

## Квадратные и степенные уравнения и неравенства

1. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время  $t$  падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле  $h = 5t^2$ , где  $h$  – расстояние в метрах,  $t$  – время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,6 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

2. Высота над землей подброшенного вверх мяча меняется по закону  $h(t) = 1,6 + 8t - 5t^2$ , где  $h$  – высота в метрах,  $t$  – время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее трех метров?

3. Если достаточно быстро вращать ведро с водой на веревке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведерка сила давления воды на дно не остается постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна  $P = m \left( \frac{v^2}{L} - g \right)$ , где  $m$  – масса воды в килограммах,  $v$  скорость движения ведерка в м/с,  $L$  – длина веревки в метрах,  $g$  – ускорение свободного падения (считайте  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведро, чтобы вода не выливалась, если длина веревки равна 40 см? Ответ выразите в м/с.

4. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону  $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$ , где  $t$  – время в секундах, прошедшее с момента открытия крана,  $H_0 = 20$  – начальная высота столба воды,  $k = \frac{1}{50}$  – отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а  $g$  – ускорение свободного падения (считайте  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объема воды?

5. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону  $H(t) = at^2 + bt + H_0$ , где  $H_0 = 4$  – начальный уровень воды,  $a = \frac{1}{100}$  м/мин<sup>2</sup>, и  $b = -\frac{2}{5}$  м/мин постоянные,  $t$  – время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

6. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой  $y = ax^2 + bx$ , где  $a = -\frac{1}{100}$  м<sup>-1</sup>,  $b = 1$  – постоянные параметры,  $x_{(м)}$  – смещение камня по горизонтали,  $y_{(м)}$  – высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

7. Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы:  $T(t) = T_0 + bt + at^2$ , где  $t$  – время в минутах,  $T_0 = 1400$  К,  $a = -10$  К/мин<sup>2</sup>,  $b = 200$  К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1760 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

8. Для сматывания кабеля на заводе используют лебедку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону  $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$ , где  $t$  – время в минутах,  $\omega = 20^\circ/\text{мин}$  – начальная угловая скорость вращения катушки, а  $\beta = 4^\circ/\text{мин}^2$  – угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки  $\varphi$  достигнет  $1200^\circ$ . Определите время после начала работы лебедки, не позже которого рабочий должен проверить ее работу. Ответ выразите в минутах.

9. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью  $v_0 = 57$  км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением  $a = 12$  км/ч<sup>2</sup>. Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением  $S = v_0t + \frac{at^2}{2}$ . Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 30 км от города. Ответ выразите в минутах.

10. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью  $v_0 = 20$  м/с, начал торможение с постоянным ускорением  $a = 5$  м/с<sup>2</sup>. За  $t$  – секунд после начала торможения он прошёл путь  $S = v_0t - \frac{at^2}{2}$  (м). Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 30 метров. Ответ выразите в секундах.

11. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трех однородных соосных цилиндров: центрального массой  $m = 8$  кг и радиуса  $R = 10$  см, и двух боковых с массами  $M = 1$  кг и с радиусами  $R + h$ . При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в кг·см<sup>2</sup>, дается формулой  $I = \frac{(m + 2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2)$ . При каком максимальном значении  $h$  момент инерции катушки не превышает предельного значения 625 кг·см<sup>2</sup>? Ответ выразите в сантиметрах.

12. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле:  $F_A = \rho g l^3$ , где  $l$  – длина ребра куба в метрах,  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup> – плотность воды, а  $g$  – ускорение свободного падения (считайте  $g = 9,8$  Н/кг). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше, чем 78400 Н? Ответ выразите в метрах.

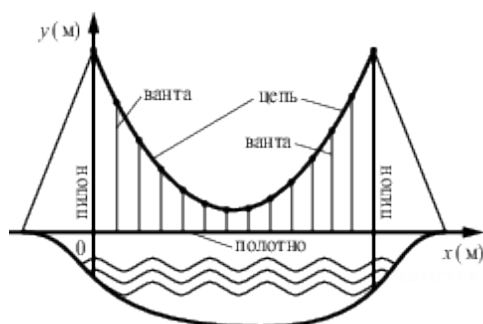
13. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму сферы, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле:  $F_A = \alpha \rho g r^3$ , где  $\alpha = 4,2$  – постоянная,  $r$  – радиус аппарата в метрах,  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup> – плотность воды, а  $g$  – ускорение свободного падения (считайте  $g = 10$  Н/кг). Каков может быть максимальный радиус аппарата, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше, чем 336 000 Н? Ответ выразите в метрах.

14. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому  $P = \sigma S T^4 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ , где  $P$  — мощность излучения звезды (в Ваттах),  $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$  — постоянная,  $S$  м<sup>2</sup> — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а  $T$  — температура (в кельвинах). Известно, что площадь поверхности не-которой звезды равна  $\frac{1}{16} \cdot 10^{20}$  м<sup>2</sup>, а мощность её излучения равна  $9,12 \cdot 10^{25}$  Вт. Найдите температуру этой звезды в Кельвинах.

15. На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами.

Введём систему координат: ось  $Oy$  направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось  $Ox$  направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке.

В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение  $y = 0,005x^2 - 0,74x + 25$ , где  $x$  и  $y$  измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 30 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



16. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой  $h(t) = -5t^2 + 18t$ , где  $h$  — высота в метрах,  $t$  — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд камень находился на высоте не менее 9 метров.