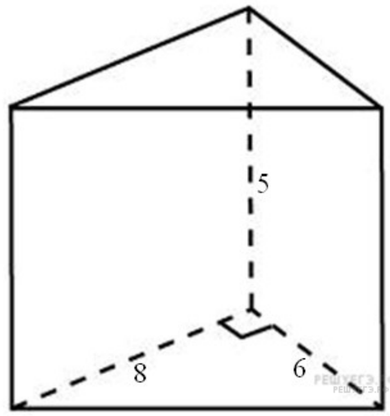
Призма

1.

Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, боковое ребро равно 5. Найдите объем призмы.



Пояснение.

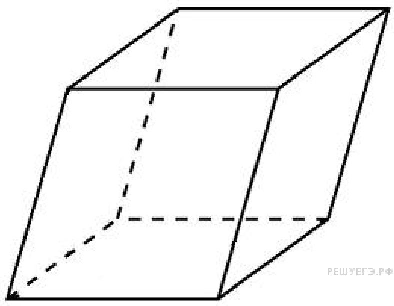
Объем прямой призмы равен $V = Sh$ где S – площадь основания, а h – боковое ребро. Тогда объем равен

$$V = \frac{1}{2} 6 \cdot 8 \cdot 5 = 120.$$

Ответ: 120.

2.

Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 и острым углом 60°. Одно из ребер параллелепипеда составляет с этой гранью угол в 60° и равно 2. Найдите объем параллелепипеда.



Пояснение.

Объем параллелепипеда $V = Sh = SL\sin\alpha$, где S – площадь одной из граней, а L – длина ребра, составляющего с этой гранью угол α. Площадь ромба с острым углом в 60° равна двум площадям равностороннего треугольника. Вычислим объем:

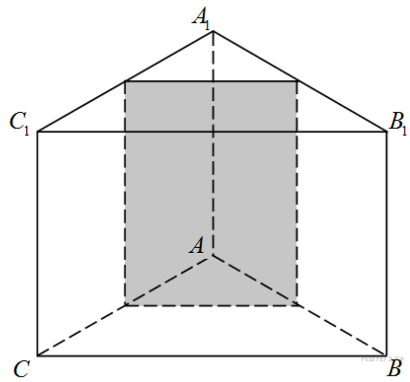
$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: 1,5.

3.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 2, боковые рёбра равны 5. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC, A_1B_1 и A_1C_1.

Пояснение.
Противоположные стороны сечения являются соответственно средними треугольников, лежащих в основании, и прямоугольников, являющихся боковыми гранями призмы. Тем самым, сечение представляет собой прямоугольник со сторонами 1 и 5, площадь которого равна 5.

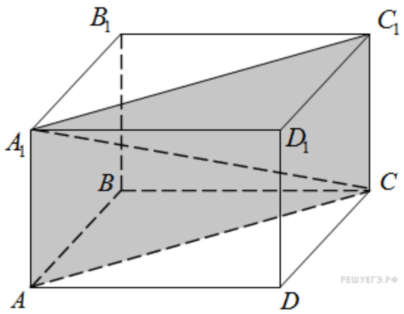


Ответ: 5.

4.

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро AA_1 равно 15, а диагональ BD_1 равна 17. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки A, A_1 и C.

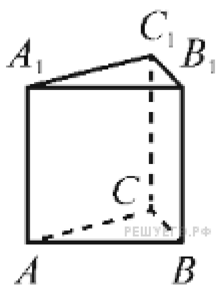
Пояснение.
Диагональное сечение прямой призмы — прямоугольник AA_1C_1C. Диагонали правильной четырёхугольной призмы равны: $BD_1 = A_1C$. По теореме Пифагора получаем: $AC = \sqrt{A_1C^2 - AA_1{}^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$. Тем самым, для искомой площади сечения имеем $S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot AC = 120.$



Ответ: 120.

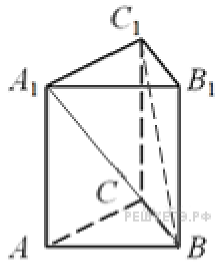
5.

Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки B, A_1, B_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 9, а боковое ребро равно 8.



