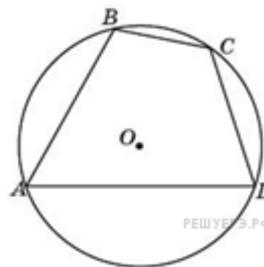


## Окружность, описанная вокруг четырехугольника

1.

Угол  $A$  четырехугольника  $ABCD$ , вписанного в окружность, равен  $58^\circ$ .  
Найдите угол  $C$  этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.



**Пояснение.**

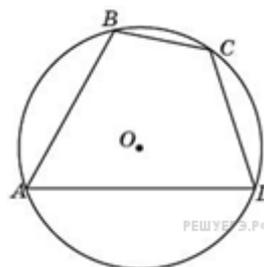
Сумма противоположных углов четырехугольника, вписанного в окружность, равна  $180^\circ$ .

$$\angle C = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 58^\circ = 122^\circ.$$

Ответ: 122.

2.

Стороны четырехугольника  $ABCD$   $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $AD$  стягивают дуги описанной окружности, градусные величины которых равны соответственно  $95^\circ$ ,  $49^\circ$ ,  $71^\circ$ ,  $145^\circ$ . Найдите угол  $B$  этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.



**Пояснение.**

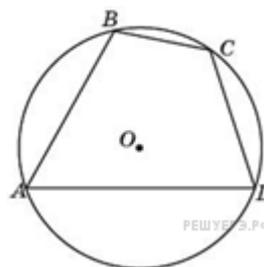
вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, значит

$$\angle B = \frac{1}{2} \cup ADC = \frac{1}{2} (145^\circ + 71^\circ) = 108^\circ.$$

Ответ: 108.

3.

Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , расположенные на окружности, делят эту окружность на четыре дуги  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $AD$ , градусные величины которых относятся соответственно как  $4 : 2 : 3 : 6$ . Найдите угол  $A$  четырехугольника  $ABCD$ . Ответ дайте в градусах.



**Пояснение.**

пусть дуга  $AB$  равна  $4x$ , тогда

$$4x + 2x + 3x + 6x = 360^\circ \Leftrightarrow x = 24^\circ.$$

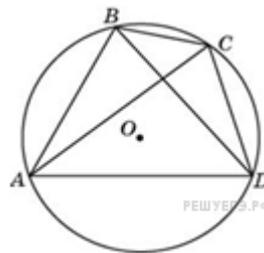
Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, значит,

$$\angle A = \frac{1}{2} (\cup BC + \cup CD) = \frac{1}{2} (2x + 3x) = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ.$$

Ответ: 60.

4.

Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Угол  $ABC$  равен  $105^\circ$ , угол  $CAD$  равен  $35^\circ$ . Найдите угол  $ABD$ . Ответ дайте в градусах.



**Пояснение.**

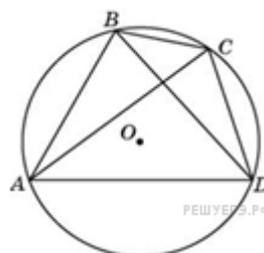
Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, значит

$$\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD = \frac{1}{2} (\cup ADC - \cup CD) = \frac{1}{2} (2\angle ABC - 2\angle CAD) = 70^\circ.$$

Ответ: 70.

**5.**

Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Угол  $ABD$  равен  $75^\circ$ , угол  $CAD$  равен  $35^\circ$ . Найдите угол  $ABC$ . Ответ дайте в градусах.



**Пояснение.**

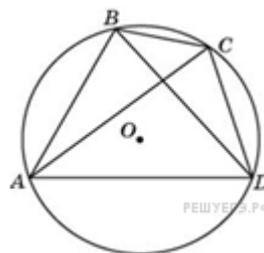
вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, значит

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup ADC = \frac{1}{2} (\cup AD + \cup CD) = \angle ABD + \angle CAD = 110^\circ.$$

Ответ: 110.

**6.**

Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Угол  $ABC$  равен  $110^\circ$ , угол  $ABD$  равен  $70^\circ$ . Найдите угол  $CAD$ . Ответ дайте в градусах.



