

## Задачи на движение по воде

**1. 1.** Моторная лодка прошла против течения реки 112 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 11 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

**Решение.**

Пусть  $u$  км/ч – скорость течения реки, тогда скорость лодки по течению равна  $11 + u$  км/ч, а скорость лодки против течения равна  $11 - u$  км/ч. На обратный путь лодка затратила на 6 часов меньше, отсюда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{112}{11-u} - \frac{112}{11+u} = 6 &\Leftrightarrow \frac{224u}{(11-u)(11+u)} = 6 \Leftrightarrow \frac{112u}{121-u^2} = 3 \Leftrightarrow_{u>0} \\ &\Leftrightarrow 112u = 3(121-u^2) \Leftrightarrow 3u^2 + 112u - 363 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{-56 + \sqrt{56^2 + 3 \cdot 363}}{3}; \\ u = \frac{-56 - \sqrt{56^2 + 3 \cdot 363}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3; \\ u = -\frac{121}{3} \Leftrightarrow_{v>0} v = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, скорость течения реки равна 3 км/ч.

Ответ: 3.

**2. 2.** Моторная лодка прошла против течения реки 255 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

**Решение.**

Пусть  $u$  км/ч — скорость моторной лодки, тогда скорость лодки по течению равна  $u + 1$  км/ч, а скорость лодки против течения равна  $u - 1$  км/ч. На путь по течению лодка затратила на 2 часа меньше, отсюда имеем:

$$\frac{255}{u-1} - \frac{255}{u+1} = 2 \Leftrightarrow \frac{255 \cdot 2}{u^2-1} = 2 \Leftrightarrow u^2 = 256 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 16; \\ u = -16 \end{cases} \Leftrightarrow_{u>0} u = 16.$$

Ответ: 16.

**3. 3.** Моторная лодка в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 30 км от А. Пробыв в пункте В 2 часа 30 минут, лодка отправилась назад и вернулась в пункт А в 18:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость лодки, если известно, что скорость течения реки 1 км/ч.

**Решение.**

Пусть  $u$  км/ч — собственная скорость моторной лодки, тогда скорость лодки по течению равна  $u+1$  км/ч, а скорость лодки против течения равна  $u-1$  км/ч. На весь путь лодка затратила  $8-2,5=5,5$  (часов), отсюда имеем:

$$\frac{30}{u-1} + \frac{30}{u+1} = 5,5 \Leftrightarrow \frac{60u}{u^2-1} = 5,5 \Leftrightarrow 11u^2 - 120u - 11 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{120 + \sqrt{120^2 + 4 \cdot 11^2}}{22} = 11; \\ u = \frac{120 - \sqrt{120^2 + 4 \cdot 11^2}}{22} = -\frac{1}{11} \end{cases} \begin{matrix} \Leftrightarrow u = 11. \\ u > 0 \end{matrix}$$

Таким образом собственная скорость лодки равна 11 км/ч.

Ответ: 11.

**4. 4.** Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 200 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 15 км/ч, стоянка длится 10 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 40 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

**Решение.**

Пусть  $u$  км/ч — скорость течения, тогда скорость теплохода по течению равна  $15+u$  км/ч, а скорость теплохода против течения равна  $15-u$  км/ч. На весь путь теплоход затратил  $40-10=30$  часов, отсюда имеем:

$$\frac{200}{15-u} + \frac{200}{15+u} = 30 \Leftrightarrow \frac{200 \cdot 15 \cdot 2}{225-u^2} = 30 \Leftrightarrow \frac{200}{225-u^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 200 = 225 - u^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 5; \\ u = -5 \end{cases} \begin{matrix} \Leftrightarrow u = 5. \\ u > 0 \end{matrix}$$

Таким образом, скорость течения реки равна 5 км/ч.

Ответ: 5.

**5. 5.** Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 255 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч, стоянка длится 2 часа, а в пункт отправления теплоход возвращается через 34 часа после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

**Решение.**

Пусть  $u$  км/ч — собственная скорость теплохода, тогда скорость теплохода по течению равна  $u + 1$  км/ч, а скорость теплохода против течения равна  $u - 1$  км/ч. На весь путь теплоход затратил  $34 - 2 = 32$  часов, отсюда имеем:

$$\frac{255}{u+1} + \frac{255}{u-1} = 32 \Leftrightarrow \frac{255 \cdot 2u}{u^2 - 1} = 32 \Leftrightarrow 255u = 16u^2 - 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16u^2 - 255u - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{255 + \sqrt{255^2 + 4 \cdot 16^2}}{32}; \\ u = \frac{255 - \sqrt{255^2 + 4 \cdot 16^2}}{32} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 16; \\ u = -\frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow_{u>0} u = 16.$$

Ответ: 16.