Пояснение.
Требуется найти объём пирамиды, основание и высота которой совпадают с основанием и высотой данной треугольной призмы. Поэтому

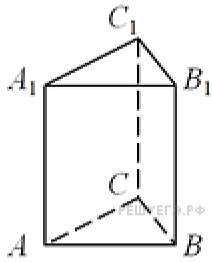
$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{пир}} h_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{пр}} h_{\text{пр}} = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 8 = 24.$$



Ответ: 24.

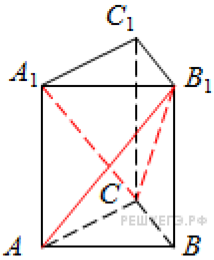
6.

Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, A_1, B_1, C правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 2.



Пояснение.

Многогранник, объём которого необходимо найти, является треугольной пирамидой. Из рисунка видно, что его объём равен объёму треугольной призмы, уменьшенному на сумму объёмов двух треугольных пирамид: AB_1BC и $A_1B_1C_1C$. Поскольку призма правильная, объёмы этих пирамид равны. Объём пирамиды равен одной третьей от произведения площади основания на высоту, следовательно, для объём искомого многогранника имеем:

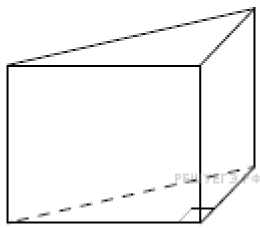


$$V_{\text{многогр}} = V_{\text{призм}} - 2V_{\text{призм}} = 2 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2 = 6 - 4 = 2.$$

Ответ: 2.

7.

В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 2, а гипотенуза равна $\sqrt{53}$. Найдите объём призмы, если её высота равна 3.



Пояснение.

Пусть второй катет — b с помощью теоремы Пифагора найдём его:

$$b = \sqrt{(\sqrt{53})^2 - 2^2} = \sqrt{53 - 4} = \sqrt{49} = 7.$$

Найдём площадь основания:

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2}ab \Leftrightarrow \frac{2 \cdot 7}{2} = 7.$$

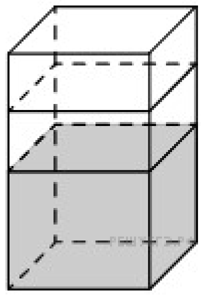
Найдём объём призмы:

$$V_{\text{пр.}} = S_{\text{осн}} \cdot h \Leftrightarrow V_{\text{пр.}} = 7 \cdot 3 = 21.$$

Ответ: 21.

8.

В бак, имеющий форму прямой призмы, налито 5 л воды. После полного погружения в воду детали уровень воды в баке поднялся в 1,4 раза. Найдите объём детали. Ответ дайте в кубических сантиметрах, зная, что в одном литре 1000 кубических сантиметров.



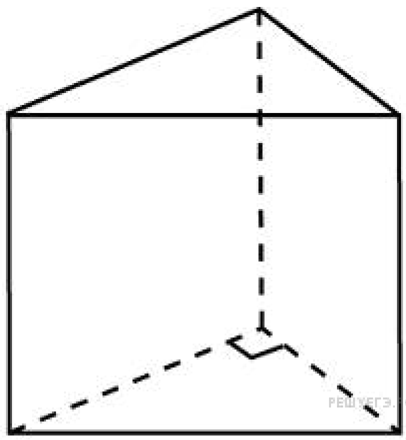
Пояснение.

Найдем объём воды в баке после погружения детали (уровень воды прямопропорционален объему): $V_2 = 1{,}4 \cdot V_1 = 1{,}4 \cdot 5 = 7$ л. Таким образом, при погружении детали в бак объём воды увеличился на $V_2 - V_1 = 7 - 5 = 2$ л, что и является объёмом детали. В кубических сантиметрах — $2 \cdot 1000 = 2000\,\text{см}^3$

Ответ: 2000.

9.

Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 5. Объем призмы равен 30. Найдите ее боковое ребро.



Пояснение.

