

Цифровая запись числа

1.

Приведите пример трёхзначного числа, сумма цифр которого равна 20, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9.

Пояснение.

Разложим число 20 на слагаемые различными способами:

$$20 = 9 + 9 + 2 = 9 + 8 + 3 = 9 + 7 + 4 = 9 + 6 + 5 = 8 + 8 + 4 = 8 + 7 + 5 = 8 + 6 + 6 = 7 + 7 + 6.$$

При разложении способами 1–4, 7 и 8 суммы квадратов чисел не кратны трём. При разложении пятым способом сумма квадратов кратна девяти. Разложение шестым способом удовлетворяет условиям задачи. Таким образом, условию задачи удовлетворяет любое число, записанное цифрами 5, 7 и 8, например, число 578.

2.

Найдите трёхзначное натуральное число, большее 400, которое при делении на 6 и на 5 даёт равные ненулевые остатки и первая слева цифра которого является средним арифметическим двух других цифр. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Пояснение.

Число имеет одинаковые остатки при делении на 5 и на 6, следовательно, число имеет тот же остаток при делении на 30, причём этот остаток не равен нулю и меньше пяти. Таким образом, искомое число может иметь вид: $30n + 1, 30n + 2, 30n + 3, 30n + 4$.

При $n = 1, 2, \dots, 13$. Ни одно из чисел не больше 400

При $n = 14$: 421, 422, 423, 424. Первая слева цифра не является средним арифметическим двух других цифр

При $n = 15$: 451, 452, 453, 454. Число 453 удовлетворяет всем условиям задачи.

Также подходят числа 573 и 693.

Ответ: 453, 573, 693.

3.

Цифры четырёхзначного числа, кратного 5, записали в обратном порядке и получили второе четырёхзначное число. Затем из первого числа вычли второе и получили 4536. Приведите ровно один пример такого числа.

Пояснение.

Число делится на 5, значит, его последняя цифра или 0, или 5. Но так как при записи в обратном порядке цифры также образуют четырёхзначное число, то эта цифра 5, ибо число не может начинаться с 0. Пусть число имеет вид $\overline{abc5}$. Тогда условие можно записать так:

$$1000a + 100b + 10c + 5 - (5000 + 100c + 10b + a) = 4536 \Leftrightarrow 999(a - 5) + 90(b - c) = 4536$$

Второе слагаемое в левой части делится на 10. Значит, за разряд единиц в сумме отвечает только первое слагаемое. То есть $9(a - 5) \bmod 10 = 6$. Откуда $a = 9$. Подставив полученное значение в уравнение, получим, что $90(b - c) = 540 \Leftrightarrow b - c = 6$. Перебрав все пары b и c , которые являются решением этого равенства, выпишем все числа, являющиеся ответом: 9605, 9715, 9825, 9935.

4.

Найдите четырёхзначное число, кратное 22, произведение цифр которого равно 24. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Пояснение.

Чтобы число $abcd$ делилось на 22, оно должно делиться и на 2, и на 11. Произведение цифр 24 можно представить многими способами, основой которых являются произведения - $6 \cdot 4, 8 \cdot 3, 24 \cdot 1, 12 \cdot 2$. Признак делимости на 11: Число делится на 11, если сумма цифр, которые стоят на четных местах равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах, либо отличается от неё на 11. Таким образом, $a+c=b+d$ или $a+c=b+d+11$ или $a+c+11=b+d$. Кроме того, раз число делится на 2, то оно должно быть четным. Согласно перечисленным признакам можно подобрать следующие числа: 4312, 2134, 1342, 3124

5.

Найдите четырёхзначное число, кратное 22, произведение цифр которого равно 40. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Пояснение.

Чтобы число $abcd$ делилось на 22, оно должно делиться и на 2, и на 11. Произведение цифр 40 можно представить многими способами, основой которых являются произведения - $8 \cdot 5, 20 \cdot 2, 4 \cdot 10$. Признак делимости на 11: Число делится на 11, если сумма цифр, которые стоят на четных местах равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах, либо отличается от неё на 11. Таким образом, $a+c=b+d$ или $a+c=b+d+11$ или $a+c+11=b+d$. Кроме того, раз число делится на 2, то оно должно быть четным. Согласно перечисленным признакам можно подобрать следующие числа: 5412, 5214, 1452, 1254, 1518

6.

Найдите четырёхзначное число, кратное 22, произведение цифр которого равно 60. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Пояснение.

Чтобы число $abcd$ делилось на 22, оно должно делиться и на 2, и на 11. Произведение цифр 60 можно представить многими способами, основой которых являются произведения - $6 \cdot 10, 20 \cdot 3, 15 \cdot 4, 12 \cdot 5$. Признак делимости на 11: Число делится на 11, если сумма цифр, которые стоят на четных местах равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах, либо отличается от неё на 11. Таким образом, $a+c=b+d$ или $a+c=b+d+11$ или $a+c+11=b+d$. Кроме того, раз число делится на 2, то оно должно быть четным. Согласно перечисленным признакам можно подобрать следующие числа: 5126, 2156, 6512, 1562

7.

Найдите четырёхзначное число, кратное 18, произведение цифр которого равно 24. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Пояснение.

Если число $abcd$ кратно 18, оно кратно 2, 9, 3, 6: то есть оно должно быть четным и сумма его цифр должна быть кратна 9. Таким образом d - четное, $a+b+c+d$ делится на 9, $a \cdot b \cdot c \cdot d = 24$. Произведения цифр могут быть представлены в виде $4 \cdot 6, 8 \cdot 3$. Числа, удовлетворяющие данным условиям: 3222, 2322, 2232

8.

Найдите трёхзначное число, кратное 25, все цифры которого различны, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Пояснение.

Чтобы число делилось на 25, оно должно заканчиваться на 00, 25, 50 или 75. Наше число на 00 заканчиваться не может, поскольку все его цифры должны быть различны. Выпишем все трёхзначные числа, заканчивающиеся на 25, 50 или 75, все цифры которых различны, найдём сумму квадратов их цифр, проверим, делится ли она на 3 и на 9.