**Примечание.**

Корни квадратного уравнения  $16u^2 - 255u - 16 = 0$  можно найти по теореме, обратной теореме Виета. Действительно,  $u_1 + u_2 = \frac{255}{16} = 16 + \left(-\frac{1}{16}\right)$ , а  $u_1 \cdot u_2 = -1 = 16 \cdot \left(-\frac{1}{16}\right)$ . Поэтому корни уравнения суть числа 16 и  $-\frac{1}{16}$ .

**6. 6.** От пристани  $A$  к пристани  $B$ , расстояние между которыми равно 420 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним, со скоростью на 1 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт  $B$  оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

**Решение.**

Пусть  $u$  км/ч — скорость первого теплохода, тогда скорость второго теплохода по течению равна  $u + 1$  км/ч. Первый теплоход находился в пути на 1 час больше, чем второй, отсюда имеем:

$$\frac{420}{u} - \frac{420}{u+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{420}{u^2 + u} = 1 \Leftrightarrow 420 = u^2 + u \Leftrightarrow u^2 + u - 420 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 20; \\ u = -21 \end{cases} \Leftrightarrow_{u>0} u = 20.$$

Таким образом, скорость первого теплохода равна 20 км/ч.

Ответ: 20.

**7. 7.** От пристани  $A$  к пристани  $B$ , расстояние между которыми равно 110 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним со скоростью на 1 км/ч большей отправился второй. Найдите скорость второго теплохода, если в пункт  $B$  он прибыл одновременно с первым. Ответ дайте в км/ч.

**Решение.**

Пусть  $u$  км/ч — скорость второго теплохода, тогда скорость первого теплохода равна  $u - 1$  км/ч. Первый теплоход находился в пути на 1 час больше, чем второй, отсюда имеем:

$$\frac{110}{u-1} - \frac{110}{u} = 1 \Leftrightarrow \frac{110}{u^2 - u} = 1 \Leftrightarrow 110 = u^2 - u \Leftrightarrow u^2 - u - 110 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 11; \\ u = -10 \end{cases} \Leftrightarrow_{u>0} u = 11.$$

Ответ: 11.

**8. 8.** Баржа в 10:00 вышла из пункта  $A$  в пункт  $B$ , расположенный в 15 км от  $A$ . Пробыв в пункте  $B$  1 час 20 минут, баржа отправилась назад и вернулась в пункт  $A$  в 16:00 того же дня. Определите (в км/час) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 7 км/ч.

**Решение.**

Пусть  $u$  км/ч – скорость течения реки, тогда скорость баржи по течению равна  $7 + u$  км/ч, а скорость баржи против течения равна  $7 - u$  км/ч. Баржа вернулась в пункт  $A$  через 6 часов, но пробыла в пункте  $B$  1 час 20 минут, поэтому общее время движения баржи дается уравнением:

$$\frac{15}{7-u} + \frac{15}{7+u} = 6 - \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{15 \cdot (7+u) + 15 \cdot (7-u)}{49-u^2} = \frac{14}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30 \cdot 7 \cdot 3 = 14 \cdot 49 - 14u^2 \Leftrightarrow u^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2; \\ u = -2 \end{cases} \Leftrightarrow u = 2. \quad \begin{matrix} u > 0 \\ u > 0 \end{matrix}$$

Поэтому скорость течения реки равна 2 км/ч.

Ответ: 2.

**9. 9.** Пристани  $A$  и  $B$  расположены на озере, расстояние между ними 390 км. Баржа отправилась с постоянной скоростью из  $A$  в  $B$ . На следующий день после прибытия она отправилась обратно со скоростью на 3 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на 9 часов. В результате она затратила на обратный путь столько же времени, сколько на путь из  $A$  в  $B$ . Найдите скорость баржи на пути из  $A$  в  $B$ . Ответ дайте в км/ч.

