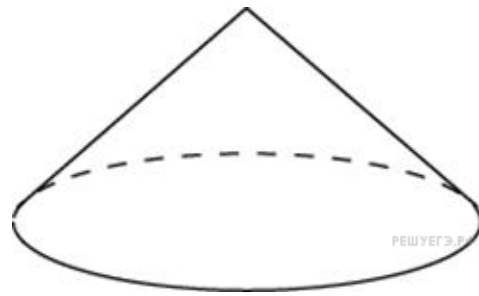


Конус

1.

Найдите объем V конуса, образующая которого равна 2 и наклонена к плоскости основания под углом 30° . В ответе

укажите $\frac{V}{\pi}$.



Пояснение.

Объем конуса равен

$$V = \frac{1}{3}Sh,$$

где S – площадь основания, а h – высота конуса. Высоту конуса найдем по свойству стороны прямоугольного треугольника, находящейся напротив угла в 30° – она вдвое меньше гипотенузы, которой в данном случае является образующая конуса. Радиус основания найдем по теореме Пифагора:

$$r = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}.$$

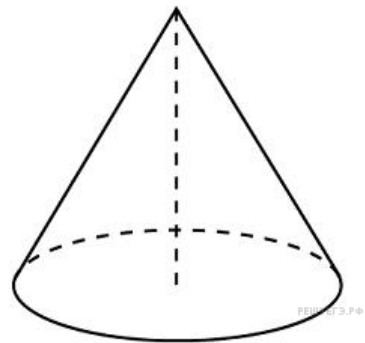
Тогда объем

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3 \cdot 1 = \pi.$$

Ответ: 1.

2.

Высота конуса равна 6, образующая равна 10. Найдите его объем, деленный на π .



Пояснение.

По теореме Пифагора найдем, что радиус основания равен $r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

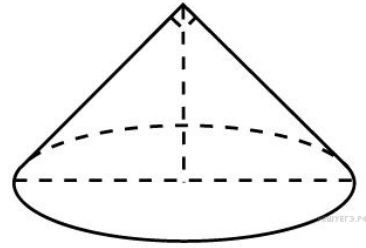
Тогда объем конуса, деленный на π :

$$\frac{V}{\pi} = \frac{1}{3} \frac{Sh}{\pi} = \frac{1}{3} \frac{\pi r^2 h}{\pi} = \frac{1}{3} r^2 h = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 6 = 128$$

Ответ: 128.

3.

Диаметр основания конуса равен 6, а угол при вершине осевого сечения равен 90° . Вычислите объем конуса, деленный на π .



Пояснение.

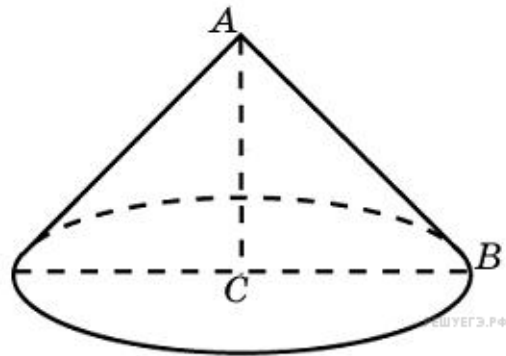
В треугольнике, образованном радиусом основания r , высотой h и образующей конуса l , углы при образующей равны, поэтому высота конуса равна радиусу его основания: $h = r$. Тогда объем конуса, деленный на π вычисляется следующим образом:

$$\frac{V}{\pi} = \frac{1}{3} \frac{Sh}{\pi} = \frac{1}{3} \frac{\pi r^2 h}{\pi} = \frac{1}{3} r^2 r = \frac{1}{3} \cdot 3^3 = 9.$$

Ответ: 9.

4.

Конус получается при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника ABC вокруг катета, равного 6. Найдите его объем, деленный на π .



Пояснение.

