}{2}\left(\frac{P_{ABC}}{2} - AB\right)\left(\frac{P_{ABC}}{2} - BC\right)\left(\frac{P_{ABC}}{2} - AC\right)} =$$

$= \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{16 \cdot 9} = 12.$

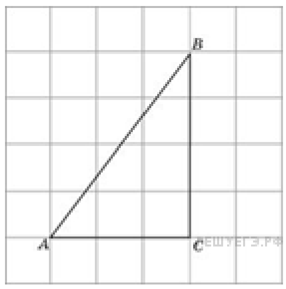
тогда

$$r = \frac{2 \cdot 12}{16} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

9.

Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, считая стороны квадратных клеток равными 1.



Пояснение.

Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник равен полуразности суммы катетов и гипотенузы. Заметим, что в треугольнике с катетами 3 и 4 гипотенуза равна 5, откуда

$$r = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{3 + 4 - 5}{2} = 1.$$

Ответ: 1.