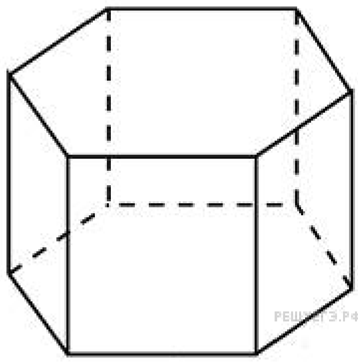
Объем прямой призмы равен $V = Sh$ где S – площадь основания, а h – боковое ребро. Тогда длина ее бокового ребра равна

$$h = \frac{V}{S} = \frac{30}{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5} = 4.$$

Ответ: 4.

10.

Найдите объем правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны $\sqrt{3}$.



Пояснение.

Объем прямой призмы равен $V=Sh$, где S — площадь основания, а h — боковое ребро. Площадь правильного шестиугольника со стороной a, лежащего в основании, задается формулой

$$S=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot 1^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

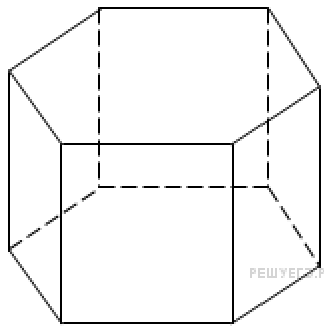
Тогда объем призмы равен

$$V=Sh=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}=4,5.$$

Ответ: 4,5.

11.

Найдите объем правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны $\sqrt{3}$.



Пояснение.

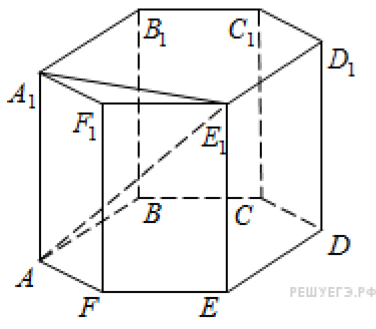
Объем призмы равен произведению площади основания на высоту. Высотой правильной призмы является ее боковое ребро. Основание призмы — правильный шестиугольник. Площадь правильного шестиугольника со стороной a вычисляется по формуле $S=1,5\sqrt{3}a^2$. Следовательно,

$$V=S_{\text{осн}}H=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\cdot\sqrt{3}=\frac{9}{2}a^2=\frac{27}{2}=13,5.$$

Ответ: 13,5.

12.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние между точками A и E_1.



Пояснение.
рассмотрим прямоугольный треугольник AA_1E_1. По теореме Пифагора

$$AE_1 = \sqrt{AA_1{}^2 + A_1E_1{}^2}.$$

Угол между сторонами правильного шестиугольника равен 120°. По теореме косинусов

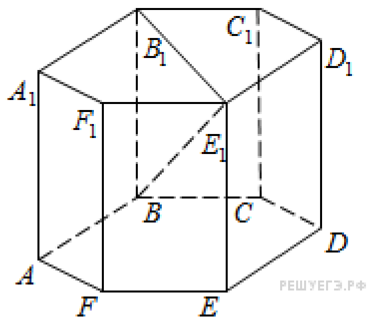
$$A_1E_1 = \sqrt{A_1F_1{}^2 + F_1E_1{}^2 - 2A_1F_1 \cdot F_1E_1 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{3}.$$

Значит, $AE_1 = \sqrt{1+3} = 2.$

Ответ: 2.

13.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны $\sqrt{5}$. Найдите расстояние между точками B и E_1.



Пояснение.
рассмотрим прямоугольный треугольник BB_1E_1. По теореме Пифагора:

$$BE_1 = \sqrt{BB_1{}^2 + B_1E_1{}^2}.$$

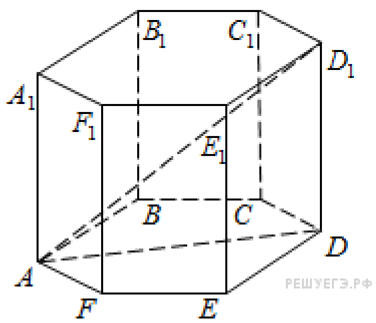
B_1E_1 — большая диагональ правильного шестиугольника, ее длина равна его удвоенной стороне. Поэтому $B_1E_1 = 2\sqrt{5}$. Поскольку $BB_1 = \sqrt{5}$ имеем:

$$BE_1 = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{5 + 4 \cdot 5} = \sqrt{25} = 5$$

Ответ: 5.

