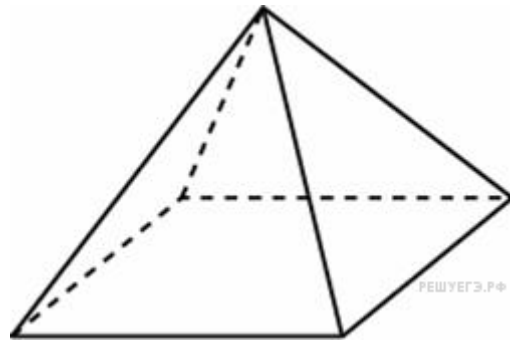


Пирамида

1.

Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.



Пояснение.

Площадь пирамиды равна

$$S = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = 4S_{\Delta} + a^2.$$

Площадь боковой стороны пирамиды $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ha$. Высоту треугольника h найдем по теореме

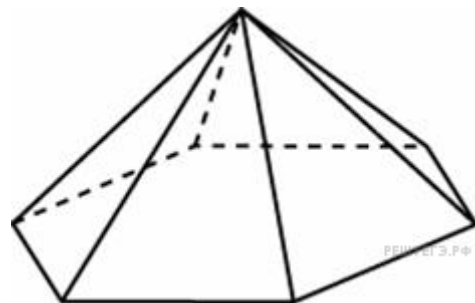
Пифагора: $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. Тогда площадь поверхности пирамиды

$$S = 4 \left(\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 \right) + 10^2 = 340.$$

Ответ: 340.

2.

Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.



Пояснение.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему. Апофему найдем по теореме Пифагора как катет прямоугольного треугольника, гипотенуза которого — боковое ребро, а другой катет — половина стороны основания:

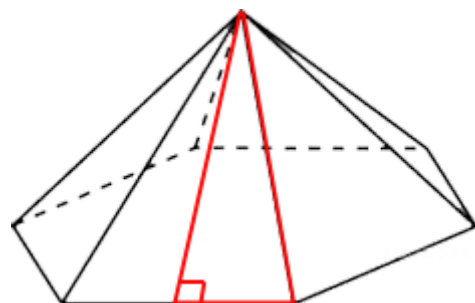
$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. Тогда площадь боковой поверхности

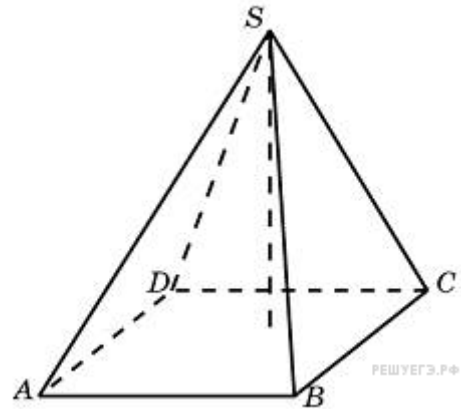
$$S = \frac{1}{2}Ph = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot 12 = 360.$$

Ответ: 360.

3.

Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 3 и 4. Ее объем равен 16. Найдите высоту этой пирамиды.





Пояснение.

Объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}Sh,$$

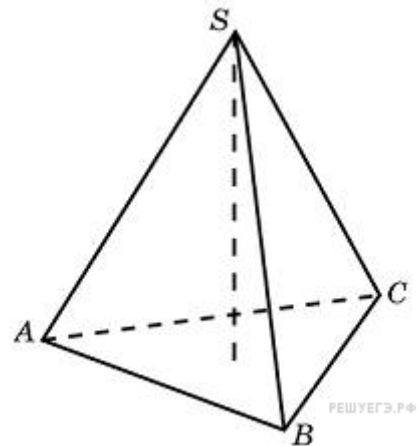
где S – площадь основания, а h – высота пирамиды. Зная площадь основания, можно найти высоту:

$$h = \frac{3V}{S} = \frac{48}{12} = 4.$$

Ответ: 4.

4.

Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а высота равна $\sqrt{3}$.



Пояснение.

Объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}Sh,$$

где S – площадь основания, а h – высота пирамиды. Площадь равностороннего треугольника в основании

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

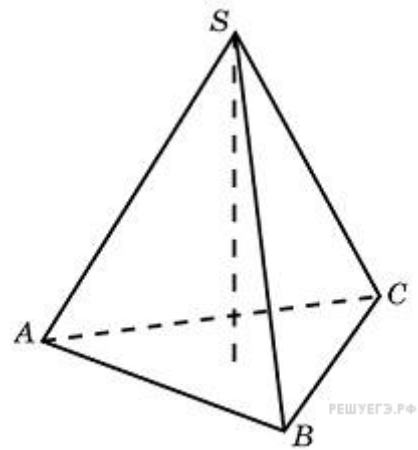
Тогда объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{3} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: 0,25.

5.

Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 2, а объем равен $\sqrt{3}$.



Пояснение.

Объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}Sh,$$

где S — площадь основания, а h — высота пирамиды. Найдем площадь равностороннего треугольника, лежащего в основании:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = \sqrt{3}.$$

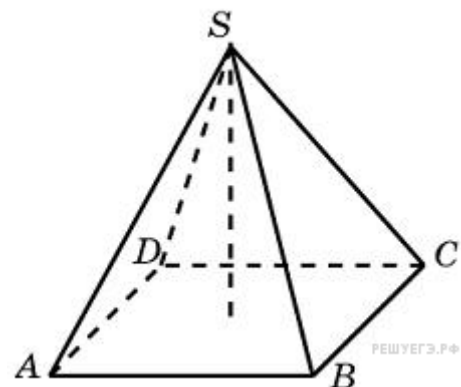
Тогда высота пирамиды равна

$$h = \frac{3V}{S} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3.$$

Ответ: 3.

6.

