
Задачи на движение по окружности

1. 1. Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 14 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 21 км/ч больше скорости другого?

Решение.

Пусть v км/ч — скорость первого мотоциклиста, тогда скорость второго мотоциклиста равна $v + 21$ км/ч. Пусть первый раз мотоциклисты поравняются через t часов. Для того, чтобы мотоциклисты поравнялись, более быстрый должен преодолеть изначально разделяющее их расстояние, равное половине длины трассы. Поэтому

$$(v + 21)t - vt = 7 \Leftrightarrow 21t = 7 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, мотоциклисты поравняются через $t = \frac{1}{3}$ часа или через 20 минут.

Ответ: 20.

Приведём другое решение.

Быстрый мотоциклист движется относительно медленного со скоростью 21 км в час, и должен преодолеть разделяющие их 7 км. Следовательно, на это ему потребуется одна треть часа.

2. 2. Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 14 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 80 км/ч, и через 40 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть скорость второго автомобиля равна v км/ч. За $\frac{2}{3}$ часа первый автомобиль прошел на 14 км больше, чем второй, отсюда имеем

$$80 \cdot \frac{2}{3} = v \cdot \frac{2}{3} + 14 \Leftrightarrow 2v = 80 \cdot 2 - 14 \cdot 3 \Leftrightarrow v = 59.$$

Ответ: 59.

3. 3. Из пункта А круговой трассы выехал велосипедист. Через 30 минут он еще не вернулся в пункт А и из пункта А следом за ним отправился мотоциклист. Через 10 минут после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а еще через 30 минут после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы равна 30 км. Ответ дайте в км/ч..

Решение.

К моменту первого обгона мотоциклист за 10 минут проехал столько же, сколько велосипедист за 40 минут, следовательно, его скорость в 4 раза больше. Поэтому, если скорость велосипедиста принять за x км/час, то скорость мотоциклиста будет равна $4x$, а скорость их сближения — $3x$ км/час.

С другой стороны, второй раз мотоциклист догнал велосипедиста за 30 минут, за это время он проехал на 30 км больше. Следовательно, скорость их сближения составляет 60 км/час.

Итак, $3x = 60$ км/час, откуда скорость велосипедиста равна 20 км/час, а скорость мотоциклиста равна 80 км/час.

Ответ: 80.

4. 4. Часы со стрелками показывают 8 часов 00 минут. Через сколько минут минутная стрелка в четвертый раз поравняется с часовой?

Решение.

Скорость движения минутной стрелки 12 делений/час (под одним делением здесь подразумевается расстояние между соседними цифрами на циферблате часов), а часовой – 1 деление/час. До четвертой встречи минутной и часовой стрелок минутная должна сначала 3 раза «обогнать» часовую, то есть пройти 3 круга по 12 делений. Пусть после этого до четвертой встречи часовая стрелка пройдет L делений. Тогда общий путь минутной стрелки складывается из найденных 36 делений, ещё 8 изначально разделяющих их делений (поскольку часы показывают 8 часов) и последних L делений. Приравняем время движения часовой и минутной стрелок:

$$\frac{L}{1} = \frac{L+8+36}{12} \Leftrightarrow 12L = L+44 \Leftrightarrow L = 4.$$

Часовая стрелка пройдет 4 деления, что соответствует 4 часам, то есть 240 минутам.

Ответ: 240.

Приведем другое решение.

Ясно, что в первый раз стрелки встретятся между 8 и 9 часами, второй раз — между 9 и 10 часами, третий — между 10 и 11, четвертый — между 11 и 12 часами, то есть ровно в 12 часов. Таким образом, они встретятся ровно через 4 часа, что составляет 240 минут.

По просьбам читателей помещаем общее решение.

Скорость вращения часовой стрелки равна 0,5 градуса в минуту, а минутной — 6 градусов в минуту. Поэтому когда часы показывают время h часов m минут часовая стрелка повернута на $30h + 0,5m$ градусов, а минутная — на $6m$ градусов относительно 12-часового деления.

Пусть в первый раз стрелки встретятся через t_1 минут. Тогда если минутная стрелка еще не опережала часовую в течение текущего часа, то $6m + 6t_1 = 30h + 0,5m + 0,5t_1$, т. е. $t_1 = (60h - 11m)/11$ (*). В противоположном случае получаем уравнение $6m + 6t_1 = 30h + 0,5m + 0,5t_1 + 360$, откуда $t_1 = (60h - 11m + 720)/11$ (**).

Пусть во второй раз стрелки встретятся через t_2 минут после первого, тогда $0,5t_2 = 6t_1 - 360$, откуда $t_2 = 720/11$ (***)). Это же верно для каждого следующего оборота.

Поэтому для встречи с номером n из (*) и (**) с учетом (***) имеем соответственно: $t_n = (60h - 11m + 720(n - 1))/11$ или $t_n = (60h - 11m + 720n)/11$.

5. 5. Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 60 кругов по кольцевой трассе протяжённостью 3 км. Оба гонщика стартовали одновременно, а на финиш первый пришёл раньше второго на 10 минут. Чему равнялась средняя скорость второго гонщика, если известно, что первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг через 15 минут? Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Первый обогнал второго на 3 км за четверть часа, это значит, что скорость удаления (сближения) гонщиков равна $3 : \frac{1}{4} = 12$ км/ч. Обозначим скорость второго гонщика x км/ч, тогда скорость первого $(x + 12)$ км/ч. Составим и решим уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{180}{x} - \frac{180}{x+12} &= \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{180x + 180 \cdot 12 - 180x}{x(x+12)} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + 12x - 12960 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -120, \\ x = 108. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, скорость второго гонщика равна 108 км/ч.

Ответ: 108.