$$125 : 1^2 + 2^2 + 5^2 = 30, \text{ сумма цифр делится на 3, но не делится на 9. Это искомое число.}$$

$$150 : 1^2 + 5^2 + 0^2 = 26, \text{ сумма цифр не делится на 3.}$$

$$175 : 1^2 + 7^2 + 5^2 = 75, \text{ сумма цифр делится на 3, но не делится на 9. Это искомое число.}$$

$$250 : 2^2 + 5^2 + 0^2 = 29, \text{ сумма цифр не делится на 3.}$$

$$275 : 2^2 + 7^2 + 5^2 = 78, \text{ сумма цифр делится на 3, но не делится на 9. Это искомое число.}$$

$$325 : 3^2 + 2^2 + 5^2 = 38, \text{ сумма цифр не делится на 3.}$$

$$350 : 3^2 + 5^2 + 0^2 = 34, \text{ сумма цифр не делится на 3.}$$

$$375 : 3^2 + 7^2 + 5^2 = 83, \text{ сумма цифр не делится на 3.}$$

$$425 : 4^2 + 2^2 + 5^2 = 45, \text{ сумма цифр делится на 3 и на 9.}$$

$$450 : 4^2 + 5^2 + 0^2 = 41, \text{ сумма цифр не делится на 3.}$$

$$475 : 4^2 + 7^2 + 5^2 = 90, \text{ сумма цифр делится на 3 и на 9.}$$

$$625 : 6^2 + 2^2 + 5^2 = 65, \text{ сумма цифр не делится на 3.}$$

$$650 : 6^2 + 5^2 + 0^2 = 61, \text{ сумма цифр не делится на 3.}$$

$$675 : 6^2 + 7^2 + 5^2 = 110, \text{ сумма цифр не делится на 3.}$$

$$725 : 7^2 + 2^2 + 5^2 = 78, \text{ сумма цифр делится на 3, но не делится на 9. Это искомое число.}$$

$$750 : 7^2 + 5^2 + 0^2 = 74, \text{ сумма цифр не делится на 3.}$$

$$825 : 8^2 + 2^2 + 5^2 = 93, \text{ сумма цифр делится на 3, но не делится на 9. Это искомое число.}$$

$$850 : 8^2 + 5^2 + 0^2 = 89, \text{ сумма цифр не делится на 3.}$$

$$875 : 8^2 + 7^2 + 5^2 = 138, \text{ сумма цифр делится на 3, но не делится на 9. Это искомое число.}$$

$$925 : 9^2 + 2^2 + 5^2 = 110, \text{ сумма цифр не делится на 3.}$$

$$950 : 9^2 + 5^2 + 0^2 = 106, \text{ сумма цифр не делится на 3.}$$

$$975 : 9^2 + 7^2 + 5^2 = 155, \text{ сумма цифр не делится на 3.}$$

Таким образом, условию удовлетворяет любое из чисел 125, 175, 275, 725, 825, 875.

Ответ: любое из чисел 125, 175, 275, 725, 825, 875.

9.

Найдите трёхзначное число, сумма цифр которого равна 25, если известно, что его квадрат делится на 16.

Пояснение.

Разложим число 25 на слагаемые: $25 = 9 + 9 + 7 = 9 + 8 + 8$.

Квадрат числа делится на 16, значит, само число делится на 4. Это значит, что оно как минимум заканчивается на чётную цифру. То есть первый набор отпадает, так как в нём таковых нет. Из второго мы можем составить числа 988 и 898. Первое число удовлетворяет условиям задачи.

10.

Приведите пример четырёхзначного натурального числа, кратного 4, сумма цифр которого равна их произведению. В ответе укажите ровно одно такое число.

Пояснение.

Пусть наше число имеет вид $\overline{abcd}$. Тогда имеем $\overline{a+b+c+d} = \overline{a \cdot b \cdot c \cdot d}$. И так как число делится на 4, $\overline{10c+d}$ делится на 4. Можно заметить, что если среди цифр есть хотя бы три единицы, то равенство невозможно, так как сумма будет больше произведения. То же самое, если единиц меньше, чем две. В этом случае произведение будет слишком большое. Таким образом, среди цифр есть ровно две единицы. Рассмотрим двузначные числа, которые делятся на 4, это концовка нашего числа. Нельзя брать числа с нулём, так как в этом случае произведение будет равно нулю, что плохо.

12: тогда одна из оставшихся цифр 1, а другая — 4.

16: тогда одна из оставшихся цифр 1, а другая никакая не подойдёт.

24: значит, оставшиеся цифры — единицы. Всё сходится.

Остальные числа будут давать слишком большое произведение или нечётную сумму.

Таким образом, исходные числа: 1412, 4112, 1124.

11.

Найдите наименьшее четырёхзначное число, кратное 11, у которого произведение его цифр равно 12.

В ответе укажите наименьшее такое число.

Пояснение.

Пусть число имеет вид $\overline{abcd}$. Произведение цифр числа равно 12, то есть $\overline{abcd} = 12 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 2$, откуда получаем, что $\overline{abcd}$ может быть набором цифр: 1, 2, 2, 3; 1, 1, 3, 4. Число делится на 11, если сумма цифр, стоящих на нечётных местах равна сумме цифр, стоящих на чётных местах. Наименьшее число, удовлетворяющее этому требованию и состоящее из имеющихся наборов цифр, — 1232.

Ответ: 1232.

12.

Найдите четырёхзначное натуральное число, кратное 19, сумма цифр которого на 1 больше их произведения.

Пояснение.

Если хотя бы одна цифра в записи числа — нуль, то произведение цифр равно 0, а тогда их сумма равна 1. Единственное такое четырёхзначное число — 1000, но оно не кратно 19. Поэтому нулей среди цифр нет. Отсюда следует, что все цифры не меньше 1, и их сумма не меньше четырёх, а значит, произведение цифр не меньше трёх. Чтобы произведение было не меньше трёх хотя бы одна из цифр должна быть больше 1. Рассмотрим такие числа в порядке возрастания суммы их цифр.

Если сумма цифр равна 5, то число записывается одной двойкой и тремя единицами (это числа 1112, 1121, 1211, 2111). Произведение цифр равно 2, поэтому они не удовлетворяют условию.

Если сумма цифр равна 6, то число записывается одной тройкой и тремя единицами или двумя двойками и двумя единицами (это числа 1113, 1131, 1311, 3111, 1122, 1212, ...). Произведение цифр равно 3 или 4 соответственно, поэтому такие числа не удовлетворяют условию.

Если сумма цифр равна 7, то произведение должно быть равно 6. Это выполнено для чисел, записываемых тройкой, двойкой и двумя единицами. Поскольку число 3211 кратно 19, оно и является искомым.

Ответ: 3211.

Примечание.

Четырёхзначное число, обладающее требуемыми свойствами, единственно. Покажем это, приведя другое решение.

Приведём решение Дмитрия Мухина (Москва).

Пусть a, b, c, d — цифры числа и пусть a самая большая из них (порядок цифр не важен). Покажем, что произведение меньших цифр не больше четырёх. Действительно, из равенства $a + b + c + d = 1 + abcd$, получаем $4a \geq abcd + 1$. Деля на наибольшую цифру a , получаем, что $bcd < 4$.

Рассмотрим теперь следующие случаи.

1. Пусть среди чисел b, c, d есть нуль, тогда поскольку $a + b + c + d = 1$, это число 1000, но оно на 19 не делится. Итак, все три меньшие цифры числа отличны от нуля.

2. Пусть все три меньшие цифры равны единице, тогда $a + 3 = a + 1$. Этот случай невозможен.

3. Пусть меньшие цифры это две единицы и двойка. Тогда $a + 4 = 2a + 1$, откуда $a = 3$. Перебирая 12 чисел, составленных из цифр 1, 1, 2, 3, находим, что из них кратно 19 только число 3211. Оно и является ответом.

4. Пусть меньшие цифры это две единицы и тройка. Тогда $a + 5 = 3a + 1$. Отсюда $a = 2$, но тогда a не наибольшая цифра. Противоречие.

Поскольку $bcd < 4$, других вариантов нет. Искомое число единственно, оно равно 3211.

