Исследование произведений

1. 1. Найдите наименьшее значение функции $y=(x-8)e^{x-7}$ на отрезке $[6;8]$.

Решение.

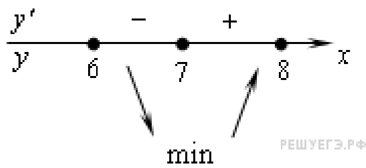
Найдем производную заданной функции:

$$y'=(x-8)'e^{x-7}+(x-8)(e^{x-7})'=e^{x-7}+(x-8)e^{x-7}=(x-7)e^{x-7}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} y'=0, \\ 6\le x\le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)e^{x-7}=0, \\ 6\le x\le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7=0, \\ 6\le x\le 8 \end{cases} \Leftrightarrow x=7.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Наименьшим значением заданной функции на отрезке $[6;8]$ будет $y(7)=-1$.

Ответ: -1.

2. 2. Найдите точку минимума функции $y=(x+16)e^{x-16}$.

Решение.

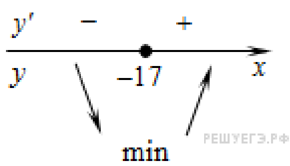
Найдем производную заданной функции:

$$y'=(x+16)'e^{x-16}+(x+16)(e^{x-16})'=e^{x-16}+(x+16)e^{x-16}=(x+17)e^{x-16}.$$

Найдем нули производной:

$$(x+17)e^{x-16}=0 \Leftrightarrow x=-17.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x=-17$.

Ответ: -17.

3. 3. Найдите точку максимума функции $y=(9-x)e^{x+9}$.

Решение.

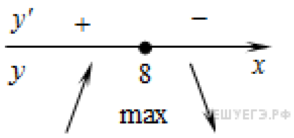
Найдем производную заданной функции:

$$y' = (9-x)'e^{x+9} + (9-x)(e^{x+9})' = -e^{x+9} + (9-x)e^{x+9} = (8-x)e^{x+9}.$$

Найдем нули производной:

$$(8-x)e^{x+9} = 0 \Leftrightarrow x = 8.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = 8$.

Ответ: 8.

4. 4. Найдите точку минимума функции $y = (3-x)e^{3-x}$.

Решение.

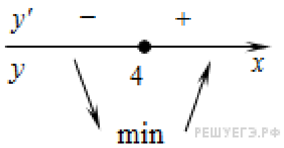
Найдем производную заданной функции:

$$y' = (3-x)'e^{3-x} + (3-x)(e^{3-x})' = -e^{3-x} + (3-x)e^{3-x}(-1) = (x-4)e^{3-x}.$$

Найдем нули производной:

$$(x-4)e^{3-x} = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 4$.

Ответ: 4.

5. 5. Найдите точку максимума функции $y = (x+16)e^{16-x}$.

Решение.

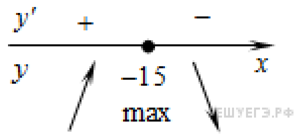
Найдем производную заданной функции:

$$y' = (x+16)'e^{16-x} + (x+16)(e^{16-x})' = e^{16-x} + (16+x)e^{16-x}(-1) = -(x+15)e^{16-x}.$$

Найдем нули производной:

$$-(x+15)e^{16-x} = 0 \Leftrightarrow x = -15.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = -15$.

Ответ: -15.

6. 6. Найдите точку минимума функции $y = (3x^2 - 36x + 36)e^{x-36}$.

Решение.

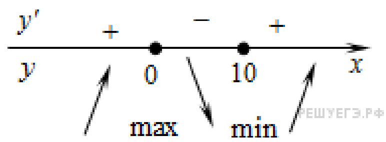
Найдем производную заданной функции:

$$y' = (3x^2 - 36x + 36)'e^{x-36} + (3x^2 - 36x + 36)(e^{x-36})' =$$
$$= (6x - 36)e^{x-36} + (3x^2 - 36x + 36)e^{x-36} = (3x^2 - 30x)e^{x-36} = 3x(x-10)e^{x-36}.$$

Найдем нули производной:

$$3x(x-10)e^{x-36} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 10. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 10$.

Ответ: 10.

7. 7. Найдите точку максимума функции $y = (3x^2 - 36x + 36)e^{x+36}$.

Решение.

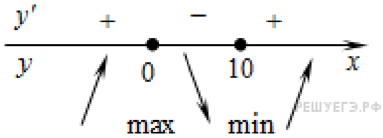
Найдем производную заданной функции:

$$y' = (3x^2 - 36x + 36)'e^{x+36} + (3x^2 - 36x + 36)(e^{x+36})' =$$
$$= (6x - 36)e^{x+36} + (3x^2 - 36x + 36)e^{x+36} = (3x^2 - 30x)e^{x+36} = 3x(x - 10)e^{x+36}.$$

Найдем нули производной:

$$3x(x-10)e^{x+36} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 10. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = 0.$

Ответ: 0.