14.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите тангенс угла AD_1D.



Пояснение.

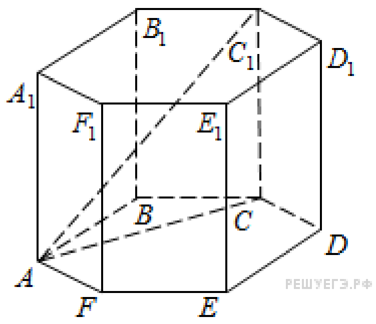
Рассмотрим прямоугольный треугольник ADD_1, катет которого является большей диагональю основания. Длина большей диагонали правильного шестиугольника равна его удвоенной стороне: $AD = 2$. Поскольку $DD_1 = 1$ имеем:

$$\operatorname{tg} \angle AD_1D = \frac{AD}{DD_1} = \frac{2}{1} = 2.$$

Ответ: 2.

15.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол AC_1C. Ответ дайте в градусах.



Пояснение.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ACC_1:

$$\operatorname{tg}\angle AC_1C = \frac{AC}{CC_1} = AC.$$

Осталось найти диагональ основания. В правильном шестиугольнике углы между сторонами равны 120°, тогда по теореме косинусов для треугольника ABC имеем:

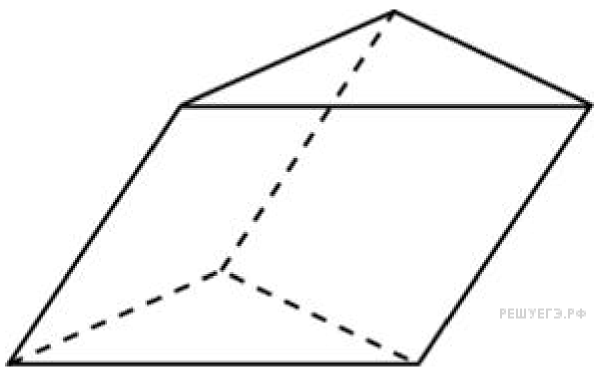
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{3}.$$

Так как $\angle AC_1C$ — острый, он равен 60°.

Ответ: 60.

16.

В треугольной призме две боковые грани перпендикулярны. Их общее ребро равно 10 и отстоит от других боковых ребер на 6 и 8. Найдите площадь боковой поверхности этой призмы.



Пояснение.

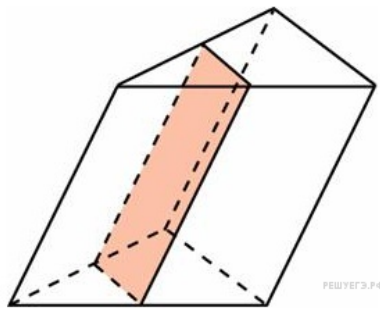
Для вычисления боковой поверхности призмы воспользуемся формулой , где l – длина бокового ребра, а $P_\perp$ – периметр перпендикулярного сечения призмы:

$$S_{\text{бок}} = l \cdot P_\perp = 10 \cdot (10 + 6 + 8) = 240.$$

Ответ: 240.

17.

Через среднюю линию основания треугольной призмы, площадь боковой поверхности которой равна 24, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы.



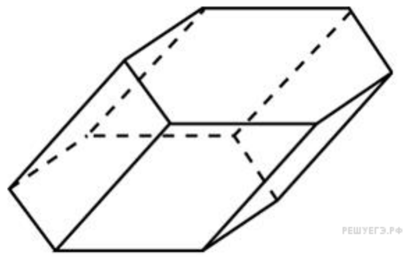
Пояснение.

Площадь боковых граней отсеченной призмы вдвое меньше соответствующих площадей боковых граней исходной призмы. Поэтому площадь боковой поверхности отсеченной призмы вдвое меньше площади боковой поверхности исходной.

Ответ: 12.

18.

Найдите объем призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 2, а боковые ребра равны $2\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 30°.



Пояснение.

