

Задачи на смекалку

1.

Каждую секунду бактерия делится на две новые бактерии. Известно, что весь объём одного стакана бактерии заполняют за 1 час. За сколько секунд стакан будет заполнен бактериями наполовину?

Пояснение.

Заметим, что каждую секунду в стакане становится в два раза больше бактерий. То есть если в какой-то момент бактериями заполнена половина стакана, то через секунду будет заполнен весь стакан. Таким образом, полстакана будет заполнено через 59 минут и 59 секунд то есть через 3599 секунд.

2.

На палке отмечены поперечные линии красного, жёлтого и зелёного цвета. Если распилить палку по красным линиям, получится 15 кусков, если по жёлтым — 5 кусков, а если по зелёным — 7 кусков. Сколько кусков получится, если распилить палку по линиям всех трёх цветов?

Пояснение.

Если распилить палку по красным линиям, то получится 15 кусков, следовательно, линий — 14. Если распилить палку по жёлтым — 5 кусков, следовательно, линий — 4. Если распилить по зелёным — 7 кусков, линий — 6. Всего линий: $14 + 4 + 6 = 24$ линии, следовательно, кусков будет 25.

3.

Кузнечик прыгает вдоль координатной прямой в любом направлении на единичный отрезок за один прыжок. Кузнечик начинает прыгать из начала координат. Сколько существует различных точек на координатной прямой, в которых кузнечик может оказаться, сделав ровно 11 прыжков?

Пояснение.

Заметим, что кузнечик может оказаться только в точках с нечётными координатами, поскольку число прыжков, которое он делает, — нечётно. Максимально кузнечик может оказаться в точках, модуль которых не превышает одиннадцати. Таким образом, кузнечик может оказаться в точках: $-11, -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9$ и 11 ; всего 12 точек.

Ответ: 12.

4.

В корзине лежит 40 грибов: рыжики и грузди. Известно, что среди любых 17 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 25 грибов хотя бы один груздь. Сколько рыжиков в корзине?

Пояснение.

Согласно условию задачи: $(40 - 17) + 1 = 24$ - должно быть рыжиков. $(40 - 25) + 1 = 16$ - должно быть груздей. Таким образом, рыжиков в корзине 24.

Ответ: 24.

5.

Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живёт в седьмом подъезде в квартире № 462, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом семиэтажный. На каком этаже живёт Саша? (На всех этажах число квартир одинаково, номера квартир в доме начинаются с единицы.)

Пояснение.

Поскольку в первых 7 подъездах не меньше 462 квартир, в каждом подъезде не меньше $462 : 7 = 66$ квартир. Следовательно, на каждом из 7 этажей в подъезде не меньше 9 квартир.

Пусть на каждой лестничной площадке по 9 квартир. Тогда в первых семи подъездах всего $9 \cdot 7 \cdot 7 = 441$ квартир, и квартира 462 окажется в восьмом подъезде, что противоречит условию.

Пусть на каждой площадке по 10 квартир. Тогда в первых семи подъездах $10 \cdot 7 \cdot 7 = 490$ квартир, а в первых шести — 420. Следовательно, квартира 462 находится в седьмом подъезде. Она в нем 42-ая по счету, поскольку на этаже по 10 квартир, она расположена на пятом этаже.

Если бы на каждой площадке было по 11 квартир, то в первых шести подъездах оказалось бы $11 \cdot 7 \cdot 6 = 462$ квартиры, то есть 462 квартира в шестом подъезде, что противоречит условию.

Тем самым, Саша живёт на пятом этаже.

Ответ: 5

6.

Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живёт в восьмом подъезде в квартире № 468, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом двенадцатиэтажный. На каком этаже живёт Саша? (На всех этажах число квартир одинаково, номера квартир в доме начинаются с единицы.)

Пояснение.

Поскольку в первых 8 подъездах не меньше 468 квартир, в каждом подъезде не меньше $468 : 8 = 58,5$ квартир. Следовательно, на каждом из 12 этажей в подъезде не меньше 4 квартир.

Пусть на каждой лестничной площадке по 4 квартиры. Тогда в первых восьми подъездах всего $4 \cdot 8 \cdot 12 = 384$ квартиры, и квартира 468 окажется не в восьмом подъезде, что противоречит условию.

Пусть на каждой площадке по 5 квартир. Тогда в первых восьми подъездах $5 \cdot 8 \cdot 12 = 480$ квартир, а в первых семи — 420. Следовательно, квартира 468 находится в восьмом подъезде. Она в нем 48-ая по счету, поскольку на этаже по 5 квартир, она расположена на десятом этаже.

Если бы на каждой площадке было по 6 квартир, то в первых семи подъездах оказалось бы $6 \cdot 7 \cdot 12 = 504$ квартиры, то есть 482 квартира в седьмом подъезде, что противоречит условию.