8. 8. Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 10x + 10)e^{5-x}$.

Решение.

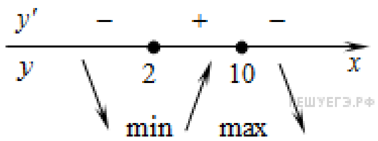
Найдем производную заданной функции:

$$y' = (x^2 - 10x + 10)'e^{5-x} + (x^2 - 10x + 10)(e^{5-x})' =$$
$$= (2x - 10)e^{5-x} - (x^2 - 10x + 10)e^{5-x} = -(x^2 - 12x + 20)e^{5-x} = -(x-2)(x-10)e^{5-x}.$$

Найдем нули производной:

$$(x-2)(x-10)e^{5-x} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 10. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = 10$.

Ответ: 10.

9. 9. Найдите точку максимума функции $y = (x-2)^2 e^{x-6}$.

Решение.

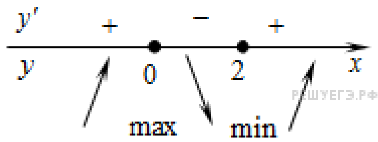
Найдем производную заданной функции:

$$y' = ((x-2)^2)'e^{x-6} + (x-2)^2(e^{x-6})' = 2(x-2)e^{x-6} + (x-2)^2e^{x-6} = x(x-2)e^{x-6}.$$

Найдем нули производной:

$$x(x-2)e^{x-6} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=0. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = 0.$

Ответ: 0.

10. 10. Найдите точку минимума функции $y = (x-2)^2e^{x-5}$.

Решение.

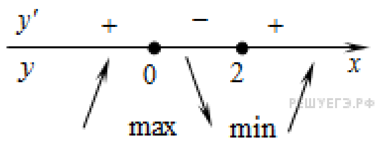
Найдем производную заданной функции:

$$y' = ((x-2)^2)'e^{x-5} + ((x-2)^2)(e^{x-5})' = (2(x-2))e^{x-5} + ((x-2)^2)e^{x-5} = x(x-2)e^{x-5}.$$

Найдем нули производной:

$$x(x-2)e^{x-5} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=0. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 2$.

Ответ: 2.

11. 11. Найдите точку максимума функции $y = (x+6)^2e^{4-x}$.

Решение.

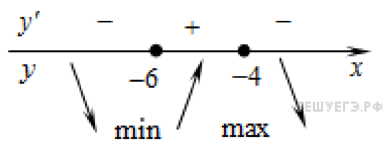
Найдем производную заданной функции:

$$y' = ((x+6)^2)'e^{4-x} + ((x+6)^2)(e^{4-x})' = (2(x+6))e^{4-x} - ((x+6)^2)e^{4-x} =$$
$$= -(x+4)(x+6)e^{4-x}.$$

Найдем нули производной:

$$-(x+4)(x+6)e^{4-x} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = -6. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = -4$.

Ответ: −4.

12. 12. Найдите точку минимума функции $y = (x+3)^2 e^{2-x}$.

Решение.

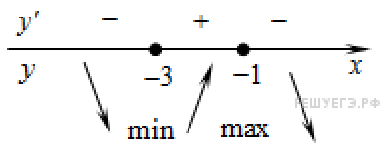
Найдем производную заданной функции:

$$y' = ((x+3)^2)'e^{2-x} + ((x+3)^2)(e^{2-x})' = (2(x+3))e^{2-x} - ((x+3)^2)e^{2-x} =$$
$$= -(x+3)(x+1)e^{2-x}.$$

Найдем нули производной:

$$-(x+3)(x+1)e^{2-x} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = -3$.

Ответ: −3.

13. 13. Найдите точку минимума функции $y = (x^2 - 8x + 8)e^{6-x}$.

Решение.

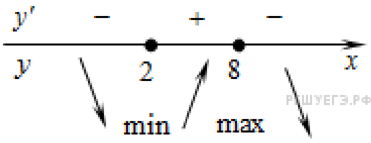
Найдем производную заданной функции:

$$y' = (x^2 - 8x + 8)' \cdot e^{6-x} + (x^2 - 8x + 8) \cdot (e^{6-x})' =$$
$$= (2x - 8) \cdot e^{6-x} + (x^2 - 8x + 8) \cdot e^{6-x} \cdot (-1) = -(x^2 - 10x + 16)e^{6-x}.$$

Найдем нули производной:

$$(x^2 - 10x + 16)e^{6-x} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 8. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 2$.