Объем призмы $V = Sh = SL\sin\alpha$, где S – площадь основания, а L – длина ребра, составляющего с основанием угол α. Площадь правильного шестиугольника со стороной a равна

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$

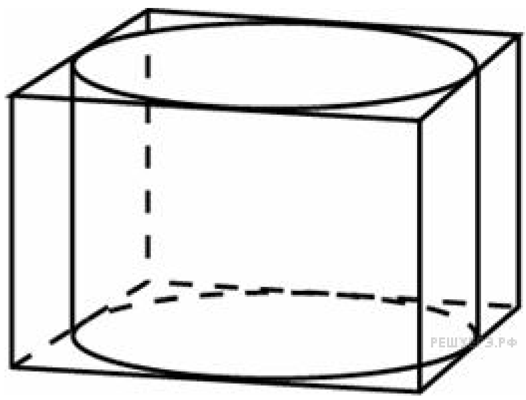
Тогда объем призмы

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 18.$$

Ответ: 18.

19.

Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите площадь боковой поверхности призмы.



Пояснение.

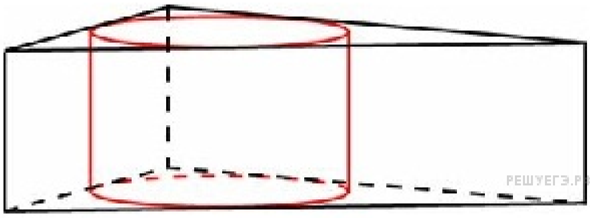
Высота призмы равна высоте цилиндра, а сторона ее основания равна диаметру цилиндра. Тогда площадь боковой поверхности

$$S = 4(2rH) = 4(2 \cdot 1 \cdot 1) = 8.$$

Ответ: 8.

20.

Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 2.



Пояснение.

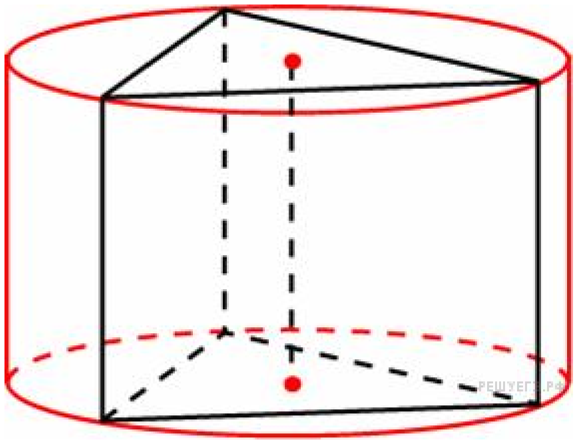
Сторона правильного треугольника a выражается через радиус r вписанной в него окружности как $a = 2\sqrt{3}r$. Тогда площадь боковой поверхности призмы выражается формулой

$$S = 3Ha = 6\sqrt{3}Hr = 6 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot 6 = 36.$$

Ответ: 36.

21.

Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания которого равен $2\sqrt{3}$, а высота равна 2.



Пояснение.

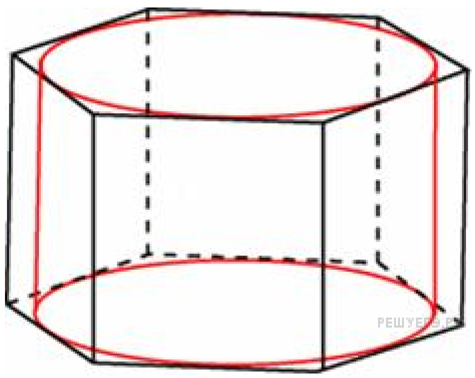
Сторона правильного треугольника выражается через радиус описанной окружности как $a = \sqrt{3}r = 2\sqrt{3}\sqrt{3} = 6.$. Площадь боковой поверхности призмы тогда равна

$$S_{\text{бок}} = Ph = 3ah = 3 \cdot 6 \cdot 2 = 36.$$

Ответ: 36.

22.

Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 2.



Пояснение.

Сторона правильного шестиугольника a выражается через радиус r вписанной в него окружности как $a=\frac{2}{\sqrt{3}}r$. Тогда площадь боковой поверхности призмы выражается формулой

$$S=6Ha=\frac{12}{\sqrt{3}}Hr=12\cdot 2=24.$$

Ответ: 24.