В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 6, боковое ребро равно 10. Найдите ее объем.

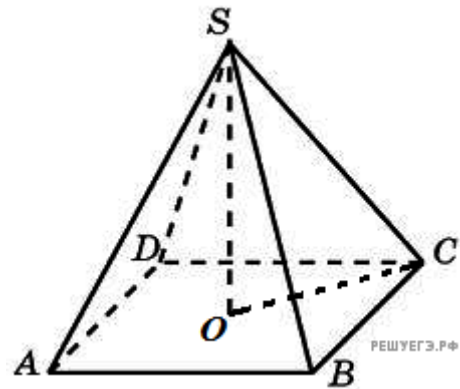


Пояснение.

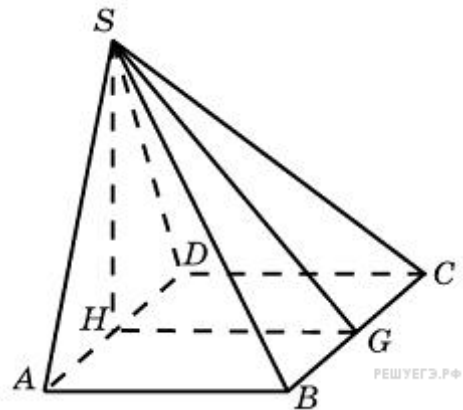
В основании правильной четырехугольной пирамиды лежит квадрат. Пусть его центр — точка O , по теореме Пифагора находим $OC = \sqrt{SC^2 - SO^2} = 8$, тогда длина диагонали основания равна 16. Площадь квадрата равна половине произведения его диагоналей, поэтому она равна 128. Следовательно, для объема пирамиды имеем:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot 128 \cdot 6 = 256.$$

Ответ: 256.

**7.**

Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° . Высота пирамиды равна 6. Найдите объем пирамиды.

**Пояснение.**

Поскольку боковые грани SAB , SDC и SBC наклонены к основанию под углом 60° , углы A и D в треугольнике ASD и угол G в треугольнике SGH равны 60° .

Поэтому треугольник ASD — равносторонний, а его сторона связана с высотой формулой

$$AD = \frac{2}{\sqrt{3}}SH, \text{ откуда } AD = 4\sqrt{3}.$$

Из прямоугольного треугольника SHG находим:

$$HG = SH \operatorname{ctg} \angle SGH = 6 \operatorname{ctg} 60^\circ = 2\sqrt{3}.$$

Поскольку $ABCD$ — прямоугольник, его площадь равна произведению сторон:

$$S_{ABCD} = AD \cdot AB = AD \cdot HG = 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 24.$$

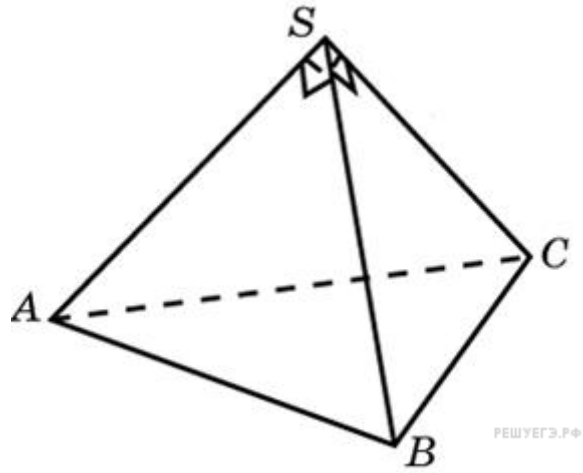
Осталось найти объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 6 = 48.$$

Ответ: 48.

8.

Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 3. Найдите объем пирамиды.



Пояснение.

Удобно считать треугольник ASB основанием пирамиды, тогда отрезок SC будет являться её высотой. Заметим, что

$$S_{ASB} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2}.$$

Поскольку $SC = 3$, далее имеем:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}S_{ASB} \cdot SC = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

9.

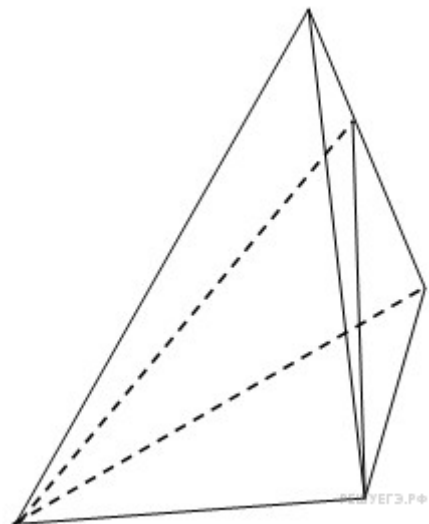
Объем треугольной пирамиды равен 15. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении $1 : 2$, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объемов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.

Пояснение.

При одинаковой площади основания большим объемом будет обладать та часть, высота которой больше, то есть нижняя.

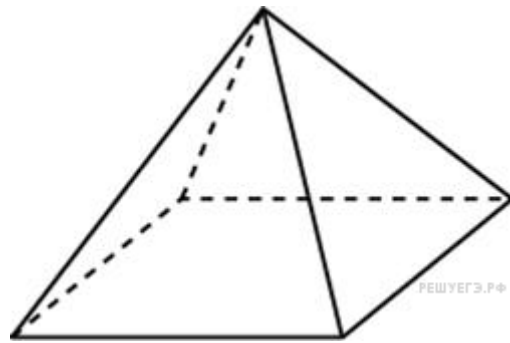
Объем данной пирамиды относится к объему исходной как $\frac{2}{3}$ и поэтому равен 10.

Ответ: 10.



10.

Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, стороны основания которой равны 6 и высота равна 4.



Пояснение.