13.

Найдите наименьшее пятизначное число, кратное 55, произведение цифр которого больше 50, но меньше 75.

Пояснение.

Если число делится на 55, то оно делится на 5 и на 11. Если число делится на 5 то оно может оканчиваться на 0 или на 5. Если в записи числа есть ноль, то произведение цифр числа равно нулю, следовательно, запись числа должна оканчиваться на 5. Пусть число имеет вид $\overline{abcde}$. Число делится на 11, если сумма цифр на нечётных местах равна сумме цифр на чётных местах: $\overline{a+c+e} = \overline{b+d} \Leftrightarrow \overline{a+c+5} = \overline{b+d}$. Рассмотрим различные произведения $\overline{abcde}$ такие, что $50 < \overline{abcde} < 75$. Последняя цифра числа равна пяти, следовательно, возможные значения произведения $\overline{abcde} : 50, 55, 60, 65, 70$. Разложим каждое число на простые множители:

$$55 = 5 \cdot 11, \quad 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5, \quad 65 = 5 \cdot 13, \quad 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Попытаемся удовлетворить уравнению $\overline{a+c+5} = \overline{b+d}$. Перебирая различные возможные значения, получим, что только число разложение числа 70 в виде $\overline{abcde} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$ удовлетворяет уравнению: $1 + 2 + 5 = 1 + 7$. Наименьшее число, удовлетворяющее условиям задачи — 11 275.

Ответ: 11 275.

14.

Найдите шестизначное натуральное число, которое записывается только цифрами 1 и 0 и делится на 24.

Пояснение.

Чтобы число делилось на 24 оно должно делиться на 3 и на 8.

Число делится на 8, если три его последние цифры образуют число, делящееся на 8. Искомое число записывается только нулями и единицами, значит, оно заканчивается на 000.

Число делится на 3, если его сумма цифр числа делится на 3. Поскольку три последние цифры числа нули, первые три должны быть единицами.

Таким образом, единственное число, удовлетворяющее условию задачи, это число 111 000.

Ответ: 111 000.

15.

Найдите наименьшее трёхзначное число, которое при делении на 2 даёт остаток 1, при делении на 3 даёт остаток 2, при делении на 5 даёт остаток 3 и которое записано тремя различными нечётными цифрами.

Пояснение.

Число при делении на 2 даёт остаток 1, следовательно, оно нечётное. При делении на 3 число даёт остаток 2, то есть число имеет вид $\overline{3k+2}$. При делении на 5 число даёт остаток 3, то есть число имеет вид $\overline{5m+3}$, то есть число может оканчиваться либо на тройку, либо на восьмёрку. Число нечётное, следовательно, может оканчиваться только на тройку. Учитывая, что число оканчивается на 3: $\overline{3k+2} = \overline{10n+3} \geq 100$ Перебирая значения n , что при $n = 17$ получаем число, удовлетворяющее условиям задачи. Это число 173.

Ответ: 173.

16.

Найдите наименьшее трёхзначное натуральное число, которое при делении на 6 и на 11 даёт равные ненулевые остатки и у которого средняя цифра является средним арифметическим двух крайних цифр.

Пояснение.

По модулю 6 и 11 число имеет одинаковые остатки, следовательно, число имеет тот же остаток при делении на 66, причём этот остаток не равен нулю и меньше шести. Таким образом, искомое число может иметь вид:

$$\overline{66n+1}, \overline{66n+2}, \overline{66n+3}, \overline{66n+4}, \overline{66n+5}.$$

При $n = 1$ получаем: 67, 68, 69, 70, 71. Все эти числа не являются трёхзначными.

При $n = 2$ получаем: 133, 134, 135, 136, 137. Число 135 удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: 135.

17.

Сумма цифр трёхзначного натурального числа A делится на 12. Сумма цифр числа $(A + 6)$ также делится на 12. Найдите наименьшее возможное число A .

Пояснение.

Пусть число A имеет вид $\overline{abc}$. Если $c \leq 3$, то сумма цифр в новом числе будет на 6 больше, чем в исходном. Пусть A делится на 12, тогда $\frac{A+6}{12} = \frac{A}{12} + \frac{1}{2}$ то есть число $A+6$ не делится на 12.

Аналогично, если число $A+6$ делится на 12, то число A не делится на 12. Значит, $c \geq 4$. Рассмотрим три случая:

1) $\overline{abc}, b < 9$. Число $A+6$ имеет вид: $\overline{a(b+1)(c-4)}$, сумма цифр числа $A+6$ на 3 меньше суммы цифр числа A .

2) $\overline{a9c}, a < 9$. Число $A+6$ имеет вид: $\overline{(a+1)0(c-4)}$, сумма цифр числа $A+6$ на 12 меньше суммы цифр числа A .

3) $\overline{99c}$. Число $A+6$ имеет вид: $\overline{100(c-4)}$, сумма цифр числа $A+6$ на 21 меньше суммы цифр числа A .

Ясно, что условиям задачи удовлетворяют числа, рассмотренные в пункте 2). Подберём число A так, чтобы сумма его цифр делилась на 12. Наименьшее возможное A , удовлетворяющее условиям задачи, — 699.

Ответ: 699.

18.

Сумма цифр трёхзначного числа A делится на 13. Сумма цифр числа $A+5$ также делится на 13. Найдите такое число A .

Пояснение.

Пусть число A имеет вид $\overline{abc}$. Если $c \leq 4$, то сумма цифр в новом числе будет на 5 больше, чем в исходном. Пусть A делится на 13, тогда $\frac{A+5}{13} = \frac{A}{13} + \frac{5}{13}$ то есть число $A+5$ не делится на 13.

Аналогично, если число $A+5$ делится на 13, то число A не делится на 13. Значит, $c \geq 5$. Рассмотрим 3 случая:

1) $\overline{abc}, b < 9$. Число $A+5$ имеет вид: $\overline{a(b+1)(c-4)}$, сумма цифр числа $A+5$ на 3 меньше суммы цифр числа A .

2) $\overline{a9c}, a < 9$. Число $A+5$ имеет вид: $\overline{(a+1)0(c-4)}$, сумма цифр числа $A+5$ на 12 меньше суммы цифр числа A .

3) $\overline{99c}$. Число $A+5$ имеет вид: $\overline{100(c-4)}$, сумма цифр числа $A+5$ на 21 меньше суммы цифр числа A .

Ясно, что условиям задачи удовлетворяют числа, рассмотренные в пункте 2). Подберём число A так, чтобы сумма его цифр делилась на 13. Наименьшее возможное A , удовлетворяющее условиям задачи, — 899.

Ответ: 899.

19.

Вычеркните в числе 123456 три цифры так, чтобы получившееся трёхзначное число делилось на 27. В ответе укажите получившееся число.

Пояснение.

Если число делится на 27, тогда оно делится на 3 и на 9. Число делится на 9, тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 9. Число делится на 3, тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 3. Заметим, что, если число делится на 9, то оно делится и на 3 (но необязательно, что делится на 27). Сумма цифр числа 123456 равна $1+2+3+4+5+6=21$. Вычеркнув цифры 2, 4 и 6, получим число, сумма цифр которого равна девяти. 135 делится на 27.

