Тригонометрические уравнения и неравенства

1. 1. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полета мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полета составит 3 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $t(\alpha) \geq 3$ на интервале $(0°;\ 90°)$ при заданных значениях начальной скорости и ускорения свободного падения:

$$\frac{2 \cdot 30 \cdot \sin\alpha}{10} \geq 3 \Leftrightarrow \sin\alpha \geq \frac{1}{2} \underset{0°<\alpha<90°}{\Leftrightarrow} 30° \leq \alpha < 90°.$$

Ответ: 30.

2. 2. Деталью некоторого прибора является квадратная рамка с намотанным на нее проводом, через который пропущен постоянный ток. Рамка помещена в однородное магнитное поле так, что она может вращаться. Момент силы Ампера, стремящейся повернуть рамку, (в Н·м) определяется формулой $M = NIBl^2 \sin\alpha$, где $I = 2$ А – сила тока в рамке, $B = 3 \cdot 10^{-3}$ Тл – значение индукции магнитного поля, $l = 0{,}5$ м – размер рамки, $N = 1000$ – число витков провода в рамке, α – острый угол между перпендикуляром к рамке и вектором индукции. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) рамка может начать вращаться, если для этого нужно, чтобы раскручивающий момент M был не меньше 0,75 Н·м?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $NIBl^2 \sin\alpha \geq 0{,}75$ на интервале $(0°;\ 90°)$ при заданных значениях силы тока в рамке $I = 2$ А, размера рамки $l = 0{,}5$ м, числа витков провода $N = 1000$ и индукции магнитного поля $B = 3 \cdot 10^{-3}$ Тл:

$$1000 \cdot 2 \cdot 0{,}5^2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \sin\alpha \geq 0{,}75 \Leftrightarrow \sin\alpha \geq 0{,}5 \underset{0°<\alpha<90°}{\Leftrightarrow} 30° \leq \alpha < 90°.$$

Ответ: 30.

3. 3. Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$, где t – время в секундах, амплитуда $U_0 = 2$ В, частота $\omega = 120°$/с, фаза $\varphi = -30°$. Датчик настроен так, что если напряжение в нем не ниже чем 1 В, загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

Решение.

Задача сводится к решению уравнения $U_0 \sin(\omega t + \varphi) = 1$ при заданных значениях амплитуды сигнала, частоты и фазы:

$$2\sin(120°t - 30°) = 1 \Leftrightarrow \sin(120°t - 30°) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 120°t - 30° = 30° + 360°n \\ 120°t - 30° = 150° + 360°n,\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 120°t = 60° + 360°n \\ 120°t = 180° + 360°n,\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t = 1 + 6n \\ 2t = 3 + 6n,\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \underset{t<1}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2}, \\ t = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

На протяжении первой секунды лампочка будет гореть $1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$ с, то есть 50% времени.

Ответ: 50.

4. 4. Очень легкий заряженный металлический шарик зарядом $q = 2\cdot 10^{-6}$ Кл скатывается по гладкой наклонной плоскости. В момент, когда его скорость составляет $v = 5$ м/с, на него начинает действовать постоянное магнитное поле, вектор индукции B которого лежит в той же плоскости и составляет угол α с направлением движения шарика. Значение индукции поля $B = 4\cdot 10^{-3}$ Тл. При этом на шарик действует сила Лоренца, равная $F_л = qvB\sin\alpha$ (Н) и направленная вверх перпендикулярно плоскости. При каком наименьшем значении угла $\alpha \in [0°;180°]$ шарик оторвется от поверхности, если для этого нужно, чтобы сила $F_л$ была не менее чем $2\cdot 10^{-8}$ Н? Ответ дайте в градусах.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $qvB\sin\alpha \geq 2\cdot 10^{-8}$ на интервале $\alpha \in [0°;\ 180°]$ при заданных значениях заряда шарика $q = 2\cdot 10^{-6}$ Кл, индукции магнитного поля $B = 4\cdot 10^{-3}$ Тл и скорости $v = 5$ м/с:

$$2\cdot 10^{-6}\cdot 5\cdot 4\cdot 10^{-3}\sin\alpha \geq 2\cdot 10^{-8} \Leftrightarrow \sin\alpha \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30° + 360°n \leq \alpha \leq 150° + 360°n \underset{0°<\alpha<180°}{\Leftrightarrow} 30° \leq \alpha \leq 150°.$$

Ответ: 30.