Тем самым, Саша живёт на десятом этаже.

Ответ: 10

7.

Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живёт в двенадцатом подъезде в квартире № 465, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом пятиэтажный. На каком этаже живёт Саша? (На всех этажах число квартир одинаково, номера квартир в доме начинаются с единицы.)

Пояснение.

Поскольку в первых 12 подъездах не меньше 465 квартир, в каждом подъезде не меньше $465 : 12 = 38,75$ квартир. Следовательно, на каждом из 5 этажей в подъезде не меньше 7 квартир.

Пусть на каждой лестничной площадке по 7 квартир. Тогда в первых двенадцати подъездах всего $12 \cdot 7 \cdot 5 = 420$ квартир, и квартира 465 окажется в тринадцатом подъезде, что противоречит условию.

Пусть на каждой площадке по 8 квартир. Тогда в первых двенадцати подъездах $12 \cdot 8 \cdot 5 = 480$ квартир, а в первых одиннадцати — 440. Следовательно, квартира 465 находится в двенадцатом подъезде. Она в нем 25-ая по счету, поскольку на этаже по 8 квартир, она расположена на четвертом этаже.

Тем самым, Саша живёт на четвертом этаже.

Ответ: 4

8.

Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живёт в десятом подъезде в квартире № 333, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом девятиэтажный. На каком этаже живёт Саша? (На всех этажах число квартир одинаково, номера квартир в доме начинаются с единицы.)

Пояснение.

Поскольку в первых 10 подъездах не меньше 333 квартир, в каждом подъезде не меньше $333 : 10 = 33,3$ квартир. Следовательно, на каждом из 9 этажей в подъезде не меньше 3 квартир.

Пусть на каждой лестничной площадке по 3 квартиры. Тогда в первых десяти подъездах всего $10 \cdot 3 \cdot 9 = 270$ квартир, и квартира 333 окажется в одиннадцатом подъезде, что противоречит условию.

Пусть на каждой площадке по 4 квартиры. Тогда в первых десяти подъездах $10 \cdot 4 \cdot 9 = 360$ квартир, а в первых девяти — 324. Следовательно, квартира 333 находится в десятом подъезде. Она в нем 9-ая по счету, поскольку на этаже по 4 квартиры, она расположена на третьем этаже.

Тем самым, Саша живёт на третьем этаже.

Ответ: 3

9.

Тренер посоветовал Андрею в первый день занятий провести на беговой дорожке 15 минут, а на каждом следующем занятии увеличивать время, проведённое на беговой дорожке, на 7 минут. За сколько занятий Андрей проведёт на беговой дорожке в общей сложности 2 часа 25 минут, если будет следовать советам тренера?

Пояснение.

Время, проведённое на беговой дорожке представляет собой арифметическую прогрессию с первым членом равным 15 и разностью 7. Сумма n членов арифметической прогрессии может быть найдена по формуле:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n \Leftrightarrow 2 \cdot 60 + 25 = \frac{2 \cdot 15 + 7(n-1)}{2}n \Leftrightarrow 290 = 30n + 7n^2 - 7n.$$

Получили квадратное уравнение на n , решим его:

$$7n^2 + 23n - 290 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n < 0, \\ n = 5. \end{cases}$$

По условию задачи подходит значение $n = 5$.

Ответ: 5.

10.

Врач прописал пациенту принимать лекарство по такой схеме: в первый день он должен принять 3 капли, а в каждый следующий день — на 3 капли больше, чем в предыдущий. Приняв 30 капель, он ещё 3 дня пьёт по 30 капель лекарства, а потом ежедневно уменьшает приём на 3 капли. Сколько пузырьков лекарства нужно купить пациенту на весь курс приёма, если в каждом содержится 20 мл лекарства (что составляет 250 капель)?

Пояснение.

На первом этапе приёма капель число принимаемых капель в день представляет собой возрастающую арифметическую прогрессию с первым членом, равным 3, разностью, равной 3 и последним членом, равным 30. Следовательно,

этап, когда число капель в день возрастает продолжается $\frac{30-3}{3} + 1 = 10$ дней. Суммарное число капель, принятых в этот период, представляет собой сумму арифметической прогрессии:

$$S_{10} = \frac{3+30}{2} \cdot 10 = 165 \text{ капель.}$$

Затем в течение трёх дней пациент принимает ещё $3 \cdot 30 = 90$ капель. Последний этап приёма капель длится $\frac{27-3}{3} + 1 = 9$ дней. Аналогично первому этапу:

$$S_9 = \frac{3+27}{2} \cdot 9 = 135 \text{ капель.}$$

Таким образом, за весь курс приёма пациенту нужно принять $165 + 90 + 135 = 390$ капель. То есть нужно приобрести не меньше $\frac{390}{250} = 1\frac{14}{25}$ пузырьков лекарства. Минимальное количество пузырьков лекарства — 2.

