

Задачи на прогрессии

1. 1. Бригада маляров красит забор длиной 240 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 60 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

Решение.

Пусть бригада в первый день покрасила a_1 метров забора, во второй — a_2 , ..., в последний — a_n метров забора. Тогда $a_1 + a_n = 60$ м, а за n дней было покрашено

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n = 30n \text{ метров забора.}$$

Поскольку всего было покрашено 240 метров забора, имеем: $30n = 240 \Leftrightarrow n = 8$. Таким образом, бригада красила забор в течение 8 дней.

Ответ: 8.

2. 2. Рабочие прокладывают тоннель длиной 500 метров, ежедневно увеличивая норму прокладки на одно и то же число метров. Известно, что за первый день рабочие проложили 3 метра тоннеля. Определите, сколько метров тоннеля проложили рабочие в последний день, если вся работа была выполнена за 10 дней.

Решение.

Пусть рабочие в первый день проложили a_1 метров тоннеля, во второй — a_2 , ..., в последний — a_{10} метров тоннеля. Длина тоннеля $S_n = 500$ метров. $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n$, $n = 10$ дней. Тогда в последний день рабочие проложили

$$a_{10} = \frac{2S_n}{n} - a_1 = \frac{1000}{10} - 3 = 97 \text{ метров.}$$

Таким образом, рабочие в последний день проложили 97 метров тоннеля.

Ответ: 97.

3. 3. Васе надо решить 434 задачи. Ежедневно он решает на одно и то же количество задач больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Вася решил 5 задач. Определите, сколько задач решил Вася в последний день, если со всеми задачами он справился за 14 дней.

Решение.

В первый день Вася решил $a_1 = 5$ задач, в последний — a_{14} задач. Всего надо решить $S_{14} = 434$ задач. Поскольку $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n$, где $a_1 = 5$, $n = 14$ имеем:

$$S_{14} = \frac{a_1 + a_{14}}{2} \cdot 14 = 7(5 + a_{14}).$$

Тогда

$$7(5 + a_{14}) = 434 \Leftrightarrow 5 + a_{14} = 62 \Leftrightarrow a_{14} = 57 \text{ задач.}$$

Ответ: 57.

4. 4. Турист идет из одного города в другой, каждый день проходя больше, чем в предыдущий день, на одно и то же расстояние. Известно, что за первый день турист прошел 10 километров. Определите, сколько километров прошел турист за третий день, если весь путь он прошел за 6 дней, а расстояние между городами составляет 120 километров.

Решение.

В первый день турист прошел $a_1 = 10$ км, во второй — a_2 , ..., в последний — a_6 км. Всего он прошел $S_n = 120$ км. Если каждый день турист проходил больше, чем в предыдущий день, на d км, то

$$S_n = \frac{2a_1 + d \cdot (n - 1)}{2} n,$$

где $n = 6$ дней, $a_1 = 10$ км. Таким образом,

$$\frac{2 \cdot 10 + 5d}{2} \cdot 6 = 120 \Leftrightarrow 5d = 20 \Leftrightarrow d = 4.$$

Тогда за третий день турист прошел

$$a_3 = a_1 + 2d = 10 + 2 \cdot 4 = 18 \text{ км.}$$

Ответ: 18.

5. 5. Грузовик перевозит партию щебня массой 210 тонн, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 2 тонны щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено за девятый день, если вся работа была выполнена за 14 дней.

Решение.

Пусть в первый день грузовик перевез $a_1 = 2$ тонны щебня, во второй — a_2 , ..., в последний — a_8 тонн; всего было перевезено $S_n = 210$ тонн; норма перевозки увеличивалась ежедневно на d тонн. Таким образом,

$$S_n = \frac{2a_1 + d \cdot (n - 1)}{2} n \Leftrightarrow 210 = \frac{2 \cdot 2 + 13d}{2} \cdot 14 \Leftrightarrow 30 = 4 + 13d \Leftrightarrow d = 2.$$

Имеем:

$$a_9 = a_1 + 8d = 2 + 8 \cdot 2 = 18.$$

Следовательно, за девятый день было перевезено 18 тонн щебня.

Ответ: 18.

6. 6. Улитка ползет от одного дерева до другого. Каждый день она проползает на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий день. Известно, что за первый и последний дни улитка проползла в общей сложности 10 метров. Определите, сколько дней улитка потратила на весь путь, если расстояние между деревьями равно 150 метрам.

Решение.

Пусть улитка проползла в первый день a_1 метров, во второй — a_2 , ..., в последний — a_n метров. Тогда $a_1 + a_n = 10$ м, а за n дней проползла $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = 5n$ метров. Поскольку всего она проползла 150 метров, имеем: $5n = 150$, откуда $n = 30$. Таким образом, улитка потратила на весь путь 30 дней.

Ответ: 30.

7. 7. Вере надо подписать 640 открыток. Ежедневно она подписывает на одно и то же количество открыток больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Вера подписала 10 открыток. Определите, сколько открыток было подписано за четвертый день, если вся работа была выполнена за 16 дней.

Решение.

В первый день Вера подписала $a_1 = 10$ открыток, во второй — a_2 , ..., в последний — a_{16} открыток. Всего было подписано $S_n = 640$ открыток. Если количество подписываемых открыток увеличивалось на d каждый день, то

$$S_n = \frac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} n \Leftrightarrow 640 = \frac{2 \cdot 10 + 15d}{2} \cdot 16 \Leftrightarrow 80 = 20 + 15d \Leftrightarrow d = 4.$$

Тогда

$$a_4 = a_1 + 3d = 10 + 3 \cdot 4 = 22.$$

Следовательно, за четвертый день было подписано 22 открытки.

Ответ: 22.

8. 8. Бизнесмен Бубликов получил в 2000 году прибыль в размере 5000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 300% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Бубликов за 2003 год?

Решение.

Поскольку каждый год прибыль увеличивалась на 300%, она увеличивалась в 4 раза по сравнению с предыдущим годом. Ищем четвертый член геометрической прогрессии: за 2003 год Бубликов заработал $5000 \cdot 4^3 = 320\,000$ руб.

Ответ: 320000.

9. 9. Компания "Альфа" начала инвестировать средства в перспективную отрасль в 2001 году, имея капитал в размере 5000 долларов. Каждый год, начиная с 2002 года, она получала прибыль, которая составляла 200% от капитала предыдущего года. А компания «Бета» начала инвестировать средства в другую отрасль в 2003 году, имея капитал в размере 10000 долларов, и, начиная с 2004 года, ежегодно получала прибыль, составляющую 400% от капитала предыдущего года. На сколько долларов капитал одной из компаний был больше капитала другой к концу 2006 года, если прибыль из оборота не изымалась?

Решение.

Каждый год прибыль компании «Альфа» составляла 200% от капитала предыдущего года, значит, капитал каждый год составлял 300% от капитала предыдущего года. В конце 2006 года на счете компании «Альфа» была сумма

$$5000 \cdot 3^{2006-2001} = 5000 \cdot 3^5 = 5000 \cdot 243 = 1\,215\,000. \text{ долларов.}$$

Каждый год прибыль компании «Бета» составила 400% от капитала предыдущего года, значит, капитал каждый год составлял 500% от капитала предыдущего года. В конце 2006 года на счете компании «Бета» была сумма

$$10000 \cdot 5^{2006-2003} = 10000 \cdot 5^3 = 10000 \cdot 125 = 1\,250\,000.$$

Таким образом, капитал компании «Бета» был на 35 000 долларов больше.

Ответ: 35 000.