

Квадратные и степенные уравнения и неравенства

1. 1. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h – расстояние в метрах, t – время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,6 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

Решение.

Пусть h_1 – расстояние до воды до дождя, h_2 – расстояние до воды после дождя. После дождя уровень воды в колодце повысится, расстояние до воды уменьшится, и время падения уменьшится, станет равным $t = 0,6 - 0,2 = 0,4$ с. Уровень воды поднимется на $h_1 - h_2$ метров.

$$h_1 - h_2 = 5 \cdot 0,6^2 - 5 \cdot 0,4^2 = 1$$

Ответ: 1.

2. 2. Высота над землей подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1,6 + 8t - 5t^2$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее трех метров?

Решение.

Определим моменты времени, когда мяч находился на высоте ровно три метра. Для этого решим уравнение $h(t) = 3$:

$$h(t) = 3 \Leftrightarrow 1,6 + 8t - 5t^2 = 3 \Leftrightarrow 5t^2 - 8t + 1,4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0,2; \\ t = 1,4. \end{cases}$$

Проанализируем полученный результат: поскольку по условию задачи мяч брошен снизу вверх, это означает, что в момент времени $t = 0,2$ (с) мяч находился на высоте 3 метра, двигаясь снизу вверх, а в момент времени $t = 1,4$ (с) мяч находился на этой высоте, двигаясь сверху вниз. Поэтому он находился на высоте не менее трёх метров $1,4 - 0,2 = 1,2$ секунды.

Ответ: 1,2.

3. 3. Если достаточно быстро вращать ведро с водой на веревке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведерка сила давления воды на дно не остается постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P = m \left(\frac{v^2}{L} - g \right)$, где m – масса воды в килограммах, v скорость движения ведерка в м/с, L – длина веревки в метрах, g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведро, чтобы вода не выливалась, если длина веревки равна 40 см? Ответ выразите в м/с.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $P(v) \geq 0$ при заданной длине верёвки $L = 0,4$ м:

$$P \geq 0 \Leftrightarrow m \left(\frac{v^2}{L} - g \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{v^2}{0,4} - 10 \geq 0 \Leftrightarrow v^2 \geq 4 \Leftrightarrow v \geq 2 \text{ м/с.}$$

Ответ: 2.

4. 4. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t – время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ – начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{50}$ – отношение площадей поперечных

сечений крана и бака, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объема воды?

Решение.

Формулой, описывающей уменьшение высоты столба воды с течением времени, является

$$H(t) = 20 - \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 20} \cdot \frac{1}{50}t + \frac{10}{2} \left(\frac{1}{50} \right)^2 t^2 = 0,002t^2 - 0,4t + 20.$$

Четверть первоначального объема воды в баке останется, когда высота столба воды будет 5 м. Определим требуемое на вытекание трех четвертей воды время — найдем меньший корень уравнения $H(t) = 5$:

$$H(t) = 5 \Leftrightarrow 0,002t^2 - 0,4t + 20 = 5 \Leftrightarrow t^2 - 200t + 7500 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 50; \\ t = 150. \end{cases}$$

Таким образом, через 50 секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объема воды.

Ответ: 50.

5. 5. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 4$ – начальный уровень воды, $a = \frac{1}{100} \text{ м/мин}^2$, и $b = -\frac{2}{5} \text{ м/мин}$ постоянные, t – время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

Решение.

Формулой, описывающей уменьшение высоты столба воды с течением времени является

$$H(t) = 0,01t^2 - 0,4t + 4.$$

Вода будет вытекать из бака, пока её начальный уровень не понизится до нуля. Определим требуемое на это время, решая уравнение $H(t) = 0$:

$$H(t) = 0 \Leftrightarrow 0,01t^2 - 0,4t + 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 40t + 400 = 0 \Leftrightarrow t = 20.$$

Это означает, что по прошествии 20 минут вся вода вытечет из бака.

Ответ: 20.

6. 6. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\frac{1}{100} \text{ м}^{-1}$, $b = 1$ – постоянные параметры, $x_{(м)}$ – смещение камня по горизонтали, $y_{(м)}$ – высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $y \geq 9$: при заданных значениях параметров a и b :

$$y \geq 9 \Leftrightarrow -\frac{1}{100}x^2 + x \geq 9 \Leftrightarrow x^2 - 100x + 900 \leq 0 \Leftrightarrow 10 \leq x \leq 90 \text{ м}.$$

Камни будут перелетать крепостную стену на высоте не менее 1 метра, если камнеметательная машина будет находиться на расстоянии от 10 до 90 метров от этой стены. Наибольшее расстояние – 90 метров.