5. 5. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полета мячика, выраженная в метрах, определяется формулой $H = \frac{v_0^2}{4g}(1-\cos 2\alpha)$, где $v_0 = 20$ м/с – начальная скорость мячика, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик пролетит над стеной высотой 4 м на расстоянии 1 м?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $H \geq 5$ на интервале $(0°;\ 90°)$ при заданных значениях начальной скорости $v_0 = 20$ м/с и ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2:

$$\frac{20^2}{40}(1-\cos 2\alpha) \geq 5 \Leftrightarrow 1-\cos 2\alpha \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2\alpha \leq \frac{1}{2} \underset{0°<2\alpha<180°}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{0°<2\alpha<180°}{\Leftrightarrow} 60° \leq 2\alpha < 180° \underset{0°<\alpha<90°}{\Leftrightarrow} 30° \leq \alpha < 90°.$$

Ответ: 30.

6. 6. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 20$ м/с – начальная скорость мячика, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 20 м?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $L \geq 20$ на интервале $(0°;\ 90°)$ при заданных значениях начальной скорости $v_0 = 20$ м/с и ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2:

$$\frac{20^2}{10}\sin 2\alpha \geq 20 \Leftrightarrow \sin 2\alpha \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30° + 360°n \leq 2\alpha \leq 150° + 360°n \underset{0°<2\alpha<180°}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{0°<2\alpha<180°}{\Leftrightarrow} 30° \leq 2\alpha \leq 150° \underset{0°<\alpha<90°}{\Leftrightarrow} 15° \leq \alpha \leq 75°.$$

Ответ: 15.

7. 7. Плоский замкнутый контур площадью $S = 0,5$ м^2 находится в магнитном поле, индукция которого равномерно возрастает. При этом согласно закону электромагнитной индукции Фарадея в контуре появляется ЭДС индукции, значение которой, выраженное в вольтах, определяется формулой $\varepsilon_i = aS\cos\alpha$, где α – острый угол между направлением магнитного поля и перпендикуляром к контуру, $a = 4\cdot 10^{-4}$ Тл/с – постоянная, S – площадь замкнутого контура, находящегося в магнитном поле (в м^2). При каком минимальном угле α (в градусах) ЭДС индукции не будет превышать 10^{-4} В?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $\varepsilon_i \le 10^{-4}$ на интервале $(0°;\ 90°)$ при заданных значениях площади контура $S = 0,5$ м^2 и постоянной $a = 4\cdot 10^{-4}$ Тл/с :

$$4\cdot 10^{-4}\cdot 0,5\cos\alpha \le 10^{-4} \Leftrightarrow \cos\alpha \le \frac{1}{2} \underset{0°<\alpha<90°}{\Leftrightarrow} 60° \le \alpha \le 90°.$$

Ответ: 60.

8. 8. Трактор тащит сани с силой $F = 80$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора (в килоджоулях) на участке длиной $S = 50$ м вычисляется по формуле $A = FS\cos\alpha$. При каком максимальном угле α (в градусах) совершенная работа будет не менее 2000 кДж?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $A \ge 2000$ на интервале $(0°;\ 90°)$ при заданных значениях силы $F = 80$ кН и длины пути $S = 50$ м:

$$A \ge 2000 \Leftrightarrow 80\cdot 50\cdot\cos\alpha \ge 2000 \Leftrightarrow \cos\alpha \ge \frac{1}{2} \underset{0°<\alpha<90°}{\Leftrightarrow} 0° < \alpha \le 60°.$$

Ответ: 60.

9. 9. Двигаясь со скоростью $v = 3$ м/с, трактор тащит сани с силой $F = 50$ кН, направлен-ной под острым углом α к горизонту. Мощность, развиваемая трактором, вычисляется по формуле $N = Fv\cos\alpha$. Найдите, при каком угле α(в градусах) эта мощность будет равна 75 кВт (кВт — это $\frac{\text{кН}\cdot\text{м}}{\text{с}}$).

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $N \ge 75$ на интервале $(0°;\ 90°)$ при заданных значениях силы $F = 50$ кН и скорости $v = 3$ м/с:

$$Fv\cos\alpha \ge 75 \Leftrightarrow 50\cdot 3\cos\alpha \ge 75 \Leftrightarrow \cos\alpha \ge \frac{1}{2} \underset{0°<\alpha<90°}{\Leftrightarrow} 0° < \alpha \le 60°.$$

Ответ: 60.

10. 10. При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 400$ нм на дифракционную решетку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решетке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d\sin\varphi = k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать второй максимум на решетке с периодом, не превосходящим 1600 нм?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $d \le 1600$ нм на интервале $(0°;\ 90°)$ при заданных значениях длины волны света $\lambda = 400$ нм и номера максимума $k = 2$:

$$\frac{k\lambda}{\sin\varphi} \le 1600 \Leftrightarrow 1600\sin\varphi \ge 800 \Leftrightarrow \sin\varphi \ge \frac{1}{2} \underset{0°<\varphi<90°}{\Leftrightarrow} 30° \le \alpha < 90°.$$

Ответ: 30.