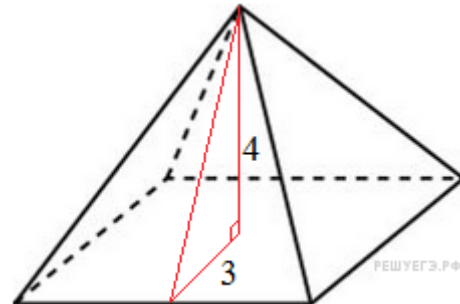
Площадь поверхности складывается из площади основания и площади четырех боковых граней:

$S = S_{\text{осн}} + 4S_{\Delta}$. Апофему найдем по теореме Пифагора:

$h = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Тогда площадь поверхности пирамиды:

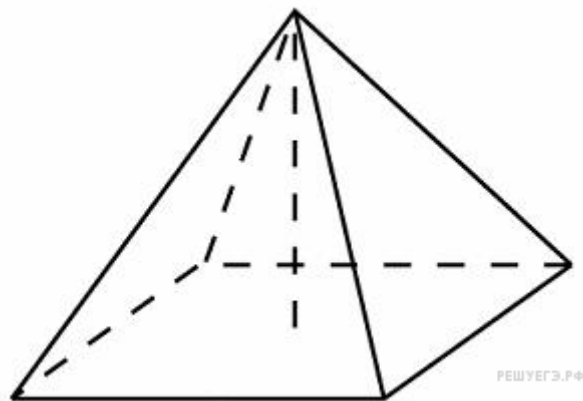
$$S = 6 \cdot 6 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 96.$$

Ответ: 96.



11.

Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6 и высота равна 4.



Пояснение.

Высоту треугольника, образующего грани пирамиды, найдем по теореме Пифагора:

$$l = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

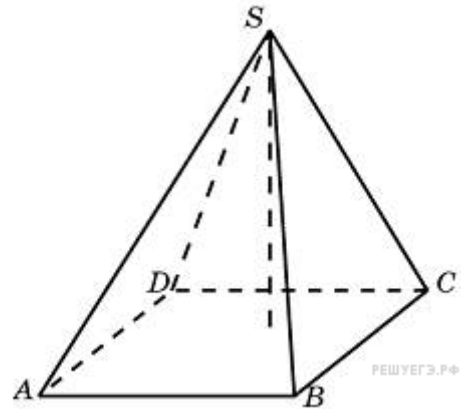
Тогда площадь боковой поверхности пирамиды:

$$S_{\text{бок}} = 4 \cdot \frac{1}{2} al = 2 \cdot 6 \cdot 5 = 60.$$

Ответ: 60.

12.

Найдите объем пирамиды, высота которой равна 6, а основание – прямоугольник со сторонами 3 и 4.



Пояснение.

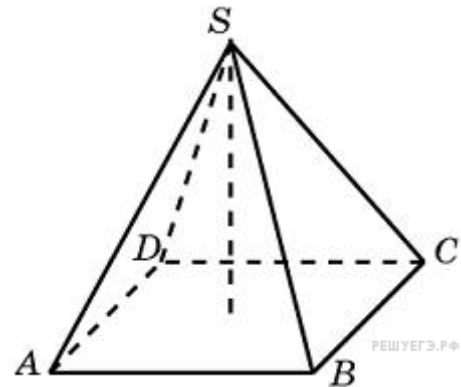
Объем пирамиды с площадью основания S и высотой h равен

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}3 \cdot 4 \cdot 6 = 24.$$

Ответ: 24.

13.

В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 12, объем равен 200. Найдите боковое ребро этой пирамиды.



Пояснение.

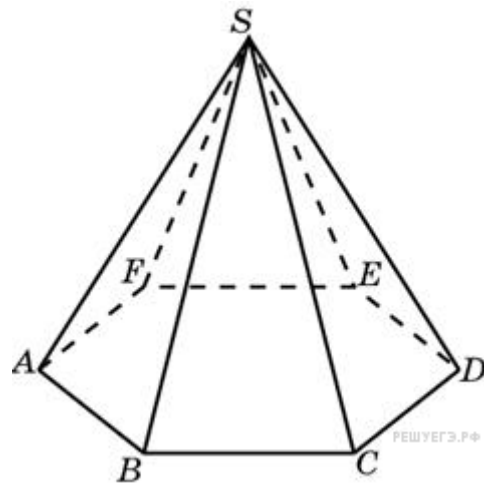
Объем пирамиды с площадью основания S и высотой h равен $V = \frac{1}{3}Sh$, откуда площадь основания $S = \frac{3V}{h} = 50$. Сторона основания тогда $a = \sqrt{S} = 5\sqrt{2}$, а диагональ $d = a\sqrt{2} = 10$. Боковое ребро найдем по теореме Пифагора:

$$l = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$

Ответ: 13.

14.

Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 2, боковое ребро равно 4. Найдите объем пирамиды.



Пояснение.

В правильном шестиугольнике сторона равна радиусу описанной окружности, поэтому найдем высоту пирамиды по теореме Пифагора: $h = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$. Площадь основания

$$S = 6\sqrt{3}\frac{a^2}{4} = 6\sqrt{3}.$$

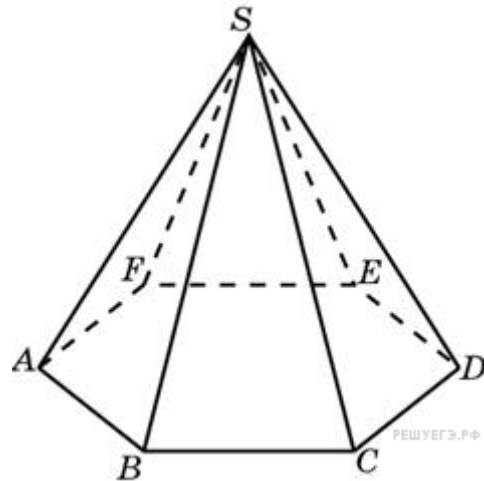
Тогда объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}2\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 12.$$

ОТВЕТ: 12.