**Решение.**

Пусть  $u$  км/ч – скорость баржи на пути из  $A$  в  $B$ , тогда скорость баржи на пути из  $B$  в  $A$   $u + 3$  км/ч. На обратном пути баржа сделала остановку на 9 часов, и в результате она затратила на обратный путь столько же времени, сколько и на прямой, отсюда имеем:

$$\frac{390}{u} = \frac{390}{u+3} + 9 \Leftrightarrow \frac{390}{u} = \frac{390 + 9u + 27}{u+3} \Leftrightarrow 3 \cdot 390 = 27u + 9u^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9u^2 + 27u - 3 \cdot 3 \cdot 130 = 0 \Leftrightarrow u^2 + 3u - 130 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 10; \\ u = -13 \end{cases} \Leftrightarrow u = 10. \quad \begin{matrix} u > 0 \\ u > 0 \end{matrix}$$

Поэтому собственная скорость баржи равна 10 км/ч.

Ответ: 10.

**10. 10.** Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 25 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 30 часов после отплытия из него. Сколько километров прошел теплоход за весь рейс?

**Решение.**

Пусть весь путь теплохода равен  $2S$  км. Время в пути составляет 30 часов, из которых 5 часов – стоянка:

$$\frac{S}{25-3} + \frac{S}{25+3} = 30 - 5 \Leftrightarrow \frac{50S}{22 \cdot 28} = 25 \Leftrightarrow S = 308.$$

Тем самым, весь пути теплохода составляет  $2 \cdot 308 = 616$  км.

Ответ: 616.

**11. 11.** Расстояние между пристанями  $A$  и  $B$  равно 120 км. Из  $A$  в  $B$  по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт  $B$ , тотчас повернула обратно и возвратилась в  $A$ . К этому времени плот прошел 24 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

**Решение.**

Скорость плота равна скорости течения реки 2 км/ч. Пусть  $u$  км/ч – скорость яхты, тогда скорость яхты по течению равна  $u + 2$  км/ч, а скорость яхты против течения равна  $u - 2$  км/ч. Яхта, прибыв в пункт  $B$ , тотчас повернула обратно и возвратилась в  $A$ , а плоту понадобилось на час больше времени, чтобы пройти 24 км.

$$\frac{120}{u+2} + \frac{120}{u-2} + 1 = \frac{24}{2} \Leftrightarrow \frac{240u}{u^2-4} = 11 \Leftrightarrow 11u^2 - 240u - 44 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{240 + \sqrt{240^2 + 44^2}}{22} = 22; \\ u = \frac{240 - \sqrt{240^2 + 44^2}}{22} = -\frac{2}{11} \end{cases} \Leftrightarrow u = 22.$$

Ответ: 22.

**12. 12.** Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 20 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолете со скоростью 480 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

**Решение.**

Чтобы найти среднюю скорость на протяжении пути, нужно весь путь разделить на все время движения. Пусть  $2S$  км — весь путь путешественника, тогда средняя скорость равна:

$$2S : \left( \frac{S}{20} + \frac{S}{480} \right) = 2S : \frac{24S + S}{480} = \frac{2S \cdot 480}{25S} = 38,4 \text{ км/ч.}$$

Поэтому средняя скорость путешественника 38,4 км/ч.

Ответ: 38,4.

**13. 13.** По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 120 метров, второй — длиной 80 метров. Сначала второй сухогруз отстает от первого, и в некоторый момент времени расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго составляет 400 метров. Через 12 минут после этого уже первый сухогруз отстает от второго так, что расстояние от кормы второго сухогруза до носа первого равно 600 метрам. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?

**Решение.**

Пока сухогрузы перейдут из первого положения во второе, второй сухогруз переместился относительно первого на

$$120 + 400 + 80 + 600 = 1200 \text{ м.}$$

Пусть  $u$  – разность скоростей сухогрузов, тогда

$$u = \frac{1200}{12} = 100 \text{ м/мин} = 6 \text{ км/ч.}$$

Ответ: 6.

**14. 14.** Весной катер идёт против течения реки в  $1\frac{2}{3}$  раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее. Поэтому летом катер идёт против течения в  $1\frac{1}{2}$  раза медленнее, чем по течению. Найдите скорость течения весной (в км/ч).

**Решение.**

Пусть  $x$  (км/ч) — собственная скорость катера,  $y$  (км/ч) — скорость течения реки весной. Тогда летом она составит  $y - 1$  (км/ч);  $x > y > 1$ . Составим таблицу по данным задачи:

	Весна	Лето
По течению	$x + y$	$x + y - 1$
Против течения	$x - y$	$x - y + 1$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{3}, \\ \frac{x+y-1}{x-y+1} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y) = 5(x-y), \\ 2(x+y-1) = 3(x-y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y, \\ x - 5y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20, \\ y = 5. \end{cases}$$

Таким образом, скорость течения весной равна 5 км/ч.

Ответ: 5.