Ответ: 2.

11.

Врач прописал пациенту принимать лекарство по такой схеме: в первый день он должен принять 20 капель, а в каждый следующий день — на 3 капли больше, чем в предыдущий. После 15 дней приёма пациент делает перерыв в 3 дня и продолжает принимать лекарство по обратной схеме: в 19-й день он принимает столько же капель, сколько и в 15-й день, а затем ежедневно уменьшает дозу на 3 капли, пока дозировка не станет меньше 3 капель в день. Сколько пузырьков лекарства нужно купить пациенту на весь курс приёма, если в каждом содержится 200 капель?

Пояснение.

С начала курса до 15 дня приёма лекарства (включительно), пациент будет принимать каждый день на три капли больше, чем в предыдущий, следовательно, к 15 дню приёма лекарства пациент примет 615 капель. С 19 дня до конца приёма лекарства он выпьет столько же, но на 55 капель больше. Следовательно, за весь курс приёма лекарства пациент выпьет $615 + 615 + 55 = 1285$ капель лекарства. Теперь найдём сколько пузырьков нужно купить: $1285 : 200 = 6,4$. Считаем полные пузырьки с лекарством — 7.

12.

Произведение десяти идущих подряд чисел разделили на 7. Чему может быть равен остаток?

Пояснение.

Среди 10 подряд идущих чисел одно из них обязательно будет делиться на 7, поэтому произведение этих чисел кратно семи. Следовательно, остаток от деления на 7 равен нулю.

Ответ: 0.

13.

Сколькими способами можно поставить в ряд два одинаковых красных кубика, три одинаковых зелёных кубика и один синий кубик?

Пояснение.

Занумеруем все кубики от одного до шести. Пока не учитываем, что в нашем наборе есть кубики одинакового цвета. На первое место можно поставить кубик шестью способами, на второе — пятью, на третье — четырьмя и так далее. Получаем, что всего возможностей расстановки кубиков $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Теперь учтём, что перестановка, например, двух красных кубиков не даёт нового способа расстановки кубиков. В любом полученном выше наборе можно переставить красные кубики местами, то есть число расстановок уменьшится в два раза. С зелёными кубиками аналогично. Зелёных кубиков три, поэтому в любом полученном выше наборе можно переставлять их, не получая новых способов расстановки кубиков. Таких перестановок зелёных кубиков $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Следовательно, искомое число способов равно: $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 60$.

Ответ: 60.

14.

В бак объёмом 38 литров каждый час, начиная с 12 часов, наливают полное ведро воды объёмом 8 литров. Но в днище бака есть небольшая щель, и из неё за час вытекает 3 литра. В какой момент времени (в часах) бак будет заполнен полностью.

Пояснение.

К концу каждого часа объём воды в баке увеличивается на $8 - 3 = 5$ литров. Через 6 часов, то есть в 18 часов, в баке будет 30 литров воды. В 18 часов в бак долёют 8 литров воды и объём воды в баке станет равным 38 литров.

Ответ: 18.

15.

Какое наименьшее число идущих подряд чисел нужно взять, чтобы их произведение делилось на 7?

Пояснение.

Достаточно взять два числа, одно из которых кратно семи, например, 7 и 8.

Ответ: 2.

Примечание.

Если бы условие задачи звучало так: «Какое наименьшее число идущих подряд чисел нужно взять, чтобы их произведение *гарантировано* делилось на 7?» То нужно было бы взять семь подряд идущих чисел.

16.

В результате паводка котлован заполнился водой до уровня 2 метра. Строительная помпа непрерывно откачивает воду, понижая её уровень на 20 см в час. Подпочвенные воды, наоборот, повышают

уровень воды в котловане на 5 см в час. За сколько часов работы помпы уровень воды в котловане опустится до 80 см?

Пояснение.

За час уровень воды в котловане уменьшается на $20 - 5 = 15$ см. Нужно откачать $2 \cdot 100 - 80 = 120$ см воды. Следовательно, уровень воды в котловане опустится до 80 см за $\frac{120}{15} = 8$ часов.

Ответ: 8.

17.

В меню ресторана имеется 6 видов салатов, 3 вида первых блюд, 5 видов вторых блюд и 4 вида десерта. Сколько вариантов обеда из салата, первого, второго и десерта могут выбрать посетители этого ресторана?

Пояснение.

Салат можно выбрать шестью способами, первое — тремя, второе — пятью, десерт — четырьмя. Следовательно, всего $6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 360$ вариантов обеда.

Ответ: 360.

18.

Нефтяная компания бурит скважину для добычи нефти, которая залегает, по данным геологоразведки, на глубине 3 км. В течение рабочего дня бурильщики проходят 300 метров в глубину, но за ночь скважина вновь «заиливается», то есть заполняется грунтом на 30 метров. За сколько рабочих дней нефтяники пробурят скважину до глубины залегания нефти?