15.

Объем правильной шестиугольной пирамиды 6. Сторона основания равна 1. Найдите боковое ребро.



Пояснение.

Площадь основания равна

$$S = 6 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} \sqrt{3}.$$

Из формулы для объема пирамиды найдем высоту:

$$V = \frac{1}{3} Sh \Rightarrow h = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot 6}{\frac{3}{2} \sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$

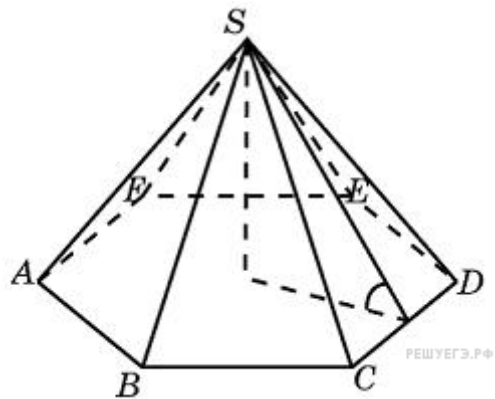
В правильном шестиугольнике сторона равна радиусу описанной окружности, поэтому найдем боковое ребро пирамиды по теореме Пифагора:

$$l = \sqrt{h^2 + a^2} = \sqrt{48 + 1} = 7.$$

Ответ: 7.

16.

Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 4, а угол между боковой гранью и основанием равен 45° . Найдите объем пирамиды.

**Пояснение.**

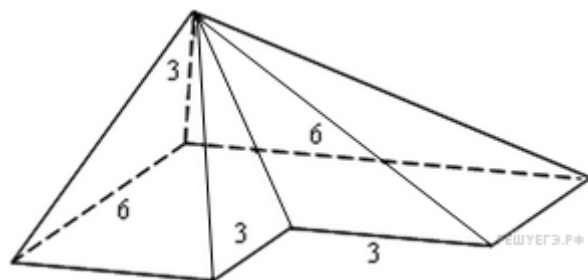
Вершина правильной пирамиды проецируется в центр ее основания. В правильном шестиугольнике со стороной a расстояние от его центра до стороны равно радиусу вписанной окружности, который равен $\frac{\sqrt{3}}{2}a = 2\sqrt{3}$. Так как угол между боковой гранью и основанием равен 45° , высота пирамиды также равна $h = 2\sqrt{3}$. Тогда имеем:

$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{3} = 48.$$

Ответ: 48.

17.

Найдите объем пирамиды, изображенной на рисунке. Ее основанием является многоугольник, соседние стороны которого перпендикулярны, а одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно 3.



Пояснение.

Площадь лежащего в основании пирамиды многоугольника является разностью площадей квадратов со сторонами 6 и 3 (см. рис.):

$$S_{\text{осн}} = 6^2 - 3^2 = 27.$$

Поскольку высота пирамиды равна 3, имеем:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h = \frac{1}{3} \cdot 27 \cdot 3 = 27.$$

Ответ: 27.

18.

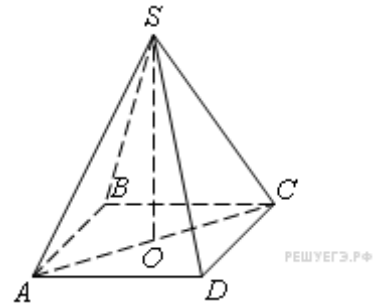
В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S вершина, $SO = 4$, $AC = 6$. Найдите боковое ребро SC .

Пояснение.

Рассмотрим треугольник SOC . Он прямоугольный, т. к. SO — высота, она перпендикулярна основанию $ABCD$, а значит, и прямой AC . Тогда по теореме Пифагора

$$SC = \sqrt{SO^2 + \frac{AC^2}{4}} = \sqrt{16 + 9} = 5.$$

Ответ: 5.



19.

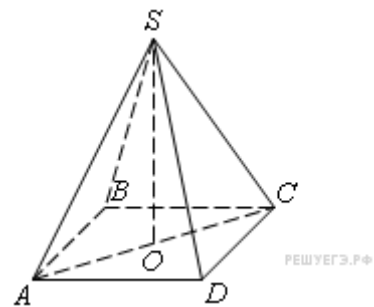
В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S вершина, $SC = 5$, $AC = 6$. Найдите длину отрезка SO .

Пояснение.

Рассмотрим треугольник SOC . Он прямоугольный, т. к. SO — высота, она перпендикулярна основанию $ABCD$, а значит и прямой AC . Тогда по теореме Пифагора

$$SO = \sqrt{SC^2 - \frac{AC^2}{4}} = \sqrt{25 - 9} = 4.$$

Ответ: 4.



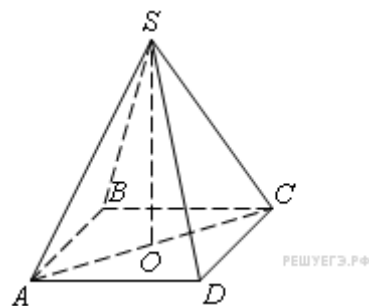
20.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S вершина, $SO = 4$, $SC = 5$. Найдите длину отрезка AC .

Пояснение.

Рассмотрим треугольник SOC . Он прямоугольный: т. к. SO — высота, она перпендикулярна основанию $ABCD$, а значит и прямой AC . Тогда по теореме Пифагора

$$AC = 2OC = 2\sqrt{SC^2 - SO^2} = 2\sqrt{25 - 16} = 6.$$



21.