Ответ: 90.

7. 7. Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t – время в

минутах, $T_0 = 1400$ К, $a = -10$ К/мин², $b = 200$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1760 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

Решение.

Найдем, в какой момент времени после начала работы температура станет равной 1760 К. Задача сводится к решению уравнения $T(t) = 1760$ при заданных значениях параметров a и b :

$$1400 + 200t - 10t^2 = 1760 \Leftrightarrow t^2 - 20t + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2; \\ t = 18. \end{cases}$$

Через 2 минуты после включения прибор нагреется до 1760 К, и при дальнейшем нагревании может испортиться. Таким образом, прибор нужно выключить через 2 минуты.

Ответ: 2.

8. 8. Для сматывания кабеля на заводе используют лебедку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 20^\circ/\text{мин}$ — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 4^\circ/\text{мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 1200° . Определите время после начала работы лебедки, не позже которого рабочий должен проверить ее работу. Ответ выразите в минутах.

Решение.

Задача сводится к нахождению наибольшего решения неравенства $\varphi \leq 1200$ при заданных значениях параметров ω и β :

$$\varphi \leq 1200 \Leftrightarrow 2t^2 + 20t \leq 1200 \Leftrightarrow t^2 + 10t - 600 \leq 0 \Leftrightarrow -30 \leq t \leq 20 \text{ мин.}$$

Учитывая то, что время — неотрицательная величина, получаем $t \leq 20$. Угол намотки достигнет значения 1200° при $t = 20$ мин.

Ответ: 20.

9. 9. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 57$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 12$ км/ч². Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 30 км от города. Ответ выразите в минутах.

Решение.

Мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если $S \leq 30$ км. Задача сводится к нахождению наибольшего решения неравенства $S \leq 30$ км при заданных значениях параметров v_0 и a :

$$\begin{aligned} S \leq 30 &\Leftrightarrow 6t^2 + 57t \leq 30 \Leftrightarrow 6t^2 + 57t - 30 \leq 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 19t - 10 \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{-19 - \sqrt{361 + 80}}{4} \leq t \leq \frac{-19 + \sqrt{361 + 80}}{4} \Leftrightarrow -10 \leq t \leq 0,5 \end{aligned}$$

Учитывая то, что время — неотрицательная величина, получаем $t \leq 0,5$ ч, то есть $t \leq 30$ мин.

Ответ: 30.

10. 10. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 20$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 5$ м/с². За t — секунд после начала торможения он прошёл

путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 30 метров. Ответ выразите в секундах.

Решение.

Найдем, за какое время t , прошедшее от момента начала торможения, автомобиль проедет 30 метров:

$$20t - 2,5t^2 = 30 \Leftrightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 6, \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2.$$

Значит, через 2 секунды после начала торможения автомобиль проедет 30 метров.

Ответ: 2.

11. 11. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трех однородных соосных цилиндров: центрального массой $m = 8$ кг и радиуса $R = 10$ см, и двух боковых с массами $M = 1$ кг и с радиусами $R + h$. При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в $\text{кг} \cdot \text{см}^2$, дается формулой $I = \frac{(m + 2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2)$. При каком максимальном значении h момент инерции катушки не превышает предельного значения $625 \text{ кг} \cdot \text{см}^2$? Ответ выразите в сантиметрах.

Решение.

Задача сводится к нахождению наибольшего решения неравенства $I \leq 625$ при заданных значениях параметров m , M и R :

$$I \leq 625 \Leftrightarrow \frac{(8 + 2) \cdot 10^2}{2} + 1 \cdot (2 \cdot 10 \cdot h + h^2) \leq 625 \Leftrightarrow h^2 + 20h - 125 \leq 0.$$

Решая квадратное неравенство методом интервалов, получим $-25 \leq h \leq 5$. Наибольшее решение двойного неравенства — число 5.

Ответ: 5.

12. 12. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \rho g l^3$, где l — длина ребра куба в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 9,8 \text{ Н/кг}$). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше, чем 78400 Н ? Ответ выразите в метрах.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $F_A \leq 78400$ при заданных значениях плотности воды и ускорении свободного падения:

$$F_A \leq 78400 \Leftrightarrow 1000 \cdot 9,8 \cdot l^3 \leq 78400 \Leftrightarrow l^3 \leq 8 \Leftrightarrow l \leq 2 \text{ м.}$$

Ответ: 2.