Пояснение.

За день скважина увеличивается на $300 - 30 = 270$ м. к началу одиннадцатого рабочего дня нефтяники пробурят 2700 метров. За одиннадцатый рабочий день нефтяники пробурят ещё 300 метров, то есть дойдут до глубины 3 км.

Ответ: 11.

Примечание.

В действительности, часто, на настоящих буровых вышках, нефтяники бурят в три смены, поэтому у них скважины заливаются не успевают.

19.

Какое наименьшее число идущих подряд чисел нужно взять, чтобы их произведение делилось на 9?

Пояснение.

Достаточно взять два числа, одно из которых кратно девяти, например, 9 и 10.

Ответ: 2.

Примечание.

Если бы условие задачи звучало так: «Какое наименьшее число идущих подряд чисел нужно взять, чтобы их произведение *гарантировано* делилось на 9?» То нужно было бы взять шесть подряд идущих чисел.

20.

В обменном пункте можно совершить одну из двух операций:

- за 2 золотых монеты получить 3 серебряных и одну медную;
- за 5 серебряных монет получить 3 золотых и одну медную.

У Николая были только серебряные монеты. После нескольких посещений обменного пункта серебряных монет у него стало меньше, золотых не появилось, зато появилось 50 медных. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у Николая?

Пояснение.

Пусть Николай сделал сначала x операций второго типа, а затем y операций первого типа. Тогда имеем:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0, & \text{количество золотых монет не изменилось,} \\ x + y = 50, & \text{медных стало на 50 больше.} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20, \\ y = 30. \end{cases}$$

Тогда серебряных монет стало на $3y - 5x = 90 - 100 = -10$ больше, то есть на 10 меньше.

21.

На поверхности глобуса фломастером проведены 12 параллелей и 22 меридиана. На сколько частей проведённые линии разделили поверхность глобуса?

Меридиан — это дуга окружности, соединяющая Северный и Южный полюсы. Параллель — это окружность, лежащая в плоскости, параллельной плоскости экватора.

Пояснение.

Двенадцать параллелей разделили глобус на 13 частей, следовательно $13 \cdot 22 = 286$ — на столько частей разделят глобус 12 параллелей и 22 меридианы.

Ответ: 286.

22.

В корзине лежит 50 грибов: рыжики и грузди. Известно, что среди любых 28 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 24 грибов хотя бы один груздь. Сколько груздей в корзине?

Пояснение.

В корзине точно лежит 27 груздей и 23 рыжика, так как взять 28 груздей, как и 24 рыжика, не получится.

23.

Группа туристов преодолела горный перевал. Первый километр подъёма они преодолели за 50 минут, а каждый следующий километр проходили на 15 минут дольше предыдущего. Последний километр перед вершиной был пройден за 95 минут. После десятиминутного отдыха на вершине туристы начали спуск, который был более пологим. Первый километр после вершины был пройден за час, а каждый следующий на 10 минут быстрее предыдущего. Сколько часов группа затратила на весь маршрут, если последний километр спуска был пройден за 10 минут.

Пояснение.

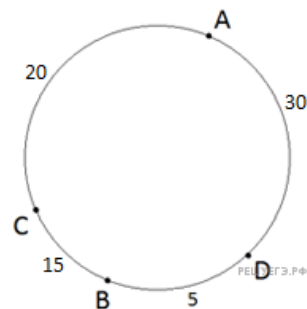
На подъём в гору группа затратила 290 минут, на отдых 10 минут, на спуск с горы 210 минут. В сумме туристы затратили на весь маршрут 510 минут. Переведём 510 минут в часы и получим, что за 8,5 часов туристы преодолели весь маршрут.

24.

На кольцевой дороге расположены четыре бензоколонки: А, В, С и D. Расстояние между А и В — 35 км, между А и С — 20 км, между С и D — 20 км, между D и А — 30 км (все расстояния измеряются вдоль кольцевой дороги в кратчайшую сторону). Найдите расстояние между В и С. Ответ дайте в километрах.

Пояснение.

Расположим А, В, С, D вдоль кольцевой дороги по очереди так, чтобы расстояния соответствовали данным в условии. Всё хорошо, кроме расстояния между D и А. Чтобы оно было таким, каким нужно, подвинем D и поставим между В и А нужным образом. Тогда между В и С будет 15 км.



Ответ: 15.

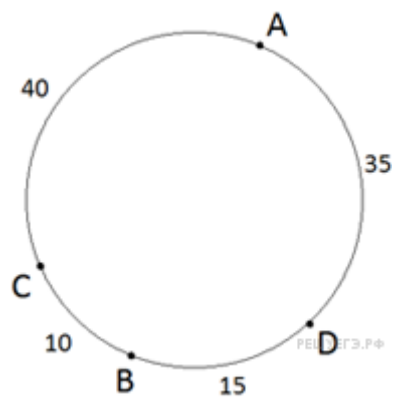
25.