**Пояснение.**

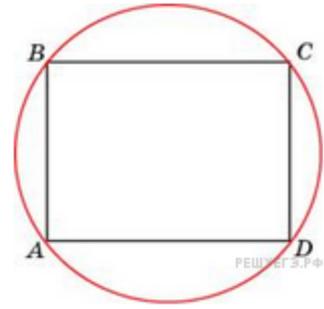
вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, значит

$$\angle CAD = \frac{1}{2} \cup CD = \frac{1}{2} (\cup ADC - \cup AD) = \angle ABC - \angle ABD = 40^\circ.$$

Ответ: 40.

**7.**

Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника, две стороны которого равны 3 и 4.



**Пояснение.**

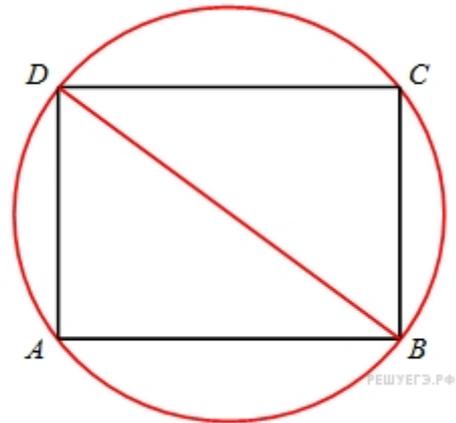
угол  $A$  является прямым, он опирается на диагональ  $BD$ , которая является диаметром

$$R = \frac{D}{2} = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AD^2}}{2} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Ответ: 2,5.

**8.**

Найдите диагональ прямоугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 5.



**Пояснение.**

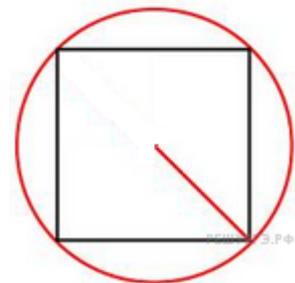
угол  $A$  является прямым, он опирается на диагональ  $BD$ , которая является диаметром.

$$BD = 2R = 10.$$

Ответ: 10.

**9.**

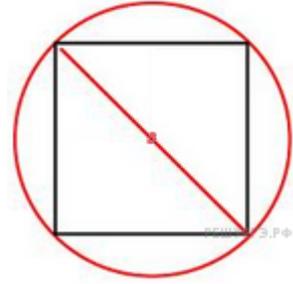
Найдите радиус окружности, описанной около квадрата со стороной, равной  $\sqrt{8}$ .



**Пояснение.**

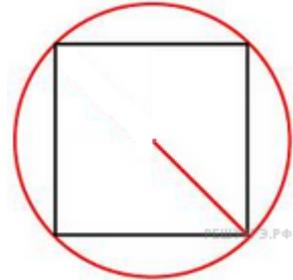
Диагональ квадрата равна  $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = 4$ . Она является диаметром круга, поэтому его радиус равен 2.

Ответ: 2.



10.

Найдите сторону квадрата, вписанного в окружность радиуса  $\sqrt{8}$ .

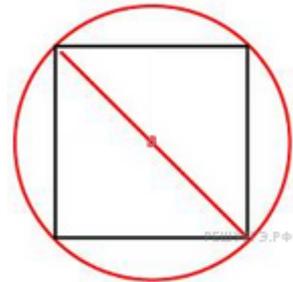


**Пояснение.**

угол  $A$  является прямым, он опирается на диагональ  $BD$ , которая является диаметром.

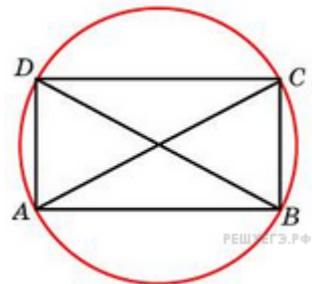
$$AB = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{D}{\sqrt{2}} = \frac{2R}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4.$$

Ответ: 4.



11.

Меньшая сторона прямоугольника равна 6. Угол между диагоналями равен  $60^\circ$ . Найдите радиус описанной окружности этого прямоугольника.



**Пояснение.**

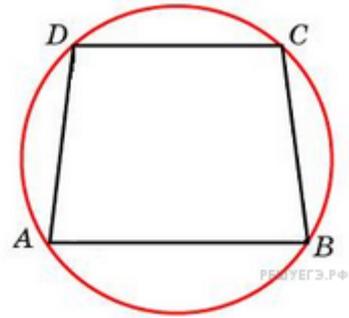
рассмотрим треугольник  $AOD$ . Он равнобедренный, т.к.  $AO = OD = R$ ;  $\angle A = \angle D = 60^\circ$ , значит, треугольник  $AOD$  – равносторонний, тогда

$$R = AO = AD = 6.$$

Ответ: 6.