Ответ: 135.

20.

Вычеркните в числе 141565041 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 30. В ответе укажите ровно одно получившееся число.

Пояснение.

Если число делится на 30, то оно также делится на 3 и на 10. Поэтому в последнем разряде числа должен быть ноль. Тогда вычёркиваем 41. Остаётся 1415650. Для того, чтобы число делилось на три необходимо, чтобы сумма цифр была кратна трём, значит, нужно вычеркнуть цифру 1 или цифру 4. Таким образом, получаем числа 145650, 115650 и 415650

Ответ: 145650, 115650 или 415650.

21.

Вычеркните в числе 74513527 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 15. В ответе укажите ровно одно получившееся число.

Пояснение.

Если число делится на 15, то оно также делится на 3 и на 5. Поэтому в последнем разряде числа должен быть ноль или цифра пять. Тогда вычёркиваем 27. Остаётся 745135. Посчитаем сумму цифр — 25. Для того, чтобы число делилось на три необходимо, чтобы сумма цифр была кратна трём. В таком случае можно вычеркнуть цифру 1 и получить число 74535, цифру 4 и получить 75135 или вычеркнуть цифру 7 и получить число 45135.

Ответ: 74535, 75135 или 45135.

22.

Вычеркните в числе 85417627 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 18. В ответе укажите ровно одно получившееся число.

Пояснение.

Если число делится на 18, то оно также делится на 9 и на 2. Число должно быть чётным, для этого вычеркнем цифру 7, получим 8541762. Посчитаем сумму цифр — 33. Для того, чтобы число делилось на девять необходимо, чтобы сумма цифр была кратна девяти. Можно вычеркнуть цифры 5 и 1, получив число 84762, либо вычеркнуть цифры 4 и 2 и получить число 85176. Также возможно вычеркнуть цифры 7 и 8 и получить число 54162.

Ответ: 84762, 85176 или 54162.

23.

Вычеркните в числе 181615121 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 12. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Пояснение.

Число делится на 12 тогда и только тогда, когда оно делится на 3 и на 4. Из признака делимости на 4 следует, что число чётное — вычеркнем последнюю цифру. Теперь используем признак делимости на 3. Найдём сумму цифр в числе $1 + 8 + 1 + 6 + 1 + 5 + 1 + 2 = 25$. Ближайшие суммы цифр — 24, 21, 18. Чтобы получить сумму цифр 18 вычеркнем из числа цифры 6 и 1. Получим число 181512. Это число делится и на 4, и на 3. Число 116112 также подходит для ответа.

Ответ: 181512, 116112.

24.

Найдите трехзначное натуральное число, большее 500, которое при делении на 4, на 5 и на 6 дает в остатке 2, и в записи которого есть только две различные цифры. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Пояснение.

При делении на 4 число даёт в остатке 2, следовательно, оно чётное. Поскольку число при делении на 5 даёт в остатке 2, то оно может оканчиваться на 2 или на 7. Таким образом, число обязательно должно заканчиваться цифрой 2.

Подбором находим, что условию задачи удовлетворяют числа 662 и 722.

Ответ: 662, 722.

25.

Найдите трехзначное натуральное число, большее 600, которое при делении на 4, на 5 и на 6 дает в остатке 3, и цифры которого расположены в порядке убывания слева направо. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Пояснение.

При делении на 4 число даёт в остатке 3, следовательно, оно нечётное. Поскольку число при делении на 5 даёт в остатке 3, то оно может оканчиваться на 2 или на 8. Таким образом, число обязательно должно заканчиваться цифрой 3.

Подбором находим, что условию задачи удовлетворяют числа 963 и 843.

Ответ: 963, 843.

26.

Найдите трёхзначное число A , обладающее всеми следующими свойствами:

- сумма цифр числа A делится на 8;
- сумма цифр числа $A + 1$ делится на 8;
- в числе A сумма крайних цифр кратна средней цифре.

В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Пояснение.

Пусть число имеет вид $\overline{abc}$, если $c < 9$, то сумма цифр в новом числе будет на 1 больше, чем в исходном, и обе они не могут делиться на 8. Значит $c \geq 9$. Рассмотрим теперь 2 случая:

- 1) $\overline{ab9}$, $b \neq 9$. Число перейдёт в $\overline{a(b+1)(c-9)}$, сумма изменится на 8.
- 2) $\overline{a99}$, $a \neq 9$. Число перейдёт в $\overline{(a+1)(b-9)(c-9)}$, сумма изменится на 18.

Итак, условиям задачи удовлетворяют числа вида $\overline{ab9}$, $b \neq 9$, где $a + 9$ кратно b . Одним из таких чисел является 349.

Ответ: 349.

27.

Найдите четырёхзначное число, кратное 88, все цифры которого различны и чётны. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Пояснение.

Число делится на 88, если оно делится на 8 и на 11. Признак делимости на 8: число делится на 8 тогда и только тогда, когда три его последние цифры — нули или образуют число, которое делится на 8. Признак делимости на 11: число делится на 11, если сумма цифр, которые стоят на чётных местах равна сумме цифр, стоящих на нечётных местах, либо разность этих сумм делится на 11. Используя признак делимости на 8, и учитывая, что все цифры искомого числа должны быть чётны и различны получаем, что последними цифрами числа могут быть: 024, 048, 064, 208, 240, 264, 280, 408, 480, 608, 624, 640, 648, 680, 824, 840, 864. Используя признак делимости на 11 получим, что условию задачи удовлетворяют числа: 6248, 8624, 2640.

Ответ: 2640, 6248 или 8624.

Приведём идею другого решения.

Искомое число должно быть записано четырьмя из пяти цифр 0, 2, 4, 6 и 8, каждая из которых взята один раз. Причём сумма цифр в разрядах тысяч и десятков должна быть равна сумме цифр в разрядах сотен и единиц, а три последние цифры искомого числа должны образовывать трёхзначное число, кратное восьми. Пусть в разряде тысяч стоит 8, тогда в разряде десятков должна быть 2, а в разряде сотен и единиц — цифры 4 и 6. Заметим, что число 8624 удовлетворяет условию. Далее аналогично для чисел, начинающихся с 2, 4 и 6.

28.

Трёхзначное число при делении на 10 даёт в остатке 3. Если последнюю цифру числа перенести в начало его записи, то полученное число будет на 72 больше первоначального. Найдите исходное число.

Пояснение.

Пусть число имеет вид $\overline{xyz}$.

$$\text{Тогда условие записывается так: } \begin{cases} 0 \leq x, y, z \leq 9, \\ z = 3, \\ 100x + 10y + z = 100z + 10x + y - 72. \end{cases}$$

Подставив значение z в третье выражение и преобразовав его, получим, что $10x + y = 25$, $0 \leq x, y \leq 9$.

Подходит только пара $x = 2$, $y = 5$.

Таким образом, условиям задачи удовлетворяет число 253.

29.

Приведите пример четырёхзначного числа A , обладающего следующими свойствами:

- 1) сумма цифр числа A делится на 8;
- 2) сумма цифр числа $(A + 2)$ также делится на 8;
- 3) число A меньше 3000.