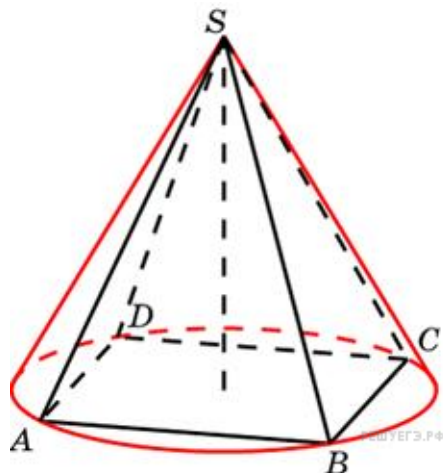
Треугольник ABC – так же равнобедренный, т.к. углы при основании $AB = 45^\circ$. Тогда радиус основания равен 6, и объем конуса, деленный на π :

$$\frac{V}{\pi} = \frac{1}{3} \frac{Sh}{\pi} = \frac{1}{3} \frac{\pi r^2 h}{\pi} = \frac{1}{3} r^2 r = \frac{1}{3} \cdot 6^3 = 72.$$

Ответ: 72.

5.

Конус описан около правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания 4 и высотой 6. Найдите его объем, деленный на π .



Пояснение.

Радиус основания конуса r равен половине диагонали квадрата $ABCD$: $r = \frac{\sqrt{2}}{2}AB = 2\sqrt{2}$.

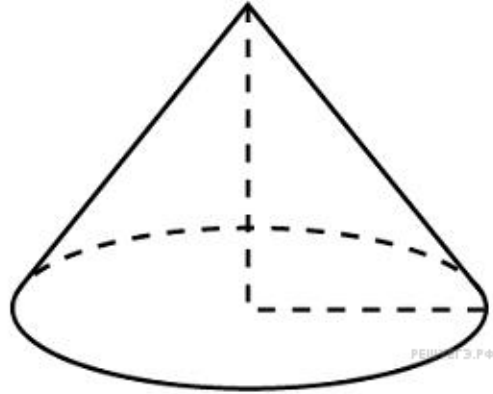
Тогда объем конуса, деленный на π :

$$\frac{V}{\pi} = \frac{1}{3} \frac{Sh}{\pi} = \frac{1}{3} \frac{\pi r^2 h}{\pi} = \frac{1}{3} r^2 h = \frac{1}{3} 8 \cdot 6 = 16.$$

Ответ: 16.

6.

Длина окружности основания конуса равна 3, образующая равна 2. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



Пояснение.

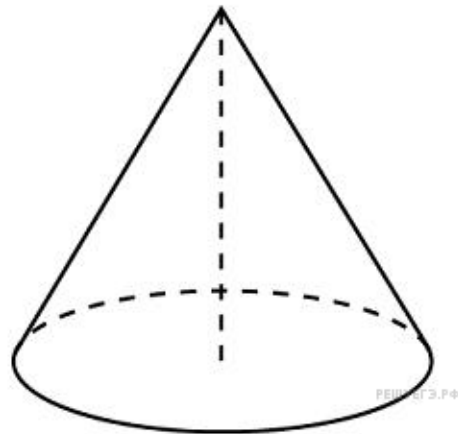
Площадь боковой поверхности конуса равна $S = \pi Rl = \frac{1}{2}Cl$, где C – длина окружности основания, а l – образующая. Тогда

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3.$$

Ответ: 3.

7.

Высота конуса равна 6, образующая равна 10. Найдите площадь его полной поверхности, деленную на π .



Пояснение.

Площадь поверхности складывается из площади основания $S_{\text{осн}} = \pi r^2$ и площади боковой поверхности:

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}Cl = \frac{l}{2}2\pi r.$$

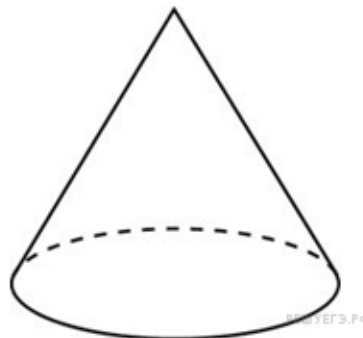
Радиус основания найдем по теореме Пифагора для треугольника, образованного высотой, образующей и радиусом: $r = \sqrt{l^2 - h^2} = 8$. Тогда площадь поверхности

$$S = \pi r^2 + l\pi r = \pi r(l + r) = \pi \cdot 8 \cdot 18 = 144\pi$$

Ответ: 144.

8.

Площадь боковой поверхности конуса в два раза больше площади основания. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания. Ответ дайте в градусах.

