Вычисление значений тригонометрических выражений

1.

Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Пояснение.

Поскольку угол альфа лежит в четвёртой четверти, его тангенс отрицателен. Поэтому

$$\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = -\sqrt{10-1} = -3.$$

Ответ: -3.

2.

Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

Пояснение.

Поскольку $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, его тангенс положителен. Поэтому

$$\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1} = \sqrt{\frac{26}{25} - 1} = \frac{1}{5}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = 5.$$

Ответ: 5.

3.

Найдите $3\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Пояснение.

Поскольку угол α лежит в четвертой четверти, его косинус положителен. Поэтому

$$3\cos\alpha = 3\sqrt{1-\sin^2\alpha} = 3\sqrt{1-\frac{8}{9}} = 1.$$

Ответ: 1.

4.

Найдите $5\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Пояснение.

Поскольку $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, определяем, что $\sin\alpha < 0$. Тогда

$$5\sin\alpha = -5\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2} = -5\sqrt{1-\frac{24}{25}} = -1.$$

Ответ: -1.

5.

Найдите $24\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0,2$.

Пояснение.

Используем формулу косинуса двойного угла $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$. Имеем:

$$24\cos 2\alpha = 24(1 - 2\cdot 0,04) = 24\cdot 0,92 = 22,08.$$

Ответ: 22,08.

6.

Найдите $\dfrac{10\sin 6\alpha}{3\cos 3\alpha}$, если $\sin 3\alpha = 0,6$.

Пояснение.

Выполним преобразования:

$$\frac{10\sin 6\alpha}{3\cos 3\alpha} = \frac{10\cdot 2\sin 3\alpha\cos 3\alpha}{3\cos 3\alpha} = \frac{20\sin 3\alpha}{3} = \frac{20\cdot 0,6}{3} = 4.$$

Ответ: 4.

7.

Найдите значение выражения $5\operatorname{tg}(5\pi - \gamma) - \operatorname{tg}(-\gamma)$, если $\operatorname{tg}\gamma = 7$.

Пояснение.

В силу периодичности тангенса $\operatorname{tg}(5\pi - \gamma) = \operatorname{tg}(-\gamma)$. Поэтому

$$5\operatorname{tg}(5\pi - \gamma) - \operatorname{tg}(-\gamma) = -5\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma = -4\operatorname{tg}\gamma = -4\cdot 7 = -28.$$

Ответ: -28.

8.

Найдите $\sin\left(\dfrac{7\pi}{2} - \alpha\right)$, если $\sin\alpha = 0,8$ и $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Пояснение.

Выполним преобразования:

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(2\pi + \frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha.$$

Поскольку угол α лежит в второй четверти, $\cos\alpha < 0$. Тогда

$$-\cos\alpha = -(-\sqrt{1-(0,8)^2}) = \sqrt{0,36} = 0,6.$$

Ответ: 0,6.

9.

Найдите $26\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ и $\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Пояснение.

Поскольку угол α лежит в четвертой четверти, $\sin\alpha < 0$. Применим формулу приведения, а затем выразим синус через косинус. Имеем:

$$26\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = 26\sin\alpha = -26\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = -26\cdot\frac{5}{13} = -10.$$

Ответ: −10.

10.

Найдите $\operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{5\pi}{2}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0,4$.

Пояснение.

Пользуемся периодичностью тангенса и используем формулу приведения:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\alpha + 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -2,5.$$

Ответ: −2,5.

11.

Найдите $\operatorname{tg}^2\alpha$, если $5\sin^2\alpha + 13\cos^2\alpha = 6$.

Пояснение.

Выполним преобразования:

$$5\sin^2\alpha+13\cos^2\alpha=6\Leftrightarrow 5\sin^2\alpha+13\cos^2\alpha=6(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ -\sin^2\alpha=-7\cos^2\alpha\Leftrightarrow\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=7\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2\alpha=7.$$

Ответ: 7.

12.

Найдите $\dfrac{3\cos\alpha-4\sin\alpha}{2\sin\alpha-5\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$.

Пояснение.

Способ 1: $\operatorname{tg}\alpha=3\Leftrightarrow\sin\alpha=3\cos\alpha$. Тогда:

$$\frac{3\cos\alpha-4\sin\alpha}{2\sin\alpha-5\cos\alpha}=\frac{3\cos\alpha-12\cos\alpha}{6\cos\alpha-5\cos\alpha}=-9.$$

Способ 2: разделим числитель и знаменатель дроби на $\cos\alpha$. Тогда:

$$\frac{3\cos\alpha-4\sin\alpha}{2\sin\alpha-5\cos\alpha}=\frac{3-4tg\alpha}{2tg\alpha-5}=\frac{3-12}{6-5}=-9.$$

Ответ: -9.

13.