В ответе укажите ровно одно такое число.

Пояснение.

Пусть число имеет вид $\overline{abcd}$. Если $d < 8$, то сумма цифр в новом числе будет на 2 больше, чем в исходном, и обе они не могут делиться на 8. Значит, $d \geq 8$. Рассмотрим теперь 3 случая:

- 1) $\overline{abcd}$, $c < 9$. Число перейдёт в $\overline{ab(c+1)(d-8)}$, сумма изменится на 7.
- 2) $\overline{ab9d}$, $b < 9$. Число перейдёт в $\overline{a(b+1)0(d-8)}$, сумма изменится на 16.
- 3) $\overline{a99d}$. Число перейдёт в $\overline{(a+1)00(d-8)}$, сумма изменится на 25.

Итак, условиям задачи удовлетворяют числа вида $\overline{ab9d}$, $b < 9$, $d \geq 8$. Так как $a < 3$, несложно выписать все варианты: 1698, 2598, 1599, 2499.

30.

Приведите пример шестизначного натурального числа, которое записывается только цифрами 1 и 2 и делится на 24. В ответе укажите ровно одно такое число.

Пояснение.

Если число делится на 24, то оно также делится на 3 и на 8.

Число делится на 8 тогда и только тогда, когда три его последние цифры образуют число, которое делится на 8. Перебрав трёхзначные числа из 1 и 2, получим, что только 112 делится на 8. Это число образует последние три цифры искомого числа.

Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Последние три цифры 112 дают к сумме 4. Рассмотрим первые три цифры. Их сумма может быть от 3 до 6. Условиям задачи удовлетворяет сумма цифр, равная 5. Троек с данной суммой цифр три: 122, 212, 221.

Таким образом, подходят числа: 122112, 212112, 221112.

31.

Приведите пример шестизначного натурального числа, которое записывается только цифрами 2 и 0 и делится на 24. В ответе укажите ровно одно такое число.

Пояснение.

Если число делится на 24, то оно делится на 3 и на 8.

Если число делится на 8, то число, образованное последними его тремя цифрами, тоже делится на 8. Трёхзначных чисел из 0 и 2, делящихся на 8, два: 000 и 200. Это окончания исходного числа.

Если число делится на 3, то сумма его цифр тоже делится на 3.

000 даёт к сумме 0, то есть сумма первых цифр должна равняться 6, то есть это 222.

200 даёт к сумме 2, то есть сумма первых цифр должна равняться 4, то есть 220 или 202 (022 не может быть, так как это первые цифры, а первая цифра в числе не может равняться 0).

Таким образом, искомые числа: 220200, 202200, 222000.

32.

Приведите пример шестизначного натурального числа, которое записывается только цифрами 1 и 2 и делится на 72. В ответе укажите ровно одно такое число.

Пояснение.

Если число делится на 72, то оно делится на 8 и на 9.

Если число делится на 8, то число, образованное последними его тремя цифрами, тоже делится на 8. Шестизначных чисел из 1 и 2, делящихся на 8 должны заканчиваться тройкой цифр 112.

Если число делится на 9, то сумма его цифр тоже делится на 9.

112 даёт к сумме 4, то есть сумма первых цифр должна равняться 5, то есть должна состоять из перестановок двух двоек и единицы.

Таким образом, искомые числа: 122112, 212112, 221112.

Ответ: 122112, 212112 или 221112.

33.

Приведите пример трёхзначного натурального числа, большего 500, которое при делении на 8 и на 5 даёт равные ненулевые остатки и первая слева цифра которого является средним арифметическим двух других цифр. В ответе укажите ровно одно такое число.

Пояснение.

По модулю 5 и 8 число имеет одинаковые остатки. Оно будет иметь тот же остаток и при делении на 40. Этот остаток больше нуля и меньше пяти. Пусть наше число имеет вид $\overline{xyz}$, тогда имеем:

$$\begin{cases} 5 \leq x \leq 9, \\ 0 \leq y \leq 9, \\ 0 < z < 5, \\ 2x = y + z. \end{cases}$$

Заметим, также, что искомое число должно быть чётным. Переберём все варианты, их четыре: 564, 684.

Ответ: 564; 684.

34.

Приведите пример трёхзначного натурального числа, большего 600, которое при делении на 4, на 5 и на 6 даёт в остатке 3 и цифры которого расположены в порядке убывания слева направо. В ответе укажите ровно одно такое число.

Пояснение.

Так как число даёт одинаковый остаток по модулям 4, 5 и 6, то оно также даёт такой же остаток и по модулю 60. То есть число имеет вид $\overline{60k + 3}$. Все такие числа: 603, 663, 723, 783, 843, 903, 963. Из них подходят под последнее условие только 843 и 963.

35.

Приведите пример трёхзначного натурального числа, большего 500, которое при делении на 3, на 4 и на 5 даёт в остатке 2 и в записи которого есть только две различные цифры. В ответе укажите ровно одно такое число.

Пояснение.

Раз число даёт один и тот же остаток по модулю 3, 4 и 5, то оно даёт такой же остаток и по модулю $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. А значит, число имеет вид $\overline{60k + 2}$. Все числа, удовлетворяющие этому неравенству: 542, 602, 662, 722, 782, 842, 902, 962. Из них удовлетворяют условию про две различные цифры: 662, 722.

36.

Приведите пример трёхзначного натурального числа, которое при делении на 3, на 5 и на 7 даёт в остатке 1 и цифры которого расположены в порядке убывания слева направо. В ответе укажите ровно одно такое число.

Пояснение.

Если число имеет одинаковые остатки по каким-то модулям, то оно имеет такой же остаток по модулю, являющемуся НОК этих модулей. То есть в данном случае по модулю 105. Тогда наше число $n = 105k + 1$. Переберём все возможные варианты: 106, 211, 316, 421, 526, 631, 736, 841, 946. Условиям задачи удовлетворяют числа 421, 631 и 841.

Ответ: 421; 631; 841.

37.

Приведите пример трёхзначного натурального числа, которое при делении на 3, на 5 и на 7 даёт в остатке 2 и в записи которого есть только две различные цифры. В ответе укажите ровно одно такое число.

Пояснение.

Так как число даёт одинаковые остатки по модулям 3, 5 и 7, то оно также даёт такой же остаток по модулю 105. То есть число имеет вид $105k + 2$. Все такие числа: 107, 212, 317, 422, 527, 632, 737, 842, 947. Под последнее условие подходят только числа 212, 422 и 737.

38.

Приведите пример трёхзначного натурального числа большего 500, которое при делении на 6 и на 5 даёт равные ненулевые остатки и средняя цифра которого является средним арифметическим крайних цифр. В ответе укажите ровно одно такое число.

Пояснение.

Найдём все трёхзначные числа, большие пятисот, такие, что средняя цифра равна среднему арифметическому крайних. Пусть первая цифра числа 5, тогда если последняя цифра чётная, то средняя — не целое число. Следовательно, последняя цифра должна быть нечётной, тогда это 1, 3, 5, 7 или 9. Среднюю цифру находим как среднее арифметическое крайних. Получаем: 531, 543, 555, 567, 579.

