

Исследование частных

1. 1. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x^2 + 289}{x}$.

Решение.

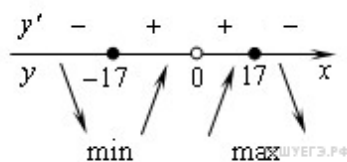
Найдем производную заданной функции:

$$y' = -\left(\frac{x^2 + 289}{x}\right)' = -\left(x + \frac{289}{x}\right)' = -\left(1 - \frac{289}{x^2}\right) = \frac{289 - x^2}{x^2}.$$

Найдем нули производной:

$$x^2 = 289 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17, \\ x = -17. \end{cases}$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = 17$.

Ответ: 17.

2. 2. Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x^2 + 1}{x}$.

Решение.

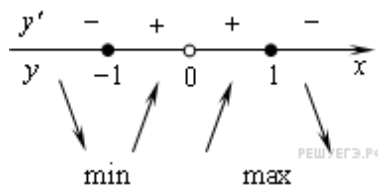
Найдем производную заданной функции:

$$y' = -\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)' = -\left(x + \frac{1}{x}\right)' = -\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = -1 + \frac{1}{x^2} = \frac{1 - x^2}{x^2}.$$

Найдем нули производной:

$$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -1. \end{cases}$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = -1$.

Ответ: -1.

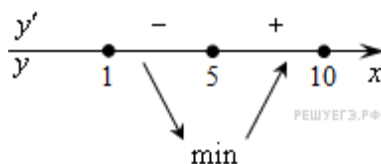
3. 3. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x^2 + 25}{x}$ на отрезке $[1; 10]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = \left(\frac{x^2 + 25}{x} \right)' = \left(x + \frac{25}{x} \right)' = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2}.$$

Производная обращается в нуль в точках 5 и -5. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции на заданном отрезке:



Наименьшим значением функции на заданном отрезке будет ее значение в точке 5. Найдем его:

$$y(5) = \frac{25 + 25}{5} = 10.$$

Ответ: 10.

4. 4. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^2 + 25}{x}$ на отрезке $[-10; -1]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = \left(\frac{x^2 + 25}{x} \right)' = \left(x + \frac{25}{x} \right)' = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2}.$$

Производная обращается в нуль в точках 5 и -5, заданному отрезку принадлежит только число -5.

Наибольшим значением функции на заданном отрезке будет наибольшее из чисел $y(-1)$, $y(-5)$ и $y(-10)$. Найдем их:

$$\begin{aligned} y(-10) &= \frac{100 + 25}{-10} = -12,5, \\ y(-5) &= \frac{25 + 25}{-5} = -10, \\ y(-1) &= \frac{1 + 25}{-1} = -26. \end{aligned}$$

Ответ: -10.

5. 5. Найдите точку максимума функции $y = \frac{16}{x} + x + 3$.

Решение.

Область определения функции: $x \neq 0$.

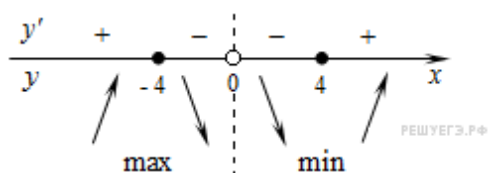
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 1 - \frac{16}{x^2}.$$

Найдем нули производной:

$$1 - \frac{16}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ x = -4. \end{cases}$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = -4$.

Ответ: -4 .

6. 6. Найдите точку минимума функции $y = \frac{25}{x} + x + 25$.

Решение.

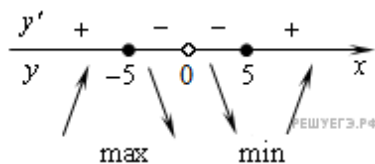
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 1 - \frac{25}{x^2}.$$

Найдем нули производной:

$$1 - \frac{25}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ x = -5. \end{cases}$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 5$.

Ответ: 5 .

7. 7. Найдите наименьшее значение функции $y = x + \frac{36}{x}$ на отрезке $[1; 9]$.

Решение.

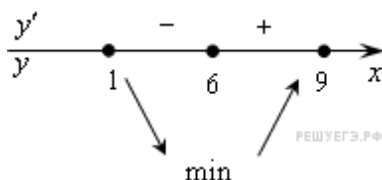
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 1 - \frac{36}{x^2}.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} 1 - \frac{36}{x^2} = 0, \\ 1 \leq x \leq 9. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 36, \\ 1 \leq x \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 6, \\ x = -6, \end{cases} \\ 1 \leq x \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 6$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение: $y(6) = 6 + 6 = 12$.

Ответ: 12.

8. 8. Найдите наибольшее значение функции $y = x + \frac{9}{x}$ на отрезке $[-4; -1]$.

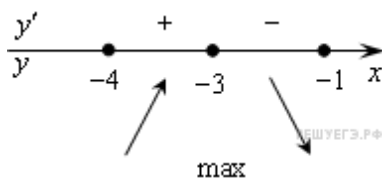
Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2}.$$

Найденная производная обращается в нуль в точках 3 и -3 , из них на отрезке $[-4; -1]$ лежит только точка -3 .

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = -3$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y(-3) = -3 - 3 = -6.$$

Ответ: -6 .

9. 9. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 289}$.

Решение.

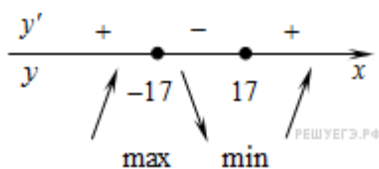
Найдем производную заданной функции:

$$y' = -\left(\frac{x}{x^2 + 289}\right)' = -\frac{1 \cdot (x^2 + 289) - x \cdot (2x)}{(x^2 + 289)^2} = \frac{x^2 - 289}{(x^2 + 289)^2}.$$

Найдем нули производной:

$$x^2 - 289 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 289 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17, \\ x = -17. \end{cases}$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = -17$.

Ответ: -17 .

10. 10. Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 1}$.

Решение.

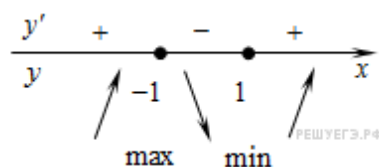
Найдем производную заданной функции:

$$y' = -\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)' = -\frac{(x^2 + 1) - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

Найдем нули производной:

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -1. \end{cases}$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 1$.

Ответ: 1.

11. 11. Найдите точку максимума функции

$$y = \frac{98}{x} + 2x + 15.$$

Решение.

Область определения функции: $x \neq 0$.

Найдите точку максимума функции $y = \frac{98}{x} + 2x + 15$.

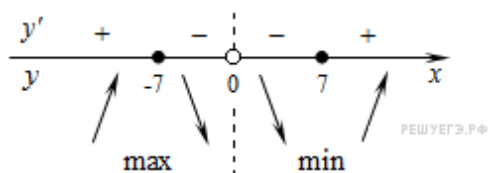
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 2 - \frac{98}{x^2}.$$

Найдем нули производной:

$$1 - \frac{49}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 49 \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -7. \end{cases}$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = -7$.

Ответ: -7 .