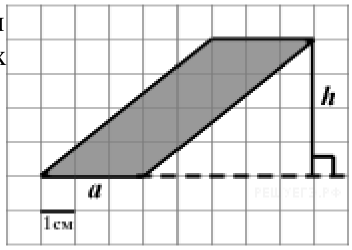
Параллелограмм: длины и площади

1.

На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображен параллелограмм (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



Пояснение.

Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, проведенную к этому основанию или его продолжению. Поэтому

$$S = 4 \cdot 3 = 12 \text{ см}^2.$$

Примечание.

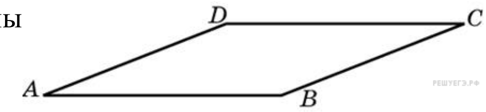
Приведем другое решение. Площадь параллелограмма равна разности площади прямоугольника и двух равных прямоугольных треугольников, гипотенузы которых являются сторонами параллелограмма. Поэтому

$$S = 8 \cdot 4 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 12 \text{ см}^2.$$

Ответ: 12.

2.

Найдите площадь параллелограмма, если две его стороны равны 8 и 10, а угол между ними равен 30°.



Пояснение.

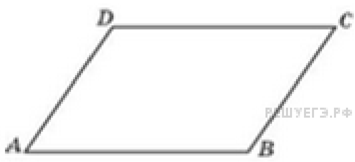
Площадь параллелограмма равна произведению его сторон на синус угла между ними. Поэтому

$$S = 8 \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ = 8 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 40 \text{ см}^2.$$

Ответ: 40.

3.

Периметр параллелограмма равен 46. Одна сторона параллелограмма на 3 больше другой. Найдите меньшую сторону параллелограмма.



Пояснение.

противоположные стороны параллелограмма попарно равны, значит

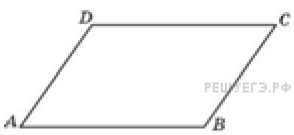
$$P = 2(AD + AB) = 2(AD + AD + 3) = 4AD + 6.$$

Зная, что периметр параллелограмма равен 46, находим $AD = 10$.

Ответ: 10.

4.

Две стороны параллелограмма относятся как $3:4$, а периметр его равен 70. Найдите большую сторону параллелограмма.



Пояснение.

Противоположные стороны параллелограмма попарно равны, значит,

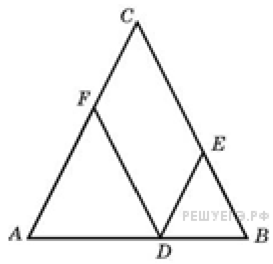
$$P = 2(AD + AB) = 2\left(\frac{3}{4}AB + AB\right) = 3,5AB.$$

Зная, что периметр параллелограмма равен 70, находим: $AB = 20$.

Ответ: 20.

5.

Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10. Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося параллелограмма.



Пояснение.

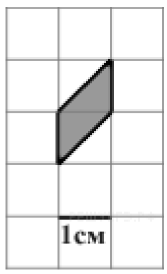
так как прямые, проведенные из основания треугольника ABC параллельны его сторонам, то углы в треугольниках AFD и BDE равны углам треугольника ABC. Треугольники подобны, соответственно, они равнобедренные. Противоположные стороны параллелограмма $FCED$ попарно равны, значит

$$P_{FCED} = 2(FD + DE) = 2(AF + FC) = 20.$$

Ответ: 20.

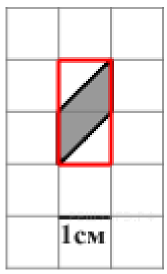
6.

Найдите площадь параллелограмма, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



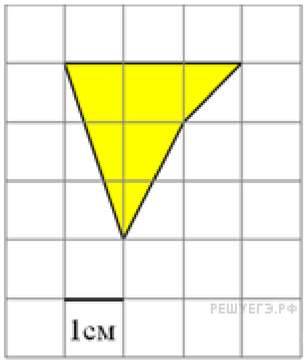
Пояснение.

Достроим четырёхугольник до прямоугольника площади 2 как показано на рисунке. Площади белых и серых частей прямоугольника равны, поэтому искомая площадь серого четырёхугольника равна 1 см^2.

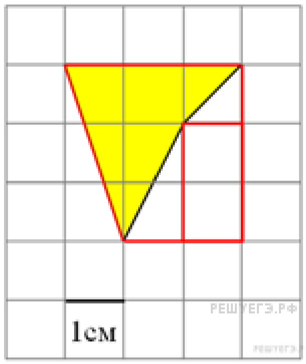


7.

Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Пояснение.
Площадь четырёхугольника равна разности площади трапеции, маленького прямоугольника и двух прямоугольных треугольников, гипотенузы которых являются сторонами исходного четырёхугольника. Поэтому



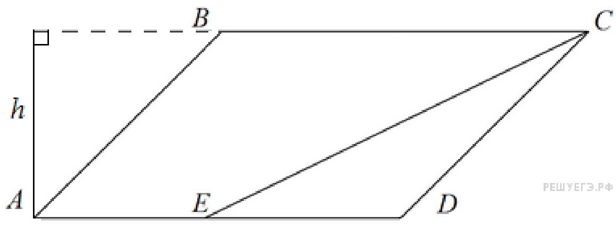
$$S = \frac{1}{2} \cdot (3+2) \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 4 \text{ см}^2.$$

Примечание.
Данный четырёхугольник можно разбить на прямоугольный треугольник, с катетами 1 и 3, прямоугольную трапеию с основаниями 3 и 1 и прямоугольный треугольник с катетами 1 и 1. Поэтому его площадь равна 4.

8.