**Пояснение.**

Площадь основания конуса равна $S_{\text{осн}} = \pi r^2$, а площадь боковой поверхности $S_{\text{бок}} = \pi r l$. Из условия имеем:

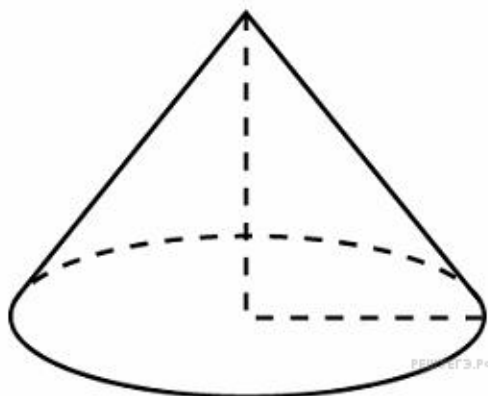
$$S_{\text{бок}} = 2S_{\text{осн}} \Leftrightarrow \pi r l = 2\pi r^2 \Leftrightarrow l = 2r.$$

Значит, в прямоугольном треугольнике, образованном высотой, образующей и радиусом основания конуса, катет, равный радиусу, вдвое меньше гипотенузы. Тогда он лежит напротив угла 30° . Следовательно, угол между образующей конуса и плоскостью основания равен 60° .

Ответ: 60.

9.

Радиус основания конуса равен 3, высота равна 4. Найдите площадь полной поверхности конуса, деленную на π .

**Пояснение.**

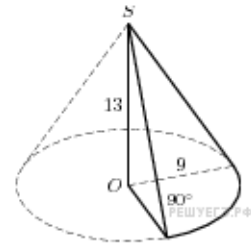
Найдем образующую по теореме Пифагора: $l = \sqrt{h^2 + r^2} = 5$. Площадь полной поверхности конуса

$$S = \pi r^2 + l\pi r = \pi r(l + r) = \pi \cdot 3 \cdot 8 = 24\pi.$$

Ответ: 24.

10.

Найдите объем V части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π .



Пояснение.

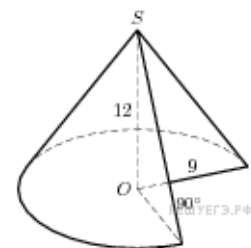
Объем данной части конуса равен

$$\frac{90^\circ}{360^\circ} \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{12} 9^2 \cdot 13\pi = 87,75\pi.$$

Ответ: 87,75.

11.

Найдите объем V части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π .



Пояснение.

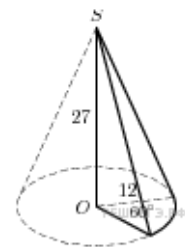
Объем данной части конуса равен

$$\frac{270^\circ}{360^\circ} V_{\text{кон}} = \frac{3}{4} V_{\text{кон}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{4} \cdot 9^2 \cdot 12\pi = 243\pi.$$

Ответ: 243.

12.

Найдите объем V части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π .



Пояснение.

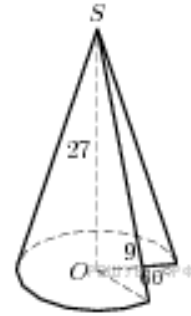
Объем данной части конуса равен

$$\frac{60^\circ}{360^\circ} \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{18} 12^2 \cdot 27\pi = 216\pi.$$

Ответ: 216.

13.

Найдите объем V части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π .



Пояснение.

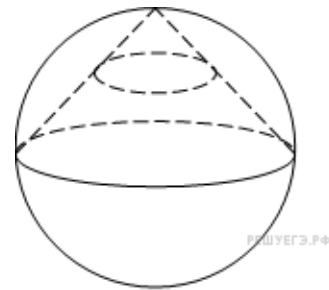
Объем данной части конуса равен

$$\frac{300^\circ}{360^\circ} \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{5}{18} 9^2 \cdot 27\pi = 607,5\pi.$$

Ответ: 607,5.

14.

Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем шара равен 28. Найдите объем конуса.



Пояснение.

Запишем формулу для объёма шара:

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = 28.$$

Объём конуса в 4 раза меньше:

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R = \frac{1}{3} \pi R^3 = 7.$$

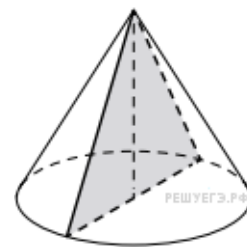
Ответ: 7.

15.