Рассуждая аналогично, находим оставшиеся трёхзначные числа, обладающие этим свойством: 630, 642, 654, 666, 678, 741, 753, 777, 789, 840, 852, 864, 876, 888, 951, 963, 975, 987, 999.

Определим, какие из найденных чисел дают одинаковые остатки при делении на 5 и на 6. Это числа 543 (остаток 3), 630 (остаток 0), 642 (остаток 2), 753 (остаток 3), 840 (остаток 0), 963 (остаток 3).

Ненулевые равные остатки дают числа 543, 753, 963.

39.

Приведите пример трёхзначного натурального числа, большего 500, которое при делении на 8 и на 5 даёт равные ненулевые остатки и средняя цифра которого является средним арифметическим крайних цифр. В ответе укажите ровно одно такое число.

Пояснение.

Число даёт одинаковые остатки при делении на 5 и 8. Значит, оно даёт такой же остаток и по модулю 40. То есть число имеет вид $40k + p$, $0 < p < 5$. Первая цифра не меньше 5. Первая и последняя цифры в сумме дают чётное число. Разность числа и p делится на 40, то есть число, образованное первыми двумя цифрами, делится на 4. Теперь можно выписать все числа, которые подходят под эти условия: 642, 963.

40.

Приведите пример трёхзначного натурального числа, которое при делении на 4 и на 15 даёт равные ненулевые остатки и средняя цифра которого является средним арифметическим крайних цифр. В ответе укажите ровно одно такое число.

Пояснение.

Если число даёт одинаковые остатки при делении на 4 и на 15, то оно даёт такой же остаток и при делении на 60. То есть теперь мы знаем, что на наше число имеет вид $60k + p$, $0 < p < 4$. То есть разность нашего числа и p должна делиться на 60, то есть число, образованное первыми двумя цифрами, должно делиться на 6. А если число делится на 6, то оно также делится на 2 и на 3. А это значит, что последняя его цифра чётная, а сумма цифр делится на 3. Из условия на среднее арифметическое также следует, что сумма первой и последней цифры в исходном числе чётная. Переберём последнюю и вторую цифры, а по ним однозначно восстановим первую и получим числа: 123, 543, 963.

41.

Приведите пример трёхзначного натурального числа, которое при делении на 4 и на 15 даёт равные ненулевые остатки и первая справа цифра которого является средним арифметическим двух других цифр. В ответе укажите ровно одно такое число.

Пояснение.

Если число даёт одинаковые остатки при делении на 4 и на 15, то оно даёт такой же остаток и при делении на 60. То есть теперь мы знаем, что на наше число имеет вид $\overline{60k + p}$, $p < 4$. То есть разность нашего числа и p должна делиться на 60, то есть число, образованное первыми двумя цифрами, должно делиться на 6. А если число делится на 6, то оно также делится на 2 и на 3. А это значит, что последняя его цифра чётная, а сумма цифр делится на 3. А из условия на среднее арифметическое следует, что сумма этих цифр также чётная. Под все эти условия подходят числа 24, 42 и 60. А соответствующие им исходные числа будут равны 243, 423 и 603.

42.

Приведите пример трёхзначного натурального числа, которое при делении на 4 и на 15 даёт равные ненулевые остатки и первая справа цифра которого является средним арифметическим двух других цифр. В ответе укажите ровно одно такое число.

Пояснение.

Если число даёт одинаковые остатки при делении на 4 и на 15, то оно даёт такой же остаток и при делении на 60. То есть теперь мы знаем, что на наше число имеет вид $\overline{60k + p}$, $p < 4$. То есть разность нашего числа и p должна делиться на 60, то есть число, образованное первыми двумя цифрами, должно делиться на 6. А если число делится на 6, то оно также делится на 2 и на 3. А это значит, что последняя его цифра чётная, а сумма цифр делится на 3. А из условия на среднее арифметическое следует, что сумма этих цифр также чётная. Под все эти условия подходят числа 24, 42 и 60. А соответствующие им исходные числа будут равны 243, 423 и 603.

43.

Приведите пример трёхзначного натурального числа, кратного 4, сумма цифр которого равна их произведению. В ответе укажите ровно одно такое число.

Пояснение.

Можно заметить, что если среди цифр есть хотя бы две единицы, то равенство невозможно, так как сумма будет больше произведения. То же самое, если единиц нет вообще. В этом случае произведение будет слишком большое. Таким образом, среди цифр есть ровно одна единица. Число делится на 4, значит, последняя цифра чётная, а это значит, что произведение тоже чётное. А значит, и сумма. И так как последняя цифра чётная, то оставшиеся две цифры должны быть одной чётности. А так как мы выяснили, что среди цифр есть ровно одна единица, то эти числа нечётные. Под эти ограничения подходят числа: 132, 136, 152, 156, 172, 176, 192, 196, 312, 316, 512, 516, 712, 716, 912, 916, из которых удовлетворяют всем условиям только числа 132 и 312.

44.

Приведите пример четырёхзначного числа, кратного 12, произведение цифр которого больше 40, но меньше 45. В ответе укажите ровно одно такое число.

Пояснение.

Если число делится на 12, то оно делится на 3 и на 4. Если число делится на 3, то сумма всех его цифр тоже делится на 3. Если число делится на 4, то число, образованное двумя последними его цифрами тоже делится на 4. Пусть наше число имеет вид $\overline{abcd}$, тогда условие записывается так:

$$\begin{cases} 0 \leq a, b, c, d \leq 9, \\ \overline{a+b+c+d} = 3k, k \in N, \\ 40 < \overline{a \cdot b \cdot c \cdot d} < 45, \\ \overline{10c+d} = 4p, p \in N. \end{cases}$$

В интервале $(40; 45)$ находятся числа 41, 42, 43, 44. 41 и 43 — простые, а 44 делится на 11 — тоже простое. Таким образом, 41, 43 и 44 не подходят, потому что не могут быть представлены в виде произведения. То есть $\overline{a \cdot b \cdot c \cdot d} = 42$. Два набора цифр подходят как решение: (1, 2, 3, 7) и (1, 1, 6, 7). Но в первом наборе сумма цифр не кратна трём, так что он отпадает. Имеем (1, 1, 6, 7). Последняя цифра в числе должна быть чётной, иначе число не будет делиться на 4. $d = 6$. Остальные цифры могут стоять в любом порядке.

Выпишем искомые числа: 1176, 1716, 7116.

45.

Цифры четырёхзначного числа, кратного 5, записали в обратном порядке и получили второе четырёхзначное число. Затем из первого числа вычли второе и получили 1458. Приведите ровно один пример такого числа.

Пояснение.