11. 11. Два тела массой $m = 2$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 10$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении определяется выражением $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$. Под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 50 джоулей?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $Q \geq 50$ Дж на интервале $2\alpha \in (0^\circ;\ 180^\circ)$ при заданных значениях массы тел $m = 2$ кг и их скоростей $v = 10$ м/с:

$$mv^2 \sin^2 \alpha \geq 50 \Leftrightarrow 200 \sin^2 \alpha \geq 50 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha \geq \frac{1}{4} \underset{0^\circ<\alpha<90^\circ}{\Leftrightarrow} \sin \alpha \geq \frac{1}{2} \underset{0^\circ<\alpha<90^\circ}{\Leftrightarrow} 30^\circ \leq \alpha < 90^\circ.$$

Значит, наименьший угол $2\alpha = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$.

Ответ: 60.

12. 12. Катер должен пересечь реку шириной $L = 100$ м и со скоростью течения $u = 0,5$ м/с так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Он может двигаться с разными скоростями, при этом время в пути, измеряемое в секундах, определяется выражением $t = \frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha$, где α – острый угол, задающий направление его движения (отсчитывается от берега). Под каким минимальным углом α (в градусах) нужно плыть, чтобы время в пути было не больше 200 с?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $\frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha \leq 200$ на интервале $(0^\circ;\ 90^\circ)$ при заданных значениях длины реки $L = 100$ м и скорости течения $u = 0,5$ м/с:

$$\frac{100}{0,5} \operatorname{ctg} \alpha \leq 200 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \alpha \leq 1 \underset{0^\circ<\alpha<90^\circ}{\Leftrightarrow} 45^\circ \leq \alpha < 90^\circ.$$

Ответ: 45.

13. 13. Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу, со скоростью $v = 3$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью $u = \frac{m}{m+M} v \cos \alpha$ (м/с), где $m = 80$ кг – масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 400$ кг – масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,25 м/с?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $u \geq 0,25$ на интервале $(0^\circ;\ 90^\circ)$ при заданных значениях массы скейтбордиста $m = 80$ кг и массы платформы $M = 400$ кг:

$$u \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{m}{m+M} v \cos \alpha \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{80}{80+400} \cdot 3 \cdot \cos \alpha \geq 0,25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos \alpha \geq \frac{1}{4} \underset{0^\circ<\alpha<90^\circ}{\Leftrightarrow} 0^\circ < \alpha \leq 60^\circ.$$

Ответ: 60.

14. 14. Груз массой 0,08 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v = v_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 12$ с — период колебаний, $v_0 = 0,5$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 1 секунду после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Решение.

Найдем скорость груза через 1 секунду после начала колебаний:

$$v = v_0 \sin \frac{2\pi t}{T} = 0,5 \cdot \sin \frac{2\pi \cdot 1}{12} = 0,5 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25\text{м/с}$$

Найдем кинетическую энергию груза через 1 секунду после начала колебаний:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{0,08 \cdot 0,25^2}{2} = 0,0025$$

Ответ: 0,0025

15. 15. Груз массой 0,08 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v = v_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 2$ с — период колебаний, $v_0 = 0,5$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 1 секунду после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Решение.

Найдем скорость груза через 1 секунду после начала колебаний:

$$v = v_0 \cos \frac{2\pi t}{T} = 0,5 \cdot \cos \frac{2\pi \cdot 1}{2} = 0,5 \cdot \cos \pi = 0,5 \cdot (-1) = -0,5\text{м/с}$$

Найдем кинетическую энергию груза через 1 секунду после начала колебаний:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{0,08 \cdot (-0,5)^2}{2} = 0,01$$

Ответ: 0,01

16. 16. Скорость колеблющегося на пружине груза меняется по закону $v(t) = 5 \sin \pi t$ (см/с), где t – время в секундах. Какую долю времени из первой секунды скорость движения была не менее 2,5 см/с? Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $v \geq 2,5$ см/с при заданном законе изменения скорости $v(t) = 5 \sin \pi t$:

$$5 \sin \pi t \geq 2,5 \Leftrightarrow \sin \pi t \geq \frac{1}{2} \underset{0<\pi t<\pi}{\Leftrightarrow} \frac{\pi}{6} \leq \pi t \leq \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq t \leq \frac{5}{6}.$$

Таким образом, $\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} = 0,666...$ первой секунды после начала движения скорость груза превышала 2,5 см/с. Округляя, получаем 0,67.

Ответ: 0,67.