На кольцевой дороге расположены четыре бензоколонки: А, В, С и D. Расстояние между А и В — 50 км, между А и С — 40 км, между С и D — 25 км, между D и А — 35 км (все расстояния измеряют-

ся вдоль кольцевой дороги в кратчайшую сторону). Найдите расстояние между В и С.

Пояснение.

Расположим А, В, С, D вдоль кольцевой дороги по очереди так, чтобы расстояния соответствовали данным в условии. Всё хорошо, кроме расстояния между D и А. Чтобы оно было таким, каким нужно, подвинем D и поставим между В и А нужным образом. Тогда между В и D будет 15 км. А между В и С — 10 км.



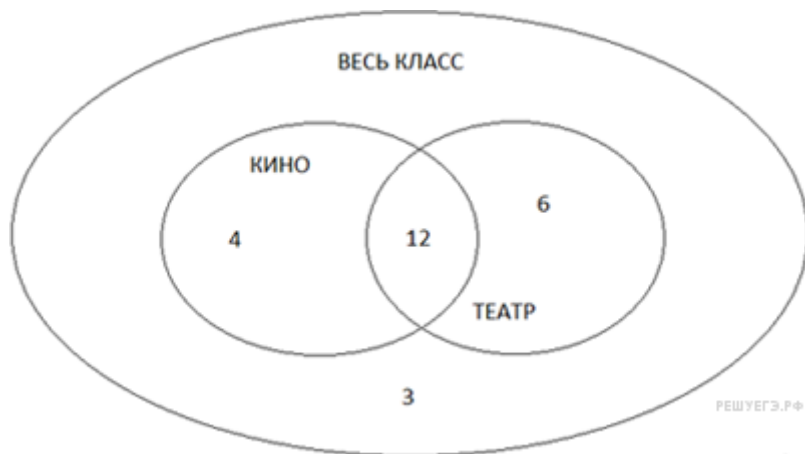
26.

В классе учится 25 учащихся. Несколько из них ходили в кино, 18 человек ходили в театр, причём и в кино, и в театр ходили 12 человек. Известно, что трое не ходили ни в кино, ни в театр. Сколько человек из класса ходили в кино?

Пояснение.

12 человек ходили и в кино, и в театр. А всего в театр ходило 18 человек. Значит, 6 человек ходили только в театр.

Сходили в театр или в кино и в театр, или никуда не ходили — $12 + 6 + 3 = 21$ человек. Значит, $25 - 21 = 4$ человека ходили только в кино. И значит всего в кино сходило $12 + 4 = 16$ человек.



27.

По эмпирическому закону Мура среднее число транзисторов на микросхемах каждый год удваивается. Известно, что в 2005 году среднее число транзисторов на микросхеме равнялось 520 млн. Определите, сколько в среднем миллионов транзисторов было на микросхеме в 2003 году.

Пояснение.

Каждый год число транзисторов удваивается, поэтому в 2004 году среднее число транзисторов равнялось $520/2 = 260$ млн, а в 2003 — $260/2 = 130$ млн.

Ответ: 130.

28.

В первом ряду кинозала 24 места, а в каждом следующем на 2 больше, чем в предыдущем. Сколько мест в восьмом ряду?

Пояснение.

Число мест в ряду представляет собой арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 24$ и разностью $d = 2$. Член арифметической прогрессии с номером k может быть найден по формуле

$$a_k = a_1 + (k - 1) \cdot d.$$

Необходимо найти a_8 , имеем:

$$a_8 = a_1 + (8 - 1) \cdot d = 24 + 7 \cdot 2 = 38.$$

Ответ: 38.

29.

На палке отмечены поперечные линии красного, жёлтого и зелёного цвета. Если распилить палку по красным линиям, получится 5 кусков, если по жёлтым — 7 кусков, а если по зелёным — 11 кусков. Сколько кусков получится, если распилить палку по линиям всех трёх цветов?

Пояснение.

Каждый распил увеличивает количество кусков на один. То есть всего 4 красные линии, 6 жёлтых и 10 зелёных. То есть вместе 20 линий. А кусков получится 21.

30.

В магазине бытовой техники объём продаж холодильников носит сезонный характер. В январе было продано 10 холодильников, и в три последующих месяца продавали по 10 холодильников. С мая продажи увеличивались на 15 единиц по сравнению с предыдущим месяцем. С сентября объём продаж начал уменьшаться на 15 холодильников каждый месяц относительно предыдущего месяца. Сколько холодильников продал магазин за год?

Пояснение.

Последовательно рассчитаем сколько холодильников было продано за каждый месяц и просуммируем результаты:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 10 + (10 + 15) + (10 + 30) + (10 + 45) + (10 + 60) + (10 + 45) + (10 + 30) + (10 + 15) + 10 = \\ = 12 \cdot 10 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot 30 + 2 \cdot 45 + 60 = 120 + 30 + 60 + 90 + 60 = 360 \end{aligned}$$

Ответ: 360.