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ боковое ребро SA равно 5, сторона основания равна $3\sqrt{2}$. Найдите объём пирамиды.

Пояснение.

В основании правильной четырёхугольной пирамиды лежит квадрат, вершина пирамиды проецируется в его центр. Введем обозначения, как показано на рисунке. Диагонали квадрата перпендикулярны друг другу, треугольник AOB прямоугольный и равнобедренный. В нем

$$AO = \frac{AB}{\sqrt{2}} = 3.$$

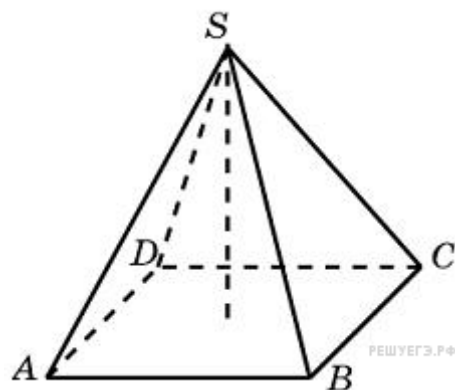
Тогда из прямоугольного треугольника SOA находим, что

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{25 - 9} = 4.$$

Откуда для объема пирамиды имеем:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h = \frac{1}{3} AB^2 \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 4 = 24.$$

Ответ: 24.



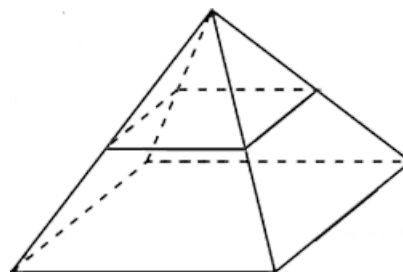
22.

В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 1. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.

Пояснение.

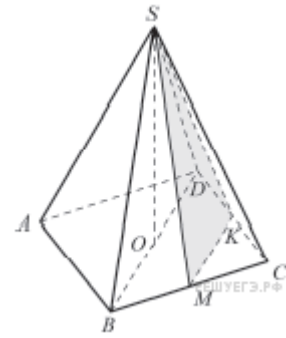
Каждая из сторон сечения является средней линией боковой грани. Поэтому стороны сечения образуют квадрат со стороной 0,5, площадь которого равна 0,25.

Ответ: 0,25.



23.

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ высота SO равна 13, диагональ основания BD равна 8. Точки K и M — середины рёбер CD и BC соответственно. Найдите тангенс угла между плоскостью SMK и плоскостью основания ABC .

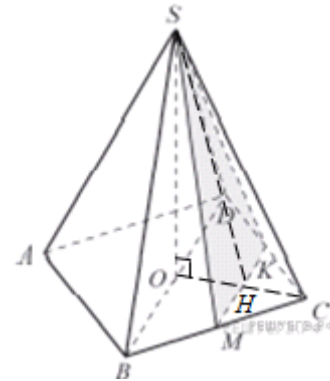


Пояснение.

Пусть $OC \cap KM = H$. Поскольку $OH = \text{пр}_{ABC} SH$ и $KM \perp OH$ по теореме о трех перпендикулярах $SH \perp KM$. Поскольку $OH \perp KM$, $SH \perp KM$ угол $\widehat{OHS}$ является линейным углом двугранного угла между плоскостями SMK и ABC . Тогда

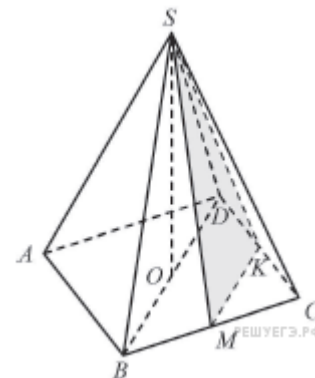
$$\operatorname{tg} \widehat{OHS} = \frac{SO}{OH} = \frac{SO}{\frac{1}{2}OC} = \frac{13}{2} = 6,5.$$

Ответ: 6,5.



24.

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ высота SO равна 13, диагональ основания BD равна 8. Точки K и M — середины ребер CD и BC соответственно. Найдите тангенс угла между плоскостью SMK и плоскостью основания ABC .

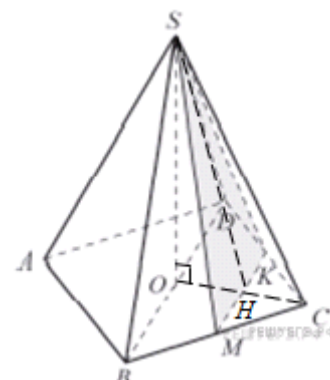


Пояснение.

Пусть $OC \cap KM = H$. Поскольку $OH = \text{пр}_{ABC} SH$ и $KM \perp OH$ по теореме о трех перпендикулярах $SH \perp KM$. Поскольку $OH \perp KM$, $SH \perp KM$ угол $\widehat{OHS}$ является линейным углом двугранного угла между плоскостями SMK и ABC . Тогда

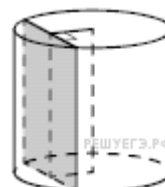
$$\operatorname{tg} \widehat{OHS} = \frac{SO}{OH} = \frac{SO}{\frac{1}{2}OC} = \frac{13}{2} = 6,5.$$

Ответ: 6,5.



25.

Радиус основания цилиндра равен 13, а его образующая равна 18. Сечение, параллельное оси цилиндра, удалено от неё на расстояние, равное 12. Найдите площадь этого сечения.



Пояснение.