Найдите $\dfrac{10\cos\alpha+4\sin\alpha+15}{2\sin\alpha+5\cos\alpha+3}$, если $\operatorname{tg}\alpha=-2,5$.

Пояснение.

Способ 1: $\operatorname{tg}\alpha=-2,5\Leftrightarrow\sin\alpha=-2,5\cos\alpha$. Тогда:

$$\frac{10\cos\alpha+4\sin\alpha+15}{2\sin\alpha+5\cos\alpha+3}=\frac{10\cos\alpha-10\cos\alpha+15}{-5\cos\alpha+5\cos\alpha+3}=\frac{15}{3}=5.$$

Способ 2: Поделим числитель и знаменатель дроби на $\cos\alpha$:

$$\frac{10\cos\alpha+4\sin\alpha+15}{2\sin\alpha+5\cos\alpha+3}=\frac{10+4\operatorname{tg}\alpha+\frac{15}{\cos\alpha}}{2\operatorname{tg}\alpha+5+\frac{3}{\cos\alpha}}=\frac{10-10+\frac{15}{\cos\alpha}}{-5+5+\frac{3}{\cos\alpha}}=5.$$

Ответ: 5.

14.

Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\dfrac{7\sin\alpha+13\cos\alpha}{5\sin\alpha-17\cos\alpha}=3$.

Пояснение.

Разделим числитель и знаменатель на $\cos\alpha$:

$$\frac{7\sin\alpha+13\cos\alpha}{5\sin\alpha-17\cos\alpha}=\frac{7\operatorname{tg}\alpha+13}{5\operatorname{tg}\alpha-17}=3.$$

Тогда

$$7\operatorname{tg}\alpha+13=15\operatorname{tg}\alpha-51\Leftrightarrow 8\operatorname{tg}\alpha=64\Leftrightarrow\operatorname{tg}\alpha=8.$$

Ответ: 8.

15.

Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\dfrac{3\sin\alpha-5\cos\alpha+2}{\sin\alpha+3\cos\alpha+6}=\dfrac{1}{3}$.

Пояснение.

Используем свойство пропорции:

$$\frac{3\sin\alpha-5\cos\alpha+2}{\sin\alpha+3\cos\alpha+6}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3(3\sin\alpha-5\cos\alpha+2)=\sin\alpha+3\cos\alpha+6\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8\sin\alpha=18\cos\alpha\Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha=\frac{18}{8}\Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha=\frac{9}{4}.$$

Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha=2,25$.

Ответ: 2,25.

16.

Найдите значение выражения $7\cos(\pi+\beta)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)$, если $\cos\beta=-\frac{1}{3}$.

Пояснение.

Используем периодичность косинуса, нечетность синуса и формулы приведения:

$$7\cos(\pi+\beta)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=-7\cos\beta-2\cos\beta=-9\cos\beta=3.$$

Ответ: 3.

17.

Найдите значение выражения $5\sin(\alpha-7\pi)-11\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha=-0,25$.

Пояснение.

В силу нечетности и периодичности синуса $\sin(\alpha-7\pi)=-\sin(7\pi-\alpha)=-\sin(\pi-\alpha)$. Далее по формулам приведения имеем:

$$-5\sin(\pi-\alpha)-11\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-5\sin\alpha-11\sin\alpha=-16\sin\alpha=-16\cdot(-0,25)=4$$

.

Ответ: 4.

18.

Найдите $9\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

Пояснение.

Выполним преобразования:

$$9\cos 2\alpha=9(2\cos^2\alpha-1)=-7.$$

Ответ: -7.

19.

Найдите $-47\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha=-0,4$.

Пояснение.

По формуле $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ имеем:

$$-47\cos 2\alpha=-47\cdot(2\cos^2\alpha-1)=-47\cdot(2\cdot(-0,4)^2-1)=-47\cdot(0,32-1)=-47\cdot(-0,68)=31,96.$$

Ответ:31,96.

20.

Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$.

Пояснение.

Поскольку угол α лежит во второй четверти, его косинус отрицателен. Поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{24}{25}} = -\frac{1}{5} = -0,2.$$

О т в е т: −0,2.

21.

Найдите $\sin x$, если $\cos x = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $90^\circ < x < 180^\circ$.

Пояснение.

Поскольку $x \in 90^\circ < x < 180^\circ$, определяем, что $\sin x > 0$. Тогда

$$\sin x = \sqrt{1-\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{24}{25}} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

О т в е т: 0,2.

22.

Найдите $3\cos x$, если $\sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $270^\circ < x < 360^\circ$.

Пояснение.

Поскольку $x \in 270^\circ < x < 360^\circ$, определяем, что $\cos x > 0$. Тогда

$$3\cos x = 3\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = 3\sqrt{1-\frac{8}{9}} = 3\cdot\frac{1}{3} = 1.$$

О т в е т: 1.