31.

В обменном пункте можно совершить одну из двух операций:

- 1) за 3 золотых монеты получить 4 серебряных и одну медную;
- 2) за 6 серебряных монет получить 4 золотых и одну медную.

У Николы были только серебряные монеты. После посещений обменного пункта серебряных монет у него стало меньше, золотых не появилось, зато появилось 35 медных. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у Николы?

Пояснение.

Пусть Никола сделал сначала x операций второго типа, а затем y операций первого типа. Тогда имеем:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0, & \text{количество золотых монет не изменилось,} \\ x + y = 35, & \text{медных стало на 35 больше.} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15, \\ y = 20. \end{cases}$$

Тогда серебряных монет стало на $4y - 6x = 80 - 90 = -10$ больше, то есть на 10 меньше.

32.

Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живёт в седьмом подъезде в квартире № 462, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом семиэтажный. На каком этаже живёт Саша? (На каждом этаже число квартир одинаково, номера квартир в доме начинаются с единицы.)

Пояснение.

Поскольку в первых 7 подъездах не меньше 462 квартир, в каждом подъезде не меньше $462 : 7 = 66$ квартир. Следовательно, на каждом из 7 этаже в подъезде не меньше 9 квартир.

Пусть на каждой лестничной площадке по 9 квартир. Тогда в первых семи подъездах всего $9 \cdot 7 \cdot 7 = 441$ квартира, и квартира 462 окажется в восьмом подъезде, что противоречит условию.

Пусть на каждой площадке по 10 квартир. Тогда в первых семи подъездах $10 \cdot 7 \cdot 7 = 490$ квартир, а в первых шести — 420. Следовательно, квартира 462 находится в седьмом подъезде. Она в нем 42-ая по счету, поскольку на этаже по 10 квартир, она расположена на пятом этаже.

Если бы на каждой площадке было по 11 квартир, то в первых шести подъездах оказалось бы $11 \cdot 7 \cdot 6 = 462$ квартиры, то есть 462 квартира в шестом подъезде, что противоречит условию.

Тем самым, Саша живёт на пятом этаже.

Ответ: 5.

33.

Во всех подъездах дома одинаковое число этажей, а на каждом этаже одинаковое число квартир. При этом число этажей в доме больше числа квартир на этаже, число квартир на этаже больше числа подъездов, а число подъездов больше одного. Сколько этажей в доме, если всего в нём 110 квартир?

Пояснение.

Число квартир, этажей и подъездов может быть только целым числом. Заметим, что число 110 делится на 2, 5 и 11. Следовательно, в доме должно быть 2 подъезда, 5 квартир и 11 этажей.

Ответ: 11.

34.

Кузнечик прыгает вдоль координатной прямой в любом направлении на единичный отрезок за прыжок. Сколько существует различных точек на координатной прямой, в которых кузнечик может оказаться, сделав ровно 6 прыжков, начиная прыгать из начала координат?

Пояснение.

Заметим, что кузнечик может оказаться только в точках с чётными координатами, поскольку число прыжков, которое он делает, — чётно. Максимально кузнечик может оказаться в точках, модуль которых не превышает шести. Таким образом, кузнечик может оказаться в точках: $-6, -4, -2, 0, 2, 4$ и 6 ; всего 7 точек.

Ответ: 7.

35.

В корзине лежат 40 грибов: рыжики и грузди. Известно, что среди любых 17 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 25 грибов хотя бы один груздь. Сколько рыжиков в корзине?

Пояснение.

В корзине имеется как минимум 24 рыжика. Иначе мы бы могли взять 17 груздей, и первое условие бы не выполнилось. Аналогично из второго условия вытекает, что в корзине как минимум 16 груздей. Из этих двух утверждений можно сделать вывод, что в корзине ровно 24 рыжика и 16 груздей.

Дублирует задание 506363.

36.

В корзине лежат 25 грибов: рыжики и грузди. Известно, что среди любых 11 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 16 грибов хотя бы один груздь. Сколько рыжиков в корзине?

Пояснение.

Пусть мы взяли 10 груздей. Тогда все остальные грибы — рыжики, иначе бы мы взяли груздь и условие бы нарушилось. Таким образом, в корзине минимум 15 рыжиков. Теперь возьмём 15 рыжиков. Тогда все остальные грузди, иначе аналогично первому случаю мы бы взяли один из оставшихся рыжиков, и условие бы не выполнилось. Отсюда следует, что в корзине минимум 10 груздей. Минимум 15 рыжиков и минимум 10 груздей. А всего грибов 25. Значит, среди них именно 15 рыжиков и 10 груздей.

37.

