

Показательные уравнения и неравенства

1. 1. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 10^5 \text{ Па} \cdot \text{м}^5$, где p – давление в газе в паскалях, V – объем газа в кубических метрах, $k = \frac{5}{3}$. Найдите, какой объем V (в куб. м) будет занимать газ при давлении p , равном $3,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$.

Решение.

Поскольку произведение давления на степень объема постоянно, а давление не ниже $3,2 \cdot 10^6$, при заданных значениях параметров $k = \frac{5}{3}$ и $\text{const} = 10^5 \text{ Па} \cdot \text{м}^5$ имеем неравенство:

$$3,2 \cdot 10^6 V^{\frac{5}{3}} \leq 10^5 \Leftrightarrow V^{\frac{5}{3}} \leq \frac{1}{32} \Leftrightarrow V \leq \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow V \leq \frac{1}{8} \text{ м}^3.$$

Ответ: 0,125.

2. 2. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T}$, где m_0 – начальная масса изотопа, t – время, прошедшее от начального момента, T – период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 40 мг. Период его полураспада составляет 10 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 5 мг.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $m(t) \geq 5$ при заданных значениях параметров $m_0 = 40 \text{ мг}$ и $T = 10 \text{ мин}$:

$$m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} \geq 5 \Leftrightarrow 40 \cdot 2^{-\frac{t}{10}} \geq 5 \Leftrightarrow 2^{-\frac{t}{10}} \geq \frac{1}{8} \Leftrightarrow -\frac{t}{10} \geq -3 \Leftrightarrow t \leq 30 \text{ мин}.$$

Ответ: 30.

3. 3. Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^a = \text{const}$, где p (Па) – давление в газе, V – объем газа в кубических метрах, a – положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение вдвое раз объема газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее, чем в 4 раза?

Решение.

Пусть p_1 и V_1 – начальные, а p_2 и V_2 – конечные значения объема и давления газа, соответственно.

Задача сводится к решению неравенства $\frac{p_2}{p_1} \geq 4$, причем $\frac{V_1}{V_2} = 2$:

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^a \geq 4 \Leftrightarrow 2^a \geq 4 \Leftrightarrow a \geq 2.$$

Ответ: 2.

4. 4. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объем и давление связаны соотношением $pV^{1,4} = \text{const}$, где p (атм.) – давление в газе, V – объем газа в литрах. Изначально объем газа равен 1,6 л, а его давление равно одной атмосфере. В соответствии с техническими характеристиками поршень насоса выдерживает давление не более 128 атмосфер. Определите, до какого минимального объема можно сжать газ. Ответ выразите в литрах.

Решение.

пусть p_1 и V_1 - начальные, а p_2 и V_2 - конечные значения объема и давления газа, соответственно. Тогда задача сводится к решению неравенства

$$V_2 \geq \left(\frac{p_1 V_1^{1.4}}{p_2} \right)^{\frac{1}{1.4}}, \text{ где } p_1 = 1 \text{ атм., } V_1 = 1,6 \text{ л., } p_2 = 128 \text{ атм.}$$

Тогда

$$V_2 \geq \left(\frac{1,6^{\frac{7}{5}}}{128} \right)^{\frac{5}{7}} \Leftrightarrow V_2 \geq (2^{-7})^{\frac{5}{7}} \cdot 1,6 \Leftrightarrow V_2 \geq \frac{1,6}{32} \Leftrightarrow V_2 \geq 0,05.$$

Ответ: 0,05.