Рассмотрим сечение цилиндра плоскостью, параллельной основанию. Введём обозначения как показано на рисунке. Рассмотрим прямоугольный треугольник AON , по теореме Пифагора:

$$AN = \sqrt{AO^2 - ON^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Треугольники AON и ONB — прямоугольные, ON — общая, стороны AO и OB равны как радиусы окружности, следовательно, треугольники равны по двум катетам, откуда $AN = NB = 5$. Значит, $AB = 2AN = 10$. Площадь сечения — площадь прямоугольника со сторонами 18 и 10: $S = 18 \cdot 10 = 180$.

Ответ: 180.

26.

Даны два конуса. Радиус основания и образующая первого конуса равны соответственно 3 и 9, а второго — 6 и 9. Во сколько раз площадь боковой поверхности второго конуса больше площади боковой поверхности первого?

Пояснение.

Площадь боковой поверхности конуса: $S = \pi r l$ Найдём площадь поверхности первого конуса: $S_1 = 3 \cdot 9\pi = 27\pi$.

Найдём площадь поверхности второго конуса: $S_2 = 6 \cdot 9\pi = 54\pi$.

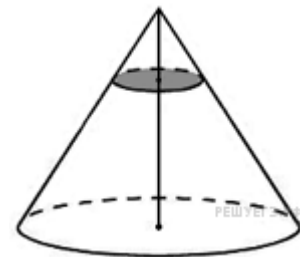
Найдём отношение площадей конусов:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{54\pi}{27\pi} = 2.$$

Ответ: 2.

27.

Объём конуса равен 135. Через точку, делящую высоту конуса в отношении 1:2, считая от вершины, проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите объём конуса, отсекаемого от данного конуса проведённой плоскостью.

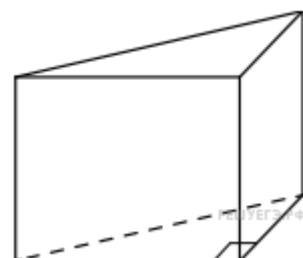
**Пояснение.**

Отношение объёмов конусов равно кубу их коэффициента подобия. Точка делит высоту в отношении 1:2, следовательно, высоты конусов относятся как 1:3, поэтому их объёмы относятся как 1:27. Следовательно, объём отсекаемого конуса равен $135 : 3^3 = 5$.

Ответ: 5.

28.

В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 3, а гипотенуза равна $\sqrt{58}$. Найдите объём призмы, если её высота равна 2.



Пояснение.

Найдём второй катет треугольника:

$$\sqrt{(\sqrt{58})^2 - 3^2} = \sqrt{58 - 9} = \sqrt{49} = 7.$$

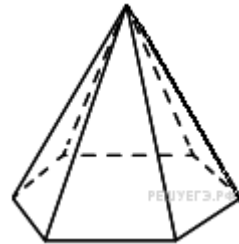
Найдём объём призмы по формуле:

$$V_{\text{призм.}} = Sh = \frac{2ab}{2} = ab = 10,5 \cdot 2 = 21.$$

Ответ: 21.

29.

Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 14, боковые рёбра равны 25. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

**Пояснение.**

Найдём апофему пирамиды:

$$a = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24.$$

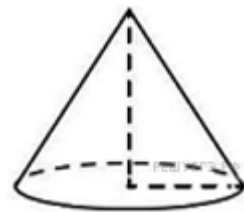
Найдём площадь боковой поверхности пирамиды:

$$S = \frac{Pa}{2} = \frac{84 \cdot 24}{2} = 1008.$$

Ответ: 1008.

30.

Объём конуса равен 50π , а его высота равна 6. Найдите радиус основания конуса.

**Пояснение.**

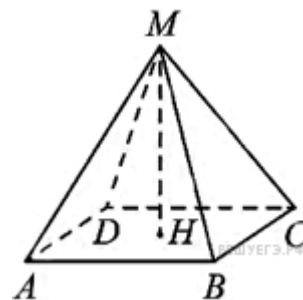
Найдём радиус основания конуса по формуле:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \Leftrightarrow 50\pi = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 6 \Leftrightarrow R = \sqrt{25}_{R>0} \Leftrightarrow R = 5.$$

Ответ: 5.

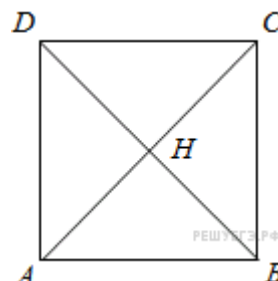
31.

Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6, а боковое ребро равно $\sqrt{34}$.



Пояснение.

Рассмотрим квадрат в основании, проведём построения как показано на рисунке. Поскольку DB — диагональ квадрата, $DB = AB\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. Диагонали квадрата делятся точкой их пересечения пополам, поэтому $BH = DB/2 = 3\sqrt{2}$. Рассмотрим треугольник BHM — он прямоугольный, по теореме Пифагора:



$$MH = \sqrt{MB^2 - BH^2} = \sqrt{34 - 18} = 4.$$

Объём пирамиды равен трети произведения высоты пирамиды на площадь основания:

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot MH = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 = 48.$$

Ответ: 48.

32.

Даны два шара с радиусами 8 и 4. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

Пояснение.

Найдём площадь поверхности первого шара: $S = 4\pi r^2 \Leftrightarrow S_1 = 4\pi \cdot 8^2 = 256\pi$.

Найдём площадь поверхности второго шара: $S_2 = 4\pi \cdot 4^2 = 64\pi$.

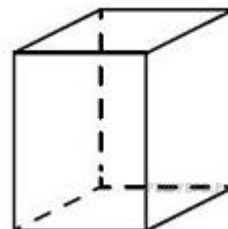
Найдём отношение площадей:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{256\pi}{64\pi} = 4.$$

Ответ: 4.

33.

Два ребра прямоугольного параллелепипеда равны 1 и 2, а объём параллелепипеда равен 6. Найдите площадь поверхности этого параллелепипеда.



Пояснение.