Число делится на 5, значит, его последняя цифра или 0, или 5. Но так как при записи в обратном порядке цифры также образуют четырёхзначное число, то эта цифра 5, ибо число не может начинаться с 0. Пусть число имеет вид $\overline{abc5}$. Тогда условие можно записать так:

$$1000a + 100b + 10c + 5 - (5000 + 100c + 10b + a) = 1458 \Leftrightarrow 999(a - 5) + 90(b - c) = 1458$$

Второе слагаемое в левой части делится на 10. Значит, за разряд единиц в сумме отвечает только первое слагаемое. То есть $9(a - 5) \bmod 10 = 8$. Откуда $a = 7$. Подставив полученное значение в уравнение, получим, что $90(b - c) = -540 \Leftrightarrow b - c = -6$. Перебрав все пары b и c , которые являются решением этого равенства, выпишем все числа, являющиеся ответом: 7065, 7175, 7285, 7395.

46.

Найдите четырёхзначное натуральное число, меньшее 1360, которое делится на каждую свою цифру и все цифры которого различны и не равны нулю. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Пояснение.

Пусть $abcd$ - искомое число (a - число тысяч, b - число сотен, c - число десятков, d - число единиц). По условию $abcd < 1360$. Кроме того, $a \neq b \neq c \neq d \neq 0$. Проанализируем теперь то, что искомое число делится на каждую свою цифру.

Если искомое число содержит цифру 5, то эта цифра должна стоять на 4-м месте. Это просто понять из того, что признак делимости на 5 - это 0, или 5 на конце числа. Если цифра 5 будет стоять где-нибудь не на последнем месте, то тогда, согласно признаку делимости 5, еще одна 5 будет стоять в конце числа, а это противоречит условию задачи.

Первая цифра - единица. Это очевидно из того, что искомое число меньше 1360.

На втором месте могут стоять цифры 1,2,3. Но число 1 уже было, поэтому на 2-м месте могут стоять цифры 2 и 3.

Если на втором месте цифра 2, то число должно делиться на 2, т.е. четвертом месте обязательно должно стоять четная цифра - 4,6,8.

Если число оканчивается на 4, то последние две цифры числа должны делиться на 4: 14 (не может быть), 24 (не может быть), 34 (не может быть), 44 (не может быть), 54 (не может быть), 64 (тогда число должно делиться на 3; признак делимости 3 - сумма цифр делится на 3, поэтому проверим получившееся число 1264: $1+2+6+4=13$ - не подходит), 74 (не может быть), 84 (число должно делиться на 8, то есть три последние цифры числа должны составлять число, которое делится на 8: 284 не делится на 8 без остатка), 94 (не может быть)

Если число оканчивается на 6, то сумма цифр числа должна делиться на 3. У нас есть сумма трех цифр: $1+2+6=9$. Таким образом, на третьем месте может стоять цифра 3, и 9 (обе цифры подходят, поскольку сумма цифр в этом случае будет делиться, как на 3 и 6, так на 3 и 9. Таким образом, мы нашли числа **1236**, **1296**.

Если число оканчивается на 8, то последние три цифры числа должны делиться на 8. Мы имеем число в общем виде $2x8$, где x - число десятков. 248 делится на 8, а также последние две цифры делятся на 4. Таким образом, число **1248** - одно из искомым чисел.

Если на втором месте цифра 3, то сумма цифр числа должна делиться на 3. Сумма первых двух цифр: $1+3=4$. Тогда сумма всех 4 цифр может быть максимум 21. Рассмотрим варианты:

$4+x+y=21$ ($x=8, y=9$ не подходят, так как число должно быть меньше 1360)

$4+x+y=18$ ($x+y=14$: $x=5, y=9$ - не подходит, так как если число 5 будет стоять на конце, то искомое число будет больше 1360, $x=6, y=8$ - не подходит, $x=7, y=7$ - не подходит)

$4+x+y=15$ ($x+y=11$: $x=2, y=9$ - не подходит, $x=3, y=8$ - не подходит, $x=4, y=7$ - не подходит, $x=5, y=6$ - не подходит)

$4+x+y=12$ ($x+y=8$: $x=7, y=1$ - не подходит, $x=2, y=6$ - число 1326 делится на каждую из своих цифр, $x=3, y=5$ - не подходит, $x=4, y=4$ - не подходит)

$4+x+y=9$ ($x+y=5$: $x=4, y=1$ - не подходит, $x=3, y=2$ - не подходит)

$4+x+y=6$ ($x+y=2$: $x=1, y=1$ - не подходит)

$4+x+y=3$ ($x+y=1$ - не возможно, в связи с тем, что ни одна из цифр нулю не равняется).

Таким образом, это еще одно найденное число - **1326**

Ответ: 1236, 1296, 1248, 1326

47.

Найдите натуральное число, большее 1340, но меньшее 1640, которое делится на каждую свою цифру и все цифры которого различны и не равны нулю. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Пояснение.

Пусть $abcd$ - искомое число (a - число тысяч, b - число сотен, c - число десятков, d - число единиц). По условию $abcd < 1640$. Кроме того, $a \neq b \neq c \neq d \neq 0$. Проанализируем теперь то, что искомое число делится на каждую свою цифру.

Если искомое число содержит цифру 5, то эта цифра должна стоять на 4-м месте. Это просто понять из того, что признак делимости на 5 - это 0, или 5 на конце числа. Если цифра 5 будет стоять где-нибудь не на последнем месте, то тогда, согласно признаку делимости 5, еще одна 5 будет стоять в конце числа, а это противоречит условию задачи.

Первая цифра - единица. Это очевидно из того, что искомое число больше 1340 и меньше 1640.

На втором месте могут стоять цифры 3, 4, 6.

Если на втором месте стоит цифра 3, то сумма цифр числа должна делиться на 3. Сумма первых двух цифр: $1+3=4$. Тогда сумма всех 4 цифр, которая делится на 3, может быть максимум 21. Рассмотрим варианты:

$4+x+y=21$ ($x=8, y=9$: 1389 - не подходит, так как не делится на 8, 1398 - не делится на 9)

$4+x+y=18$ ($x+y=14$: $x=5, y=9$ - **1395** - число делится на 3, на 9 и на 5, $x=6, y=8$ - **1368** - число делится на 3, на 6, на 8, $x=7, y=7$ - не подходит)

$4+x+y=15$ ($x+y=11$: $x=2, y=9$ - не подходит, $x=3, y=8$ - не подходит, $x=4, y=7$ - не подходит, $x=5, y=6$ - не подходит)

$4+x+y=12$ ($x+y=8$: $x=7, y=1$ - не подходит, $x=2, y=6$ - **1362** - число делится на каждую из своих цифр, $x=3, y=5$ - не подходит, $x=4, y=4$ - не подходит)

$4+x+y=9$ ($x+y=5$: $x=4, y=1$ - не подходит, $x=3, y=2$ - не подходит)

$4+x+y=6$ ($x+y=2$: $x=1, y=1$ - не подходит)

$4+x+y=3$ ($x+y=1$ - не возможно, в связи с тем, что ни одна из цифр нулю не равняется).

Если на втором месте цифра 4, то последние две цифры должны делиться на 4. Среди таких чисел (без повторяющихся цифр): 28 (не подходит), 32 (не подходит), 36 (не подходит), 68 (не подходит), 72 (не подходит), 76 (не подходит), 82 (не подходит), 86 (не подходит), 98 (не подходит).