13. 13. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму сферы, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \alpha \rho g r^3$, где $\alpha = 4,2$ — постоянная, r — радиус аппарата в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ Н/кг}$). Каков может быть максимальный радиус аппарата, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше, чем $336\,000 \text{ Н}$? Ответ выразите в метрах.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $F_A \leq 336\,000$ при заданных значениях плотности воды и ускорении свободного падения:

$$F_A \leq 336\,000 \Leftrightarrow 4,2 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot r^3 \leq 336\,000 \Leftrightarrow r^3 \leq 8 \Leftrightarrow r \leq 2 \text{ м.}$$

Ответ: 2.

14. 14. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$, где P — мощность излучения звезды (в Ваттах), $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, $S \text{ м}^2$ — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T — температура (в кельвинах). Известно, что площадь поверхности не-которой звезды равна $\frac{1}{16} \cdot 10^{20} \text{ м}^2$, а мощность её излучения равна $9,12 \cdot 10^{25} \text{ Вт}$. Найдите температуру этой звезды в Кельвинах.

Решение.

Задача сводится к нахождению наименьшего решения неравенства $P \geq 9,12 \cdot 10^{25}$ при известном значении постоянной $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ и заданной площади звезды $S = \frac{1}{16} \cdot 10^{20}$:

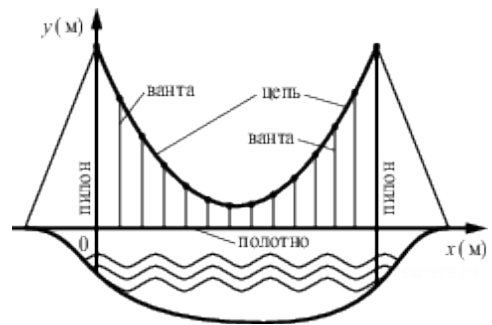
$$\begin{aligned} P \geq 9,12 \cdot 10^{25} &\Leftrightarrow \sigma S T^4 \geq 9,12 \cdot 10^{25} \Leftrightarrow T^4 \geq \frac{9,12 \cdot 10^{25}}{\sigma S} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow T \geq \sqrt[4]{\frac{9,12 \cdot 10^{25}}{5,7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{16} \cdot 10^{20}}} \Leftrightarrow T \geq \sqrt[4]{25,6 \cdot 10^{13}} = \sqrt[4]{256 \cdot 10^{12}} = 4000 \text{ К.} \end{aligned}$$

Ответ: 4000.

15. 15. На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами.

Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке.

В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0,005x^2 - 0,74x + 25$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванта, расположенной в 30 метрах от пилон. Ответ дайте в метрах.

**Решение.**

Задача сводится к вычислению значения $y(30)$, найдём его:

$$y(30) = 0,005 \cdot 30^2 - 0,74 \cdot 30 + 25 = 4,5 - 22,2 + 25 = 7,3.$$

Ответ: 7,3.

Примечание 1.

Заметим, что мы вычислили длину ванта, находящейся на расстоянии 30 м от левого пилон (см. рис.), в силу симметрии она равна длине ванта, находящейся на расстоянии 30 м от правого пилон.

Примечание 2.

На самом деле линия, по которой провисает цепь в поле силы тяжести, является «цепной линией», которая похожа на параболу, но отличается от неё. Уравнение цепной линии: $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$, где a — параметр, зависящий от материала.

16. 16. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 18t$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд камень находился на высоте не менее 9 метров.

Решение.

Определим моменты времени, когда камень находился на высоте ровно 9 метров. Для этого решим уравнение $h(t) = 9$:

$$h(t) = 9 \Leftrightarrow -5t^2 + 18t = 9 \Leftrightarrow -5t^2 + 18t - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3; \\ t = 0,6. \end{cases}$$

Проанализируем полученный результат: поскольку по условию задачи камень брошен снизу вверх, это означает, что в момент времени $t = 0,6$ (с) камень находился на высоте 9 метров, двигаясь снизу вверх, а в момент времени $t = 3$ (с) камень находился на этой высоте, двигаясь сверху вниз. Поэтому он находился на высоте не менее девяти метров 2,4 секунды.

Ответ: 2,4.