
Задачи на проценты, сплавы и смеси

1. 1. В 2008 году в городском квартале проживало 40 000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 8%, а в 2010 году на 9% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

Решение.

В 2009 году число жителей стало $40\,000 + 0,08 \cdot 40\,000 = 43\,200$ человек, а в 2010 году число жителей стало $43\,200 + 0,09 \cdot 43\,200 = 47\,088$ человек.

Ответ: 47 088.

2. 2. В понедельник акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а во вторник подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

Решение.

Обозначим первоначальную стоимость акций за 1. Пусть в понедельник акции компании подорожали на $c \cdot 100\%$, и их стоимость стала составлять $1 + c \cdot 1$. Во вторник акции подешевели на $c \cdot 100\%$, и их стоимость стала составлять $1 + c - c(1 + c)$. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник, то есть 0,96. Таким образом,

$$1 + c - c(1 + c) = 0,96 \Leftrightarrow 1 - c^2 = 0,96 \Leftrightarrow c^2 = 0,04 \Leftrightarrow c = 0,2, \quad c > 0$$

Ответ: 20.

3. 3. Четыре одинаковые рубашки дешевле куртки на 8%. На сколько процентов пять таких же рубашек дороже куртки?

Решение.

Стоимость четырех рубашек составляет 92% стоимости куртки. Значит, стоимость одной рубашки составляет 23% стоимости куртки. Поэтому стоимость пяти рубашек составляет 115% стоимости куртки. Это превышает стоимость куртки на 15%.

Ответ: 15.

4. 4. Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Решение.

Условие «если бы зарплата отца увеличилась вдвое, доход семьи вырос бы на 67%» означает, что зарплата отца составляет 67% дохода семьи. Условие «если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, доход семьи сократился бы на 4%», означает, что $\frac{2}{3}$ стипендии составляют 4% дохода семьи, то есть вся стипендия дочери составляет 6% дохода семьи. Таким образом, доход матери составляет $100\% - 67\% - 6\% = 27\%$ дохода семьи.

Ответ: 27.

5. 5. Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 20 000 рублей, через два года был продан за 15 842 рублей.

Решение.

Пусть цена холодильника ежегодно снижалась на p процентов в год. Тогда за два года она снизилась на $(1 - 0,01p)^2$, откуда имеем:

$$20000(1 - 0,01p)^2 = 15842 \Leftrightarrow (1 - 0,01p)^2 = 0,7921 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow_{1-0,01p>0} 1 - 0,01p = 0,89 \Leftrightarrow p = 11.$$

Ответ: 11.

6. 6. Митя, Антон, Гоша и Борис учредили компанию с уставным капиталом 200000 рублей. Митя внес 14% уставного капитала, Антон — 42000 рублей, Гоша — 0,12 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внес Борис. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 1000000 рублей причитается Борису? Ответ дайте в рублях.

Решение.

Антон внес $\frac{42000}{200000} \cdot 100$ уставного капитала. Тогда Борис внес $100 - 12 - 14 - 21 = 53\%$ уставного капитала. Таким образом, от прибыли 1000000 рублей Борису причитается $0,53 \cdot 1\,000\,000 = 530\,000$ рублей.

Ответ: 530 000.

7. 7. В сосуд, содержащий 5 литров 12-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Решение.

Концентрация раствора равна

$$C = \frac{V_{\text{в-ва}}}{V_{\text{р-ра}}} \cdot 100\%.$$

Объем вещества в исходном растворе равен $0,12 \cdot 5 = 0,6$ литра. При добавлении 7 литров воды общий объем раствора увеличится, а объем растворенного вещества останется прежним. Таким образом, концентрация полученного раствора равна:

$$\frac{0,6}{5+7} \cdot 100\% = \frac{0,6}{12} \cdot 100\% = 5\%.$$

Ответ: 5.

8. 8. Смешали некоторое количество 15-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 19-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Решение.

Процентная концентрация раствора (массовая доля) равна $\omega = \frac{m_{\text{в-ва}}}{m_{\text{р-ра}}} \cdot 100\%$. Пусть масса получившегося раствора $2m$. Таким образом, концентрация полученного раствора равна:

$$\omega = \frac{0,15m + 0,19m}{2m} \cdot 100\% = \frac{0,34}{2} \cdot 100\% = 17\%$$

Ответ: 17.

9. 9. Смешали 4 литра 15-процентного водного раствора некоторого вещества с 6 литрами 25-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Конечно, вместо литров следовало бы говорить о килограммах растворов.

Решение.

Концентрация раствора равна $C = \frac{V_{\text{в-ва}}}{V_{\text{р-ра}}} \cdot 100\%$. Таким образом, концентрация получившегося раствора равна:

$$\frac{0,15 \cdot 4 + 0,25 \cdot 6}{4 + 6} \cdot 100\% = \frac{2,1}{10} \cdot 100\% = 21\%.$$

Ответ: 21.

10. 10. Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 20 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?

Решение.

