

Рациональные уравнения и неравенства

1. 1. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 30$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана – в пределах от 150 до 180 см. Изображение на экране будет четким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы ее изображение на экране было четким. Ответ выразите в сантиметрах.

Решение.

Поскольку $f = 30$ имеем:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{30} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}.$$

Наименьшему возможному d_1 значению соответствует наибольшее значение левой части полученного равенства, и, соответственно, наибольшее возможное значение правой части равенства. Разность $\frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}$ в правой части равенства достигает наибольшего значения при наименьшем значении вычитаемого $\frac{1}{d_2}$, которое достигается при наибольшем возможном значении знаменателя d_2 . Поэтому $d_2 = 180$, откуда

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{180} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{5}{180} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{1}{36} \Leftrightarrow d_1 = 36 \text{ см.}$$

По условию лампочка должна находиться на расстоянии от 30 до 50 см от линзы. Найденное значение удовлетворяет условию.

Ответ: 36.

2. 2. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 440$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$ (Гц), где c – скорость звука (в м/с).

Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 315$ м/с. Ответ выразите в м/с.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $f(v) - f_0 \geq 10$ при известном значении постоянной $f_0 = 440$ Гц:

$$f(v) - f_0 \geq 10 \Leftrightarrow \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}} - f_0 \geq 10 \Leftrightarrow \frac{440}{1 - \frac{v}{315}} - 440 \geq 10 \Leftrightarrow 1 - \frac{v}{315} \leq \frac{44}{45} \Leftrightarrow v \geq \frac{315}{45} = 7 \text{ м/с.}$$

Ответ: 7.

3. 3. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$, где ε – ЭДС источника (в вольтах), $r = 1$ Ом – его внутреннее сопротивление, R – сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 20% от силы тока короткого замыкания $I_{\text{кз}} = \frac{\varepsilon}{r}$? (Ответ выразите в омах.)

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $I \leq 0,2I_{\text{кз}}$ при известном значении внутреннего сопротивления $r = 1 \text{ Ом}$:

$$I \leq 0,2I_{\text{кз}} \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{R+1} \leq 0,2 \cdot \frac{\varepsilon}{1} \Leftrightarrow R+1 \geq 5 \Leftrightarrow R \geq 4 \text{ Ом}.$$

Ответ: 4.

4. 4. Сила тока в цепи I (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U – напряжение в вольтах, R – сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включен предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 4 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $I \leq 4 \text{ А}$ при известном значении напряжения $U = 220 \text{ В}$:

$$I \leq 4 \Leftrightarrow \frac{220}{R} \leq 4 \Leftrightarrow R \geq 55 \text{ Ом}.$$

Ответ: 55.

5. 5. Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы, определяемой по формуле $A(\omega) = \frac{A_0 \omega_p^2}{|\omega_p^2 - \omega^2|}$, где ω – частота вынуждающей силы (в с^{-1}), A_0 – постоянный параметр, $\omega_p = 360 \text{ с}^{-1}$ – резонансная частота. Найдите максимальную частоту ω , меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину A_0 не более чем на 12,5%. Ответ выразите в с^{-1} .

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $A \leq 1,125A_0$ при известном значении резонансной частоты $\omega_p = 360 \text{ с}^{-1}$ и условии, что частота ω меньше резонансной:

$$\begin{aligned} A \leq 1,125A_0 &\Leftrightarrow \frac{A_0 \cdot 360^2}{360^2 - \omega^2} \leq 1,125A_0 \Leftrightarrow 360^2 \leq 1,125 \cdot 360^2 - 1,125\omega^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1,125\omega^2 \leq 0,125 \cdot 360^2 \Leftrightarrow \omega \leq 120 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

Ответ: 120.