В корзине лежат 30 грибов: рыжики и грузди. Известно, что среди любых 12 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов хотя бы один груздь. Сколько рыжиков в корзине?

Пояснение.

В корзине есть как минимум 19 рыжиков. Иначе можно было бы взять 12 груздей и первое условие не выполнялось. Аналогично из второго условия следует, что в корзине как минимум 11 груздей. Сопоставляя эти два факта, получим, что в корзине именно 19 рыжиков и 11 груздей.

Ответ: 19.

Дублирует задание 506363.

38.

На глобусе фломастером проведены 17 параллелей (включая экватор) и 24 меридиана. На сколько частей проведённые линии разделяют поверхность глобуса?

Пояснение.

Представим, что на глобусе ещё не нарисованы параллели и меридианы. Заметим, что 24 меридиана разделят глобус на 24 части. Рассмотрим сектор, образованный двумя соседними меридианами. Проведение первой параллели разделит сектор на две части, проведение второй добавить ещё одну часть, и так далее, таким образом, 17 параллелей разделят сектор на 18 частей. Следовательно, весь глобус будет разбит на $24 \cdot 18 = 432$ части.

Ответ: 432.

39.

Улитка за день заползает вверх по дереву на 4 м, а за ночь сползает на 3 м. Высота дерева 10 м. За сколько дней улитка впервые доползёт до вершины дерева?

Пояснение.

За день улитка заползёт на 4 метра, а за ночь — сползёт на 3 метра. Итого за сутки она заползёт на метр. За шестеро суток она поднимется на высоту шести метров. И днём следующего, седьмого, дня она окажется на вершине дерева.

40.

Улитка за день заползает вверх по дереву на 4 м, а за ночь сползает на 1 м. Высота дерева 13 м. За сколько дней улитка впервые доползёт до вершины дерева?

Пояснение.

За день улитка заползёт на 4 метра, а за ночь спустится на 1 метр. Итого за сутки она поднимется на 3 метра. За трое суток она окажется на высоте 9 метров. И во время следующего дня заползёт на вершину дерева.

41.

Хозяин договорился с рабочими, что они выкопают ему колодец на следующих условиях: за первый метр он заплатит им 4200 рублей, а за каждый следующий метр — на 1300 рублей больше, чем за предыдущий. Сколько денег хозяин должен будет заплатить рабочим, если они выкопают колодец глубиной 11 метров?

Пояснение.

Последовательность цен за метр — арифметическая прогрессия с первым членом $a_1 = 4200$ и разностью $d = 1300$. Сумма первых n членов арифметической прогрессии вычисляется по формуле

$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$. В нашем случае имеем:

$$S_{11} = \frac{2 \cdot 4200 + 10 \cdot 1300}{2} \cdot 11 = 117700.$$

Тем самым, цена работы составляет 117 700 руб.

Ответ: 117 700.

42.

Хозяин договорился с рабочими, что они копают колодец на следующих условиях: за первый метр он заплатит им 3500 рублей, а за каждый следующий метр — на 1600 рублей больше, чем за

предыдущий. Сколько денег хозяин должен будет заплатить рабочим, если они выкопают колодец глубиной 9 метров?

Пояснение.

Последовательность цен за метр — арифметическая прогрессия с первым элементом $a_1 = 3500$ и разностью $d = 1600$. Сумма первых n элементов арифметической прогрессии —

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}. \quad \text{То есть в нашем случае имеем}$$
$$S_9 = \frac{9 \cdot (2 \cdot 3500 + 8 \cdot 1600)}{2} = 89100.$$

Примечание.

Цены завышены в несколько раз. Видимо, составители ЕГЭ никогда не рыли колодцев.

43.

В корзине лежит 45 грибов: рыжики и грузди. Известно, что среди любых 23 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 24 грибов хотя бы один груздь. Сколько рыжиков в корзине?

Пояснение.

Так как среди любых 23 грибов хотя бы один — рыжик, то груздей не больше 22. Так как среди любых 24 грибов хотя бы один — груздь, то рыжиков не больше 23. А так как всего в корзине 45 грибов, то груздей ровно 22, а рыжиков ровно 23.

Ответ: 23

44.

В корзине лежит 25 грибов: рыжики и грузди. Известно, что среди любых 11 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 16 грибов хотя бы один груздь. Сколько рыжиков в корзине?

Пояснение.

Так как среди любых 11 грибов хотя бы один — рыжик, то груздей не больше 10. Так как среди любых 16 грибов хотя бы один — груздь, то рыжиков не больше 15. А так как всего в корзине 25 грибов, то груздей ровно 10, а рыжиков ровно 15.

Ответ: 15

45.

Список заданий викторины состоял из 25 вопросов. За каждый правильный ответ ученик получал 7 очков, за неправильный ответ с него списывали 10 очков, а при отсутствии ответа давали 0 очков. Сколько верных ответов дал ученик, набравший 42 очка, если известно, что по крайней мере один раз он ошибся?