Если на втором месте стоит цифра 6, то сумма цифр числа должна делиться на 3 и, кроме того, число должно оканчиваться на четную цифру. Сумма первых двух цифр $1+6=7$. Тогда сумма всех 4 цифр, которая делится на 3, может быть максимум 24. Рассмотрим варианты:

$7+x+y=24$ ($x+y=17$, $x=8, y=9$ не подходят, так как число должно быть меньше 1640)

$7+x+y=21$ ($x+y=14$: $x=5, y=9$ - не подходит, $x=6, y=8$ - не подходит, $x=7, y=7$ - не подходит)

$7+x+y=18$ ($x+y=11$: $x=2, y=9$ - не подходит, $x=3, y=8$ - не подходит, $x=4, y=7$ - не подходит, $x=5, y=6$ - не подходит)

$7+x+y=15$ ($x+y=8$: $x=7, y=1$ - не подходит, $x=2, y=6$ - не подходит, $x=3, y=5$ - не подходит, $x=4, y=4$ - не подходит)

$7+x+y=12$ ($x+y=5$: $x=4, y=1$ - не подходит, $x=3, y=2$ - число **1632** делится на каждую из своих цифр)

$7+x+y=9$ ($x+y=2$: $x=1, y=1$ - не подходит)

Ответ: 1395, 1368, 1362, 1632

48.

Найдите трёхзначное число A , обладающее всеми следующими свойствами:

- сумма цифр числа A делится на 5;
- сумма цифр числа $(A + 4)$ делится на 5;
- число A больше 350 и меньше 400.

В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Пояснение.

Пусть наше число имеет вид $3yz$. Если $z < 6$, тогда, прибавляя 4, получим, что в новом числе сумма цифр изменится на 4 по сравнению с суммой цифр в исходном числе, и тогда эти оба числа не смогут делиться на 5. Значит, $z \geq 6$.

Рассмотрим два случая.

1) $y = 9$: $39z$ перейдёт в $40(z - 6)$, сумма цифр изменится на 14.

2) $y < 9$: $3yz$ перейдёт в $3(y + 1)(z - 6)$, сумма цифр изменится на 5.

Во втором случае сумма цифр будет отличаться на 5, то есть также будет делиться на 5.

Таким образом, искомые числа: 357, 366, 389.

Ответ: 357, 366, 389.

49.

Найдите трёхзначное число A , обладающее всеми следующими свойствами:

- сумма цифр числа A делится на 4;
 - сумма цифр числа $(A + 2)$ делится на 4;
 - число A больше 200 и меньше 400.
- В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Пояснение.

Пусть число имеет вид $\overline{abc}$. Если $c < 8$, то сумма цифр в новом числе будет на 2 больше, чем в исходном, и обе они не могут делиться на 4. Значит, $c \geq 8$. Рассмотрим теперь 2 случая:

1) $\overline{abc}, b = 9$. Число перейдёт в $\overline{30(c-8)}$ (для $a = 2$) или в $\overline{40(c-8)}$ (для $a = 3$), сумма изменится на 16

2) $\overline{abc}, b < 9$. Число перейдёт в $\overline{a(b+1)(c-8)}$, сумма изменится на 7.

Итак, условиям задачи удовлетворяют числа вида $\overline{abc}$, $b = 9$, $c \geq 8$. Так как $a < 4$, несложно найти такие числа: 299, 398

Ответ: 299, 398.

50.

Найдите четырехзначное число, кратное 66, все цифры которого различны и четны. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Пояснение.

Наименьшее четырехзначное число, кратное 66, — число 1056. Чтобы первая цифра была четной удвоим его, получим 2112, добавим $66 \cdot 2 = 132$, чтобы и вторая цифра стала четной, получим 2244, и будем добавлять по 66 до тех пор, цифры не станут различными. Добавив 6 раз, получим 2640. (Возможны и другие примеры.)

51.

Найти четырехзначное число, кратное 44, любые две соседние цифры которого отличаются на 1. В ответе укажите любое такое число.

Пояснение.

Одно из четырехзначных чисел, кратных 44, равно 1012, оно удовлетворяет условию.

Ответ: 1012 или 3432, или 5456, или 3212, или 1232, или 5676, или 7876, или 7656.

52.

Найдите трёхзначное натуральное число, большее 500, которое при делении на 8 и на 5 даёт равные ненулевые остатки и средняя цифра которого является средним арифметическим крайних цифр. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Пояснение.

Число имеет одинаковые остатки при делении на 8 и на 5, следовательно, число имеет тот же остаток при делении на 40, причём этот остаток не равен нулю и меньше пяти. Таким образом, искомое число может иметь вид: $40n + 1, 40n + 2, 40n + 3, 40n + 4$.

При $n = 1, 2, \dots, 12$. Ни одно из чисел не больше 500

При $n = 13$: 521, 522, 523, 524. Средняя цифра не является средним арифметическим крайних цифр

При $n = 16$: 641, 642, 643, 644. Число 642 удовлетворяет всем условиям задачи.

При $n = 24$: 961, 962, 963, 964. Число 963 удовлетворяет всем условиям задачи.

53.

Найдите трёхзначное натуральное число, которое при делении на 4 и 15 даёт равные ненулевые остатки и средняя цифра которого является средним арифметическим крайних цифр. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Пояснение.

Число имеет одинаковые остатки при делении на 4 и на 15, следовательно, число имеет тот же остаток при делении на 60, причём этот остаток не равен нулю и меньше 4. Таким образом, искомое число может иметь вид: $60n + 1$, $60n + 2$, $60n + 3$.

При $n = 1$. Ни одно из чисел не трехзначное

При $n = 2$: 121, 122, 123. Число 123 удовлетворяет всем условиям задачи

При $n = 3$: 181, 182, 183. Средняя цифра не является средним арифметическим крайних цифр

При $n = 9$: 541, 542, 543. Число 543 удовлетворяет всем условиям задачи

При $n = 16$: 961, 962, 963. Число 963 удовлетворяет всем условиям задачи

Ответ: 123, 543, 963

54.

Вычеркните в числе 23462141 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 12. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Пояснение.

Так как число должно делиться на 12, то должно делиться на 2 и на 6 (на 6, на 2 и на 3), т. е. число должно быть чётным и сумма цифр должна делиться на 3.

Таким образом, зачеркнём последнюю цифру, останется 2346214. Сумма цифр равна 22. Т. к. делится на 3, то это может быть 21, но для этого вычёркивается только одна цифра 1, а нужно вычеркнуть две цифры. Другим числом может быть число 18, для этого вычеркнем 2 цифры. Это могут быть 3 и 1 (т. к. $22 - 18 = 4$). Получим число 24624.

Ответ: 24624.

55.

Найдите пятизначное натуральное число, кратное 5, сумма цифр которого равна их произведению. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Пояснение.

Число делится на 5, если его последняя цифра делится на 5 (то есть равна 0 или 5). Но последняя цифра не может быть нулем, поскольку произведение цифр будет равно нулю и никогда не будет равно сумме цифр. Таким образом, данное число оканчивается на 5.

Примерами таких чисел могут служить: 11125, 12115, 11215, 21115...

Ответ: 11125 или 12115 или 11215 или 21115.