6. 6. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 90 \text{ Ом}$. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями $R_1 \text{ Ом}$ и $R_2 \text{ Ом}$ их общее сопротивление дается формулой $R_{\text{общ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (Ом), а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 9 Ом. Ответ выразите в омах.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $R_{\text{общ}} \geq 9 \text{ Ом}$ при известном значении сопротивления приборов $R_1 = 90 \text{ Ом}$:

$$R_{\text{общ}} \geq 9 \Leftrightarrow \frac{90R_2}{90 + R_2} \geq 9 \Leftrightarrow 81R_2 \geq 810 \Leftrightarrow R_2 \geq 10 \text{ Ом}.$$

Ответ: 10.

7. 7. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 – температура нагревателя (в градусах Кельвина), T_2 – температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой минимальной температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 15%, если температура холодильника $T_2 = 340$ К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $\eta \geq 15$ при известном значении температуры холодильника $T_2 = 340$ К:

$$\eta \geq 15 \Leftrightarrow \frac{T_1 - 340}{T_1} \cdot 100 \geq 15 \Leftrightarrow 100T_1 - 34000 \geq 15T_1 \Leftrightarrow T_1 \geq 400 \text{ К.}$$

Ответ: 400.

8. 8. Коэффициент полезного действия (КПД) кормозапарника равен отношению количества теплоты, затраченного на нагревание воды массой $m_{\text{в}}$ (в килограммах) от температуры t_1 до температуры t_2 (в градусах Цельсия) к количеству теплоты, полученному от сжигания дров массы $m_{\text{др}}$ кг. Он определяется формулой $\eta = \frac{c_{\text{в}} m_{\text{в}} (t_2 - t_1)}{q_{\text{др}} m_{\text{др}}} \cdot 100\%$, где $c_{\text{в}} = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К) – теплоёмкость воды, $q_{\text{др}} = 8,3 \cdot 10^6$ Дж/кг – удельная теплота сгорания дров. Определите наименьшее количество дров, которое понадобится сжечь в кормозапарнике, чтобы нагреть $m = 83$ кг воды от 10°C до кипения, если известно, что КПД кормозапарника не больше 21%. Ответ выразите в килограммах.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $\eta \leq 21\%$. А при известных значениях теплоёмкости воды $c_{\text{в}} = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/кг, удельной теплоты сгорания дров $q_{\text{др}} = 8,3 \cdot 10^6$ Дж/кг, массы воды $m_{\text{в}} = 83$ кг и изменения температуры $t_2 - t_1 = 100 - 10 = 90$ К:

$$\eta \leq 21 \Leftrightarrow \frac{4,2 \cdot 10^3 \cdot 83 \cdot 90}{8,3 \cdot 10^6 m_{\text{др}}} \cdot 100 \leq 21 \Leftrightarrow \frac{4,2 \cdot 90}{m_{\text{др}}} \leq 21 \Leftrightarrow m_{\text{др}} \geq 18 \text{ кг.}$$

Ответ: 18.

9. 9. Опорные башмаки шагающего экскаватора, имеющего массу $m = 1260$ тонн, представляют собой две пустотелые балки длиной $l = 18$ метров и шириной s метров каждая. Давление экскаватора на почву, выражаемое в килопаскалях, определяется формулой $p = \frac{mg}{2ls}$, где m – масса экскаватора (в тоннах), l – длина балок в метрах, s – ширина балок в метрах, g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). Определите наименьшую возможную ширину опорных балок, если известно, что давление p не должно превышать 140 кПа. Ответ выразите в метрах.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $p \leq 140$ кПа при известных значениях длины балок $l = 18$ м, массы экскаватора $m = 1260$ т:

$$p \leq 140 \Leftrightarrow \frac{1260 \cdot 10}{2 \cdot 18s} \leq 140 \Leftrightarrow s \geq 2,5 \text{ м.}$$

Ответ: 2,5.

10. 10. К источнику с ЭДС $\varepsilon = 55$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,5$ Ом, хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, дается формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 50 В? Ответ выразите в омах.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $U \geq 50$ В при известных значениях внутреннего сопротивления $r = 0,5$ Ом, ЭДС $\varepsilon = 55$ В:

$$U \geq 50 \Leftrightarrow \frac{55R}{R+0,5} \geq 50 \Leftrightarrow R \geq 5 \text{ Ом.}$$

Ответ: 5.