12.

Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 6. Радиус описанной окружности равен 5. Найдите высоту трапеции.



**Пояснение.**

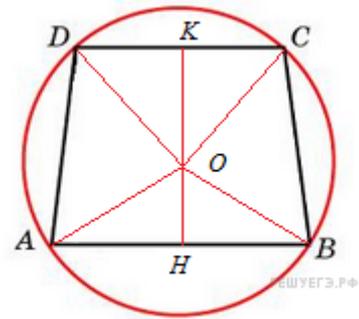
высота трапеции  $KH = KO + OH$ ,  $KO$  и  $OH$  – высоты равнобедренных треугольников  $DOC$  и  $AOB$ . По теореме Пифагора:

$$KO = \sqrt{OC^2 - KC^2} = \sqrt{R^2 - \frac{DC^2}{4}} = \sqrt{25 - 9} = 4,$$

$$OH = \sqrt{OB^2 - HB^2} = \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{25 - 16} = 3.$$

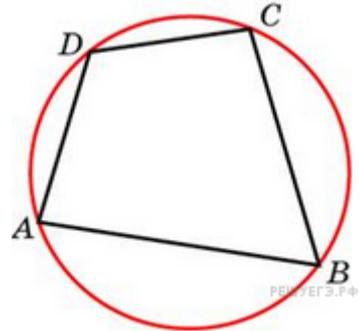
Тогда  $KH = KO + OH = 7$ .

Ответ: 7.



**13.**

Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны  $82^\circ$  и  $58^\circ$ . Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.



**Пояснение.**

сумма углов  $A$  и  $C$  равна  $180^\circ$ , также  $\angle B + \angle D = 180^\circ$ . Если  $\angle A = 82^\circ$ , то  $\angle C = 98^\circ$ , если  $\angle B = 58^\circ$ , то  $\angle D = 122^\circ$ .

Ответ: 122.

**14.**

Углы  $A$ ,  $B$  и  $C$  четырехугольника  $ABCD$  относятся как  $1 : 2 : 3$ . Найдите угол  $D$ , если около данного четырехугольника можно описать окружность. Ответ дайте в градусах.

**Пояснение.**

так как вокруг четырехугольника можно описать окружность, то сумма его противоположных углов равна  $180^\circ$ .

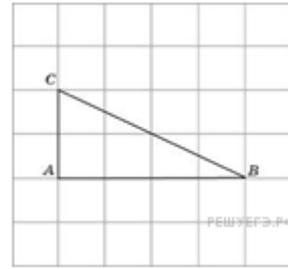
$$\angle A + \angle C = \angle A + 3\angle A = 180^\circ \Leftrightarrow \angle A = 45^\circ, \angle B = 90^\circ.$$

$$\angle D = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Ответ: 90.

**15.**

Найдите радиус  $R$  окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , если стороны квадратных клеток равны 1. В ответе укажите  $R\sqrt{5}$ .



**Пояснение.**

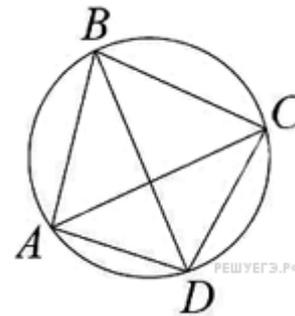
треугольник прямоугольный, значит, радиус описанной вокруг него окружности равен половине гипотенузы.

$$R = \frac{CB}{2} = \frac{\sqrt{16+4}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}.$$

Ответ: 5.

**16.**

Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Угол  $ABC$  равен  $70^\circ$ , угол  $CAD$  равен  $49^\circ$ . Найдите угол  $ABD$ . Ответ дайте в градусах.



**Пояснение.**

Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, поэтому:

$$\widehat{ABD} = 0,5 \cup AD = 0,5(\cup ADC - \cup CD) = 0,5 \cdot (2\widehat{ABC} - 2\widehat{CAD}) = 21^\circ.$$

Ответ: 21.