Пояснение.

Он дал x правильных ответов, y неправильных ($y \geq 1$) и на z вопросов не ответил совсем.

$$x + y + z = 25$$

За каждый правильный ответ он получал 7, за неправильный (-10), за неосвещенный вопрос — 0.

$$7x - 10y + 0z = 42.$$

Получили систему из двух уравнений с тремя неизвестными, подберём решения данной системы уравнений.

$$\begin{aligned}x + y + z &= 25 \\ 7x - 10y &= 42 = 7 \cdot 6\end{aligned}$$

Из второго уравнения

$$7x - 7 \cdot 6 = 7(x - 6) = 10y$$

Так как число $7(x - 6)$ делится на 7, то и $10y$ делится на 7. Рассмотрим два случая.

1) $y = 7$, тогда $x - 6 = 10$, то есть $x = 6 + 10 = 16$,

$$z = 25 - x - y = 25 - 16 - 7 = 2.$$

2) $y = 14$, тогда $7(x - 6) = 140$, то есть количество правильно отвеченных вопросов $x = 20 + 6 = 26 > 25$. Это противоречит условию задачи.

Таким образом, ученик правильно ответил на 16 вопросов.

Ответ: 16

46.

На палке отмечены поперечные линии красного, желтого и зеленого цвета. Если распилить палку по красным линиям, то получится 5 кусков, если по желтым — 7 кусков, а если по зеленым — 11 кусков. Сколько кусков получится, если распилить палку по линиям всех трех цветов?

Пояснение.

Распилим на 5 кусков по красным линиям, при распиле по желтым добавится еще 6 кусков, а при распиле по зеленым линиям — еще 10 кусков. Всего получится 21 кусок палки.

47.

Улитка за день заползает вверх по дереву на 2 м, а за ночь сползает на 1 м. Высота дерева 11 м. За сколько дней улитка доползёт от основания до вершины дерева?

Пояснение.

Улитка за день поднимается вверх на 2 м, а опускается вниз на 1 м. Итого за сутки она продвигается на 1 м. За 9 суток она поднимется на 9 м. На 10 день она достигнет вершины дерева.

Ответ: 10

48.

Улитка за день заползает вверх по дереву на 4 м, а за ночь сползает на 2 м. Высота дерева 14 м. За сколько дней улитка доползёт от основания до вершины дерева?

Пояснение.

Улитка за день поднимается вверх на 4 м, а опускается вниз на 2 м. Итого за сутки она продвигается на 2 м. За 5 суток она поднимется на 10 м. За 6 день улитка поднимется ещё на 4 м и окажется на высоте 14 м, то есть она достигнет вершины дерева.

Ответ: 6.

49.

Прямоугольник разбит на четыре меньших прямоугольника двумя прямолинейными разрезами. Периметры трёх из них, начиная с левого верхнего и далее по часовой стрелке, равны 24, 28 и 16. Найдите периметр четвёртого прямоугольника.

24	28
?	16

Пояснение.

Введём обозначения, как показано на рисунке. Периметр верхнего левого прямоугольника равна 24, поэтому $2(a + c) = 24$, аналогично, $2(a + d) = 28$, $2(b + d) = 16$. При помощи полученной системы уравнений выразим значение $b + c$:

	c	d
a	24	28
b	?	16

$$\begin{cases} a + c = 12, \\ a + d = 14, \\ b + d = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 - c, \\ d = 14 - a, \\ b + d = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 - c, \\ d = 2 + c, \\ b + c + 2 = 8. \end{cases}$$

Из третьего уравнения получаем: $b + c = 6$, следовательно, искомый периметр равен 12.

Ответ: 12.

50.

В обменном пункте можно совершить одну из двух операций:

- 1) за 4 золотых монеты получить 5 серебряных и одну медную;
- 2) за 7 серебряных монет получить 5 золотых и одну медную.

У Николая были только серебряные монеты. После нескольких посещений обменного пункта серебряных монет у него стало меньше, золотых не появилось, зато появилось 90 медных. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у Николая?

Пояснение.

Последовательно получаем:

$$\begin{cases} 4z = 5c + 1m, \\ 7c = 5z + 1m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4z - 5c - 1m = 0, | \cdot 5 \\ -5z + 7c - 1m = 0 | \cdot 4 \end{cases} \Leftrightarrow + \begin{cases} 20z - 25c - 5m = 0, \\ -20z + 28c - 4m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3c - 9m = 0 \Leftrightarrow 3c = 9m \Leftrightarrow 1c = 3m.$$

Если Николай за 1 серебряную получил 3 медных, а у него появилось 90 медных, то он истратил 30 серебряных (т. к. $90 : 3 = 30$ серебряных).

Таким образом, у него количество монет уменьшилось на 30.

Ответ: 30.