Виноград содержит 10% питательного вещества, а изюм — 95%. Поэтому 20 кг изюма содержат $20 \cdot 0,95 = 19$ кг питательного вещества. Таким образом, для получения 20 килограммов изюма требуется $\frac{19}{0,1} = 190$ кг винограда.

Ответ: 190.

11. 11. Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

Решение.

Пусть масса первого сплава m_1 кг, а масса второго — m_2 кг. Тогда массовое содержание никеля в первом и втором сплавах $0,1m_1$ и $0,3m_2$, соответственно. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = 200, \\ 0,1m_1 + 0,3m_2 = 0,25 \cdot 200, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_2 = 200 - m_1, \\ 0,1m_1 + 0,3(200 - m_1) = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_2 = 200 - m_1, \\ 0,2m_1 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 50, \\ m_2 = 150. \end{cases}$$

Таким образом, первый сплав легче второго на 100 килограммов.

Ответ: 100.

12. 12. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10% меди, второй — 40% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 3 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 30% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Решение.

Пусть масса первого сплава m кг, а масса второго — $m + 3$ кг, масса третьего сплава — $2m + 3$ кг. Первый сплав содержит 10% меди, второй — 40% меди, третий сплав — 30% меди. Тогда:

$$0,1m + 0,4(m + 3) = 0,3(2m + 3) \Leftrightarrow 0,5m + 1,2 = 0,6m + 0,9 \Leftrightarrow m = 3 \Leftrightarrow 2m + 3 = 9.$$

Таким образом, масса третьего сплава равна 9 кг.

Ответ: 9.

13. 13. Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

Решение.

Пусть масса 30-процентного раствора кислоты – m_1 кг, а масса 60-процентного – m_2 . Если смешать 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавить 10 кг чистой воды, получится 36-процентный раствор кислоты: $0,3m_1 + 0,6m_2 = 0,36(m_1 + m_2 + 10)$. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты: $0,3m_1 + 0,6m_2 + 0,5 \cdot 10 = 0,41(m_1 + m_2 + 10)$. Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,3m_1 + 0,6m_2 = 0,36m_1 + 0,36m_2 + 3,6, \\ 0,3m_1 + 0,6m_2 + 5 = 0,41m_1 + 0,41m_2 + 4,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,24m_2 - 0,06m_1 = 3,6, \\ 0,11m_1 - 0,19m_2 = 0,9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m_2 - m_1 = 60, \\ 11m_1 - 19m_2 = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 4m_2 - 60, \\ 11(4m_2 - 60) - 19m_2 = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 4m_2 - 60, \\ 25m_2 = 750 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 60, \\ m_2 = 30. \end{cases}$$

Ответ: 60.

14. 14. Имеются два сосуда. Первый содержит 30 кг, а второй – 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 68% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 70% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

Решение.

Пусть концентрация первого раствора кислоты – c_1 , а концентрация второго – c_2 . Если смешать эти растворы кислоты, то получится раствор, содержащий 68% кислоты: $30c_1 + 20c_2 = 50 \cdot 0,68$. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 70% кислоты: $mc_1 + mc_2 = 2m \cdot 0,7$. Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1,4, \\ 30c_1 + 20c_2 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 1,4 - c_1, \\ 30c_1 + 28 - 20c_1 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 1,4 - c_1, \\ 10c_1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 0,8, \\ c_1 = 0,6. \end{cases}$$

Поэтому $m_1 = 0,6 \cdot 30 = 18$.

Ответ: 18.

15. 15. Клиент А. сделал вклад в банке в размере 7700 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Еще ровно через год клиенты А. и Б. закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А. получил на 847 рублей больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

Решение.

Пусть банк начислял $p\%$ годовых. Тогда клиент А. за два года получил $7700(1 + 0,01p)^2$ руб., а клиент Б. за один год получил $7700(1 + 0,01p)$ руб. Обозначим $x = 1 + 0,01p$, тогда поскольку А. получил на 847 руб. больше, имеем:

$$7700x^2 - 7700x = 847 \Leftrightarrow 100x^2 - 100x - 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1,1, \\ x = -0,1. \end{cases}$$

Поскольку $x > 0$ получаем: $x = 1,1$, откуда $p = 10$. Тем самым, банк начислял вкладчикам по 10% годовых.

Ответ: 10.

16. 16. Имеется два сосуда. Первый содержит 100 кг, а второй — 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 72% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 78% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

Решение.

Пусть концентрация первого раствора кислоты — c_1 , а концентрация второго — c_2 . Если смешать эти растворы кислоты, то получится раствор, содержащий 72% кислоты: $100c_1 + 20c_2 = 120 \cdot 0,72$. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 78% кислоты: $mc_1 + mc_2 = 2m \cdot 0,78$. Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} 100c_1 + 20c_2 = 86,4, \\ c_1 + c_2 = 1,56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 100c_1 + 31,2 - 20c_1 = 86,4, \\ c_2 = 1,56 - c_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 80c_1 = 55,2, \\ c_2 = 1,56 - c_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0,69, \\ c_2 = 0,87. \end{cases}$$

Поэтому $m_1 = 0,69 \cdot 100 = 69$ кг.

Ответ: 69.