Найдём высоту параллелепипеда:

$$V = abh \Leftrightarrow h = \frac{V}{ab} = \frac{6}{2} = 3.$$

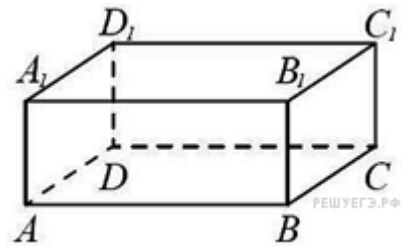
Найдём площадь поверхности параллелепипеда:

$$S = 2(ab + bc + ac) = 2(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3) = 2(2 + 6 + 3) = 22.$$

Ответ: 22.

34.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ рёбра CD , CB и диагональ CD_1 равны соответственно 5, 6 и $\sqrt{29}$. Найдите объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.



Пояснение.

Найдём высоту параллелепипеда DD_1 :

$$DD_1 = \sqrt{\sqrt{(29)^2} - 5^2} = \sqrt{29 - 25} = \sqrt{4} = 2.$$

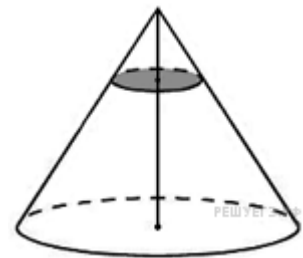
Найдём объём параллелепипеда:

$$V = CD \cdot CB \cdot DD_1 = 2 \cdot 5 \cdot 6 = 60.$$

Ответ: 60.

35.

Объём конуса равен 32. Через середину высоты конуса проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите объём конуса, отсекаемого от данного конуса проведённой плоскостью.



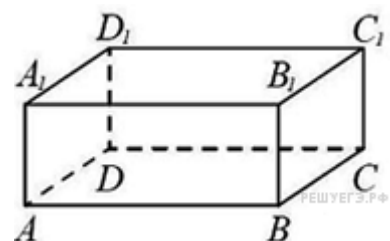
Пояснение.

Отношение объёмов конусов равно кубу их коэффициента подобия k . Так как высоты конусов относятся как 1:2, то k одной второй, а значит объём отсекаемого конуса будет равен $32:2^3=4$.

Ответ: 4.

36.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ рёбра DA , DC и диагональ DA_1 равны соответственно 3, 5 и $\sqrt{34}$. Найдите объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.



Пояснение.

Найдём высоту параллелепипеда AA_1 :

$$AA_1 = \sqrt{\sqrt{(34)^2 - 3^2} - 3^2} = \sqrt{34 - 9} = \sqrt{25} = 5.$$

Найдём объём параллелепипеда:

$$V = DA \cdot DC \cdot AA_1 = 3 \cdot 5 \cdot 5 = 75.$$

Ответ: 75.

37.

Даны два шара с радиусами 8 и 4. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

Пояснение.

Найдём площадь первого шара: $S = 4\pi r^2 \Leftrightarrow S_1 = 4\pi \cdot 8^2 = 256\pi$.

Найдём площадь второго шара: $S_2 = 4\pi \cdot 4^2 = 64\pi$.

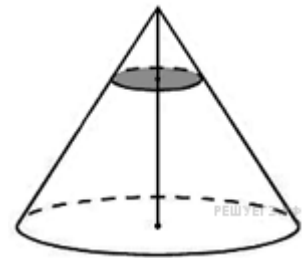
Найдём отношение площадей:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{256\pi}{64\pi} = 4.$$

Ответ: 4.

38.

Объём конуса равен 32. Через середину высоты конуса проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите объём конуса, отсекаемого от данного конуса проведённой плоскостью.

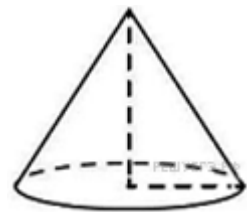
**Пояснение.**

Отношение объёмов конусов равно кубу их коэффициента подобия k . Так как высоты конусов относятся как 1:2, то k одной второй, а значит объём отсекаемого конуса будет равен $32:2^3=4$.

Ответ: 4.

39.

Объём конуса равен 9π , а его высота равна 3. Найдите радиус основания конуса.

**Пояснение.**

Найдём радиус основания конуса по формуле:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{3V}{h\pi}} \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{3 \cdot 9\pi}{3\pi}} = \sqrt{9} = 3.$$

Ответ: 3.

40.

Даны два шара с радиусами 2 и 1. Во сколько раз объём первого шара больше объёма второго?

Пояснение.

Объём первого шара: $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3} \cdot 8\pi$. Объём второго шара: $V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot r_2^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 1$.

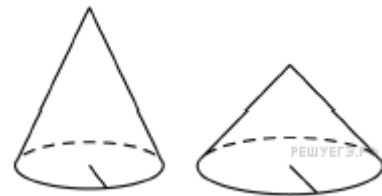
Таким образом, отношение объёмов шаров:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{8\pi}{\pi} = 8.$$

Ответ: 8.

41.

Даны два конуса. Радиус основания и образующая первого конуса равны соответственно 2 и 5, а второго — 5 и 6. Во сколько раз площадь боковой поверхности второго конуса больше площади боковой поверхности первого?



Пояснение.

Найдём площадь поверхности первого конуса: $S = \pi r l \Leftrightarrow S_1 = 5 \cdot 2\pi = 10\pi$.

Найдём площадь поверхности второго конуса: $S_2 = 5 \cdot 6\pi = 30\pi$.

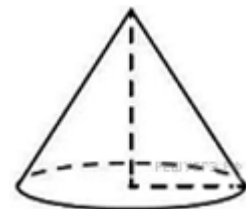
Найдём отношение площадей:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{30\pi}{10\pi} = 3.$$

Ответ: 3.

42.

Объём конуса равен 25π , а его высота равна 3. Найдите радиус основания конуса.