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 189. Точка E — середина стороны AD. Найдите площадь трапеции $ABCE$.

Пояснение.
Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту:



$$S_{\text{п}} = AD \cdot h.$$

Площадь трапеции равна полусумме оснований, умноженной на высоту. Выразим площадь трапеции через площадь параллелограмма:

$$S_{ABCE} = \frac{1}{2}(AE+BC) \cdot h = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AD + AD\right) h = \frac{3}{4}AD \cdot h = \frac{3}{4}S_{ABCD} = \frac{3}{4} \cdot 189 = 141,75$$
.

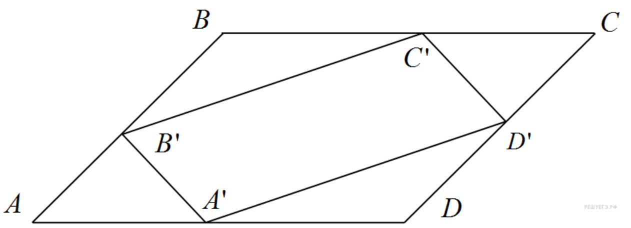
Ответ: 141,75.

9.

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 153. Найдите площадь параллелограмма $A'B'C'D'$, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.

Пояснение.

Четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон произвольного четырехугольника, является параллелограммом, площадь которого равна половине площади исходного четырехугольника (см. параллелограмм Вариньона).



Поэтому его площадь равна 76,5.

Ответ: 76,5.

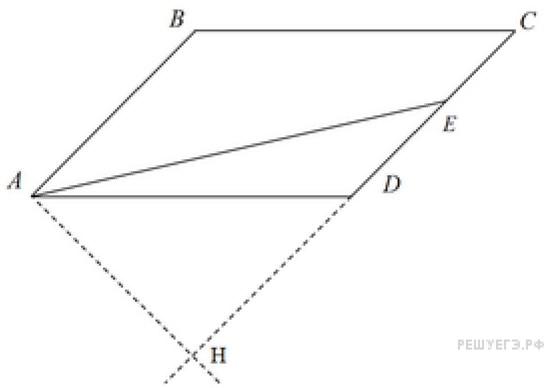
10.

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 176. Точка E – середина стороны CD. Найдите площадь треугольника ADE.

Пояснение.

Пусть AH − перпендикуляр, опущенный из точки A на продолжение стороны CD. Выразим площадь треугольника ADE через площадь параллелограмма $ABCD$:

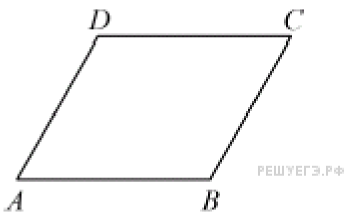
$$S_{ADE} = \frac{1}{2}AH \cdot DE = \frac{1}{2}AH \cdot \frac{1}{2}DC =$$
$$= \frac{1}{4}AH \cdot DC = \frac{1}{4}S_{ABCD} = \frac{1}{4} \cdot 176 = 44.$$



Ответ: 44.

11.

Периметр параллелограмма равен 70. Меньшая сторона равна 16. Найдите большую сторону параллелограмма.



Пояснение.

Периметр параллелограмма равен сумме длин его сторон. Длины противоположных сторон параллелограмма равны, следовательно сумма длин двух меньших его сторон равна 32, а сумма больших равна 70 — 32 = 38. Поэтому длина больших сторон параллелограмма равна 19.

12.

Площадь треугольника ABC равна 12. DE — средняя линия этого треугольника, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABDE$.

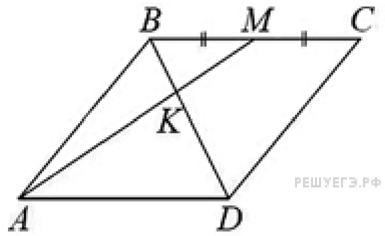
Пояснение.

Средняя линия отсекает треугольник, подобный исходному с коэффициентом 0,5. Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, поэтому площадь отсеченного треугольника вчетверо меньше: она равна 3. Тогда искомая площадь трапеции равна 12 − 3 = 9.

Ответ: 9.

13.

В параллелограмме $ABCD$ отмечена точка M — середина стороны BC. Отрезки BD и AM пересекаются в точке K. Найдите BK, если $BD = 12$.



Пояснение.

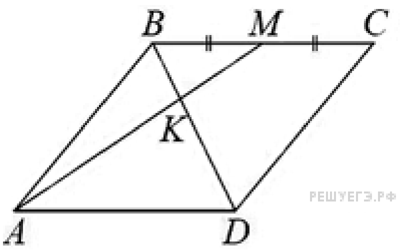
Обозначим O точку пересечения диагоналей параллелограмма. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, поэтому BO — медиана треугольника ABC. Отрезок AMтакже является медианой треугольника ABC, точкой пересечнния медианы делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины. Поэтому

$$BK = \frac{2}{3}BO = \frac{2}{3} \cdot \frac{BD}{2} = \frac{1}{3}BD = 4.$$

Ответ: 4.

14.

В параллелограмме $ABCD$ отмечена точка M — середина стороны BC. Отрезки BD и AM пересекаются в точке K. Найдите BK, если $BD = 12$.



Пояснение.

Рассмотрим треугольники AKD и BKM, углы AKD и BKM равны, как вертикальные, углы AKD и BKM равны, как накрест лежащие при параллельных прямых, следовательно, эти треугольники подобны. Откуда $\frac{BK}{KD} = \frac{BM}{AD} = \frac{1}{2}$, значит, $BK = \frac{1}{3}BD = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4.$

Ответ: 4.