Площадь основания конуса равна 16π , высота — 6. Найдите площадь осевого сечения конуса.

Пояснение.

Осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник, высота которого совпадает с высотой конуса, а основание является диаметром основания конуса. Поэтому площадь осевого сечения равна половине произведения высоты конуса на диаметр его основания или произведению высоты конуса на радиус основания R . Поскольку по условию $\pi R^2 = 16\pi$, радиус основания конуса равен 4, а тогда искомая площадь осевого сечения равна 24.



Ответ: 24.

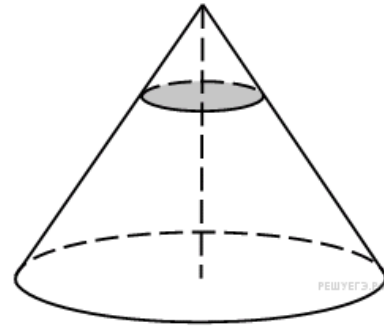
16.

Площадь основания конуса равна 18. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 3 и 6, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.

Пояснение.

Сечение плоскостью, параллельной основанию, представляет собой круг, радиус которого относится к радиусу основания конуса как 3 : 9. Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, поэтому площадь сечения в 9 раз меньше площади основания. Тем самым, она равна 2.

Ответ: 2.

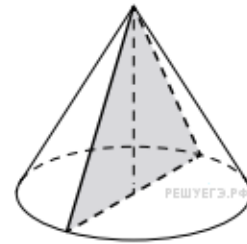
**17.**

Высота конуса равна 8, а длина образующей — 10. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.

Пояснение.

Осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник, основание которого — диаметр основания конуса, а высота совпадает с высотой конуса. Образующая конуса l , его высота h и радиус основания r связаны соотношением $l^2 = h^2 + r^2$, откуда $r = \sqrt{100 - 64} = 6$. Следовательно, диаметр осевого сечения конуса равен 12, а площадь осевого сечения равна $0,5 \cdot 12 \cdot 8 = 48$.

Ответ: 48.

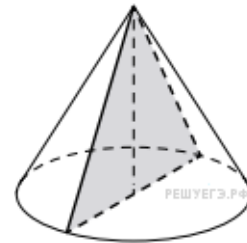
**18.**

Диаметр основания конуса равен 12, а длина образующей — 10. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.

Пояснение.

Осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник, основание которого — диаметр основания конуса, а высота совпадает с высотой конуса. Образующая конуса l , его высота h и радиус основания r связаны соотношением $l^2 = h^2 + r^2$, откуда $h = \sqrt{100 - 36} = 8$. Следовательно, площадь осевого сечения равна $0,5 \cdot 12 \cdot 8 = 48$.

Ответ: 48.

**19.**

Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $3\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Пояснение.

Заметим, что конус и цилиндр имеют общую высоту и равные радиусы основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $S_{\text{цил}} = 2\pi rh$, откуда, учитывая, что $h = r$, получаем: $2\pi r^2 = 3\sqrt{2}$ или

$$\pi r^2 = 1,5\sqrt{2}.$$

Образующая конуса l , его высота h и радиус основания r связаны соотношением $l^2 = h^2 + r^2$, откуда, учитывая, что $h = r$, получаем: $l^2 = 2r^2$ или $l = r\sqrt{2}$.

Площадь боковой поверхности конуса равна $S_{\text{кон}} = \pi rl$, следовательно:

$$S_{\text{кон}} = \pi rl = \pi r \cdot r\sqrt{2} = \pi r^2 \cdot \sqrt{2} = 1,5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 3.$$

Ответ: 3.

20.

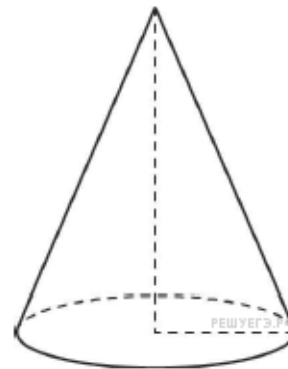
Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высоту уменьшить в 5 раз?

**Пояснение.**

Объем конуса равен $V = \frac{1}{3}Sh$, где S – площадь основания, а h – высота конуса. При уменьшении высоты в 5 раз объем конуса также уменьшится в 5 раз.
 Ответ: 5.

21.