11. 11. При сближении источника и приёмника звуковых сигналов движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 150$ Гц и определяется следующим выражением:

$f = f_0 \frac{c+u}{c-v}$ (Гц), где c – скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 10$ м/с и $v = 15$ м/с – скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 160 Гц?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $f \geq 160$ Гц при известных значениях $u = 10$ м/с и $v = 15$ м/с – скорости приёмника и источника относительно среды соответственно:

$$f \geq 160 \Leftrightarrow 150 \cdot \frac{c+10}{c-15} \geq 160 \Leftrightarrow \frac{15(c+10) - 16(c-15)}{c-15} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{390-c}{c-15} \geq 0 \Leftrightarrow 15 < c \leq 390 \text{ м/с.}$$

Ответ: 390.

12. 12. Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 749 МГц. Скорость погружения батискафа вычисляется по формуле

$v = c \frac{f-f_0}{f+f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов, f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите частоту отражённого сигнала в МГц, если скорость погружения батискафа равна 2 м/с.

Решение.

Задача сводится к решению уравнения $v = 2$ м/с при известных значениях $c = 1500$ м/с – скорости звука в воде и $f_0 = 749$ МГц – частоты испускаемых импульсов:

$$\begin{aligned} v = 2 \Leftrightarrow 1500 \cdot \frac{f-749}{f+749} = 2 \Leftrightarrow 750 \cdot \frac{f-749}{f+749} = 1 \Leftrightarrow 750f - 750 \cdot 749 = f + 749 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 749f = 749 \cdot 751 \Leftrightarrow f = 751 \text{ МГц.} \end{aligned}$$

Ответ: 751.

13. 13. Для поддержания навеса планируется использовать цилиндрическую колонну. Давление P (в паскалях), оказываемое навесом и колонной на опору, определяется по формуле $P = \frac{4mg}{\pi D^2}$, где $m = 1200$ кг – общая масса навеса и колонны, D – диаметр колонны (в метрах). Считая ускорение свободного падения $g = 10$ м/с², а $\pi = 3$, определите наименьший возможный диаметр колонны, если давление, оказываемое на опору, не должно быть больше 400 000 Па. Ответ выразите в метрах.

Решение.

Найдем, при котором диаметре колонны давление, оказываемое на опору, станет равным 400 000 Па. Задача сводится к решению уравнения $\frac{4mg}{\pi D^2} = 400000$ при заданном значении массы навеса и колонны $m = 1200$ кг:

$$\frac{4 \cdot 1200 \cdot 10}{3 \cdot D^2} = 400000 \Leftrightarrow \frac{1}{D^2} = 25 \Leftrightarrow D^2 = \frac{1}{25} \Leftrightarrow D = \frac{1}{5} \Leftrightarrow D = 0,2.$$

Если диаметр колонны будет меньше найденного, то давление, оказываемое на опору, будет больше 400 000 Па, поэтому наименьший возможный диаметр колонны равен 0,2 м.

Ответ: 0,2.

14. 14. Автомобиль, масса которого равна $m = 2160$ кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение t секунд остается неизменным, и проходит за это время путь $S = 500$ метров. Значение силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, равно $F = \frac{2mS}{t^2}$. Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдет указанный путь, если известно, что сила F , приложенная к автомобилю, не меньше 2400 Н. Ответ выразите в секундах.

Решение.

Найдем, за какое время автомобиль пройдет путь $S = 500$ метров, учитывая, что сила F при заданном значении массы автомобиля 2400 Н. Задача сводится к решению неравенства $\frac{2mS}{t^2} \geq 2400$ при заданном значении массы автомобиля $m = 2160$ кг:

$$\frac{2 \cdot 2160 \cdot 500}{t^2} \geq 2400 \Leftrightarrow t^2 \leq 900 \Leftrightarrow_{t>0} t \leq 30 \text{ с.}$$

Ответ: 30.