Пояснение.

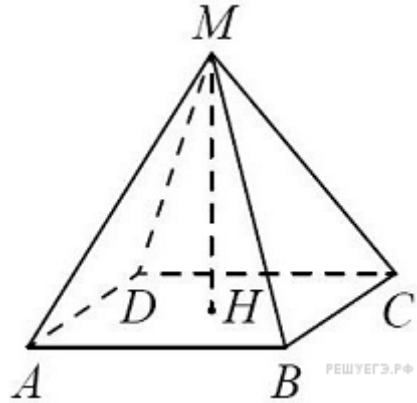
Найдём радиус основания конуса по формуле:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{3V}{h\pi}} \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{3 \cdot 25\pi}{3\pi}} = \sqrt{25} = 5.$$

Ответ: 5.

43.

Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 4, а боковое ребро равно $\sqrt{17}$.



Пояснение.

Найдём высоту МН:

$$MH = \sqrt{(\sqrt{17})^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{17 - 8} = 3.$$

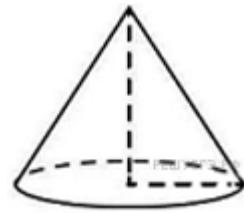
Найдём объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}ha^2 \Leftrightarrow V = \frac{3 \cdot 4^2}{3} = 16.$$

Ответ: 16.

44.

Объём конуса равен 9π , а его высота равна 3. Найдите радиус основания конуса.



Пояснение.

Подставим числовые значения в формулу объёма $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$:

$$9\pi = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 3 \Leftrightarrow R^2 = 9 \Leftrightarrow_{R>0} R = 3.$$

Ответ: 3.

45.

Даны два цилиндра. Радиус основания и высота первого равны соответственно 3 и 2, а второго — 8 и 9. Во сколько раз объём второго цилиндра больше объёма первого?

Пояснение.

Объём цилиндра находится по формуле: $V = \pi r^2 h$. Следовательно, отношение объёмов цилиндров:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\pi r_2^2 h_2}{\pi r_1^2 h_1} = \frac{8^2 \cdot 9}{3^2 \cdot 2} = 32.$$

Ответ: 32.

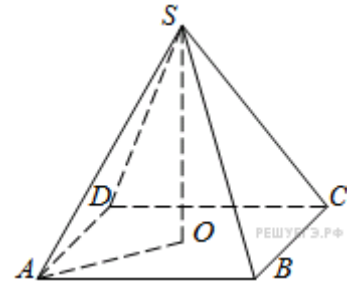
46.

Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 4, а боковое ребро равно $\sqrt{17}$. Найдите объём пирамиды.

Пояснение.

В основании правильной четырёхугольной пирамиды лежит квадрат, его диагональ равна $4\sqrt{2}$. Отрезок AO равен половине диагонали квадрата т. е. $2\sqrt{2}$. Из прямоугольного треугольника AOS по теореме Пифагора имеем:

$$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{17 - 8} = 3.$$



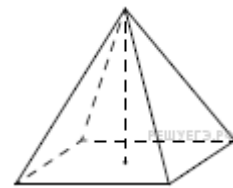
Объём пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту:

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot AB^2 \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 3 = 16.$$

Ответ: 16.

47.

Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 4, а боковое ребро равно $\sqrt{17}$.

**Пояснение.**

С помощью теоремы Пифагора найдём высоту грани пирамиды (h_1):

$$h_1 = \sqrt{(\sqrt{17})^2 - 2^2} = \sqrt{17 - 4} = \sqrt{13}.$$

Также с помощью теоремы Пифагора найдём высоту пирамиды (h_2):

$$h_2 = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - 2^2} = \sqrt{13 - 4} = \sqrt{9} = 3.$$

Найдём площадь основания пирамиды:

$$S_{\text{осн.}} = 4 \cdot 4 = 16.$$

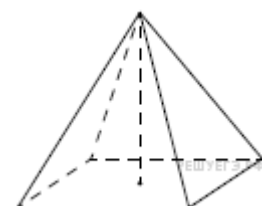
Найдём объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} h_2 \Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 3 = 16.$$

Ответ: 16.

48.

Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6, а боковое ребро равно $\sqrt{43}$.



Пояснение.

С помощью теоремы Пифагора найдём высоту грани пирамиды (h_1):

$$h_1 = \sqrt{(\sqrt{43})^2 - 3^2} = \sqrt{43 - 9} = \sqrt{34}.$$

Также с помощью теоремы Пифагора найдём высоту пирамиды (h_2):

$$h_2 = \sqrt{(\sqrt{34})^2 - 3^2} = \sqrt{34 - 9} = \sqrt{25} = 5.$$

Найдём площадь основания пирамиды:

$$S_{\text{осн.}} = 6 \cdot 6 = 36.$$

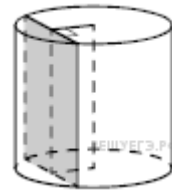
Найдём объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} h_2 \Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 5 = 12 \cdot 5 = 60.$$

Ответ: 60.

49.

Радиус основания цилиндра равен 13, а его образующая равна 18. Сечение, параллельное оси цилиндра, удалено от неё на расстояние, равное 12. Найдите площадь этого сечения.

**Пояснение.**

Сечение, параллельное оси цилиндра — прямоугольник. Одна его сторона равна образующей цилиндра. Найдём вторую его сторону из прямоугольного треугольника в основании по формуле:

$AB = 2 \cdot \sqrt{r^2 - h^2} = 2 \cdot \sqrt{25} = 10$, где AB — данная сторона, r — радиус основания цилиндра, а h — расстояние от сечения до оси цилиндра. Таким образом, площадь данного сечения равна $18 \cdot 10 = 180$.

Ответ: 180.