Во сколько раз уменьшится объём конуса, если его высоту уменьшить в 8 раз, а радиус основания оставить прежним?

**Пояснение.**

Объем конуса равен

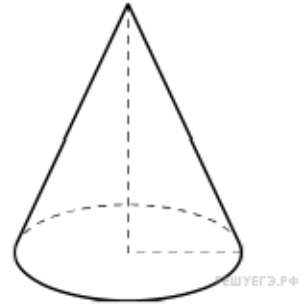
$$V = \frac{1}{3}Sh,$$

где S – площадь основания, а h – высота конуса. При уменьшении высоты в 8 раз объем конуса также уменьшится в 8 раз.

Ответ: 8.

22.

Высота конуса равна 12, а диаметр основания равен 10. Найдите образующую конуса.



Пояснение.

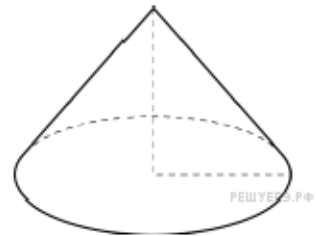
Образующая конуса по теореме Пифагора равна

$$l = \sqrt{h^2 + R_{\text{осн}}^2} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{D_{\text{осн}}}{2}\right)^2} = \sqrt{144 + 25} = 13.$$

Ответ: 13.

23.

Высота конуса равна 4, а диаметр основания равен 6. Найдите образующую конуса.



Пояснение.

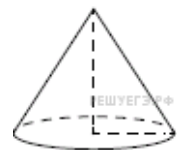
Образующая конуса по теореме Пифагора равна

$$l = \sqrt{h^2 + R_{\text{осн}}^2} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{D_{\text{осн}}}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5.$$

Ответ: 5.

24.

Объём конуса равен 50π , а его высота равна 6. Найдите радиус основания конуса.



Пояснение.

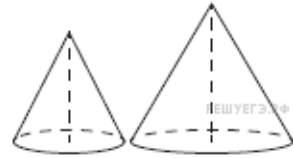
Объём конуса вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, откуда,

$$r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 50\pi}{\pi \cdot 6}} = \sqrt{25} = 5.$$

Ответ: 5.

25.

Даны два конуса. Радиус основания и образующая первого конуса равны, соответственно, 2 и 4, а второго — 6 и 8. Во сколько раз площадь боковой поверхности второго конуса больше площади боковой поверхности первого?



Пояснение.

Найдём площадь боковой поверхности первого конуса:

$$S_1 = \pi r l = \pi \cdot 2 \cdot 4 = 8\pi.$$

Найдём площадь боковой поверхности второго конуса:

$$S_2 = \pi R L = \pi \cdot 6 \cdot 8 = 48\pi.$$

Найдём отношение площадей этих конусов:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{48\pi}{8\pi} = 6.$$

Ответ: 6.

26.

Объём конуса равен 96π , а его высота равна 8. Найдите радиус основания конуса.

Пояснение.

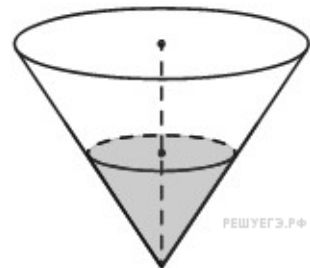
Из формулы объёма конуса найдём радиус:

$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h \Leftrightarrow V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h \Leftrightarrow R^2 = \frac{3V_{\text{кон.}}}{\pi h} \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{3V_{\text{кон.}}}{\pi h}} \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{3 \cdot 96\pi}{\pi \cdot 8}} = \sqrt{36} = 6.$$

Ответ: 6.

27.

В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объём сосуда 1600 мл. Чему равен объём налитой жидкости? Ответ дайте в миллилитрах.



Пояснение.

Пусть x — высота налитой жидкости, y — радиус окружности в основании конуса. Тогда $2x$ — высота сосуда, $2y$ — радиус окружности в основании сосуда (так как поверхность жидкости отсекает от конического сосуда конус подобный данному). Найдем отношения объемов конусов, V_1 — объем

сосуда, V_2 — объем жидкости.
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2y)^2 \cdot 2x}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot y^2 \cdot x} = 8.$$
 Таким образом, объем сосуда в 8 раз

больше объема налитой жидкости ($1600 : 8 = 200$ мл).

Ответ: 200.