

Логарифмические уравнения и неравенства

1. 1. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 2 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 16$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0,7$ – постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 21 с. Ответ дайте в киловольтах.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $t \geq 21$ при заданных значениях начального напряжения на конденсаторе $U_0 = 16$ кВ, сопротивления резистора $R = 5 \cdot 10^6$ Ом и ёмкости конденсатора $C = 2 \cdot 10^{-6}$ Ф:

$$t \geq 21 \Leftrightarrow 0,7 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot \log_2 \frac{16}{U} \geq 21 \Leftrightarrow \log_2 \frac{16}{U} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{16}{U} \geq 8 \Leftrightarrow U \leq 2 \text{ кВ.}$$

Ответ: 2.

2. 2. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\text{п}} = 20$ °С, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу воды $m = 0,3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x , вода охлаждается от начальной температуры $T_{\text{в}} = 60$ °С до температуры T (°С), причем $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}}$, где $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{С}}$ — теплоемкость воды, $\gamma = 21 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{С}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0,7$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 84 м.

Решение.

Задача сводится к решению уравнения $\alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}} = 84$ при заданных значениях теплоёмкости воды $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{С}}$, коэффициента теплообмена $\gamma = 21 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{С}}$, постоянной $\alpha = 0,7$, температуры помещения $T_{\text{п}} = 20$ °С и расхода воды $m = 0,3$ кг/с:

$$0,7 \cdot \frac{4200 \cdot 0,3}{21} \log_2 \frac{60 - 20}{T - 20} = 84 \Leftrightarrow \log_2 \frac{40}{T - 20} = 2 \Leftrightarrow \frac{40}{T - 20} = 4 \Leftrightarrow T = 30 \text{ } ^\circ\text{С.}$$

Ответ: 30.

3. 3. Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\nu = 3$ моля воздуха объемом $V_1 = 8$ л, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объема V_2 . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$ (Дж), где $\alpha = 5,75$ – постоянная, а $T = 300$ К – температура воздуха. Какой объем V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 10 350 Дж?

Решение.

Задача сводится к решению уравнения $\alpha \nu T \log_2 \frac{V_1}{V_2} = 10350$ при заданных значениях постоянной $\alpha = 5,75$, температуры воздуха $T = 300$ К, количества воздуха $\nu = 3$ моль и объема воздуха $V_1 = 8$ л:

$$5,75 \cdot 3 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{8}{V_2} = 10350 \Leftrightarrow \log_2 \frac{8}{V_2} = 2 \Leftrightarrow \frac{8}{V_2} = 4 \Leftrightarrow V_2 = 2 \text{ л.}$$

Ответ: 2.

4. 4.

Водолазный колокол, содержащий $\nu = 2$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1,5$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2 . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 5,75$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атм) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 6900 Дж.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $\alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1} \leq 6900$ при заданных значениях постоянной $\alpha = 5,75$, температуры воздуха $T = 300$ К, начального давления $p_1 = 1,5$ атм и количества воздуха $\nu = 2$ моль:

$$5,75 \cdot 2 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{p_2}{1,5} \leq 6900 \Leftrightarrow \log_2 \frac{p_2}{1,5} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{p_2}{1,5} \leq 4 \Leftrightarrow p_2 \leq 6 \text{ атм.}$$

Ответ: 6.