Ответ: 2.

14. 14. Найдите наименьшее значение функции $y = (8 - x)e^{9-x}$ на отрезке $[3; 10]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

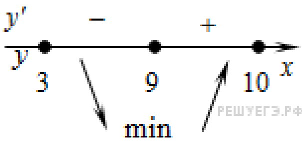
$$y' = \left((8 - x)e^{9-x}\right)' = (8 - x)'e^{9-x} + (8 - x)(e^{9-x})' =$$

$$= -(8 - x)e^{9-x} - e^{9-x} = (x - 9)e^{9-x}.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} (x - 9)e^{9-x} = 0, \\ 3 \le x \le 10. \end{cases} \Leftrightarrow x = 9.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 9$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение: $y(9) = -1 \cdot 1 = -1$.

Ответ: −1.

15. 15. Найдите наибольшее значение функции $y = (8 - x)e^{x-7}$ на отрезке $[3; 10]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

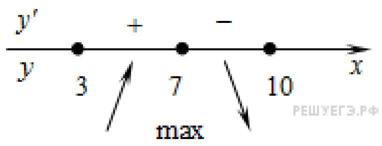
$$y' = \left((8-x)e^{x-7}\right)' = (8-x)'e^{x-7} + (8-x)(e^{x-7})' =$$

$$= (8-x)e^{x-7} - e^{x-7} = (7-x)e^{x-7}.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} (7-x)e^{x-7} = 0 \\ 3 \le x \le 10 \end{cases} \Leftrightarrow x = 7.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 7$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение: $y(7) = 1$

Ответ: 1.

16. 16. Найдите наибольшее значение функции $y = (x-9)e^{10-x}$ на отрезке $[-11; 11]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

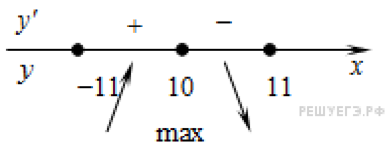
$$y' = \left((x-9)e^{10-x}\right)' = (x-9)'e^{10-x} + (x-9)(e^{10-x})' =$$

$$= (9-x)e^{10-x} + e^{10-x} = (10-x)e^{10-x}.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} (10-x)e^{10-x} = 0, \\ -11 \le x \le 11 \end{cases} \Leftrightarrow x = 10.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 10$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение: $y(10) = 1$

Ответ: 1.

17. 17. Найдите наименьшее значение функции $y = (3x^2 - 36x + 36)e^{x-10}$ на отрезке $[8; 11]$.

Решение.

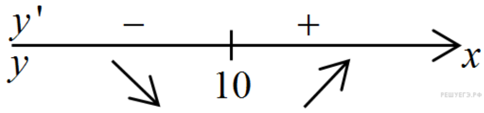
Найдем производную заданной функции:

$$y' = (3x^2 - 36x + 36)'e^{x-10} + (3x^2 - 36x + 36)(e^{x-10})' =$$
$$= (6x - 36)e^{x-10} + (3x^2 - 36x + 36)e^{x-10} = (3x^2 - 30x)e^{x-10} = 3x(x - 10)e^{x-10}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 3x(x-10)e^{x-10} = 0, \\ 8 \le x \le 11. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 10, \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 10. \\ 8 \le x \le 11 \end{cases}$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 10$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение: $y(10) = 3 \cdot 100 - 36 \cdot 10 + 36 = -24$.

Ответ: −24.

18. 18. Найдите наибольшее значение функции $y = (3x^2 - 36x + 36)e^x$ на отрезке $[-1; 4]$.

Решение.

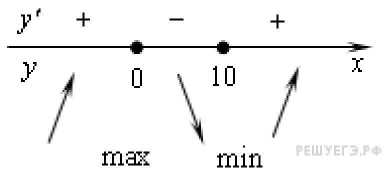
Найдем производную заданной функции:

$$y'(x) = (3x^2 - 36x + 36)'e^x + (3x^2 - 36x + 36)(e^x)' =$$
$$= (6x - 36)e^x + (3x^2 - 36x + 36)e^x = (3x^2 - 30x)e^x.$$

Найдем нули производной:

$$3x(x - 10)e^x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 10. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 0$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение: $y(0) = 36$.

Ответ: 36.

19. 19. Найдите наименьшее значение функции $y = (x^2 - 8x + 8)e^{2-x}$ на отрезке $[1; 7]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = (x^2-8x+8)'e^{2-x}+(x^2-8x+8)(e^{2-x})' =$$
$$=(2x-8)e^{2-x}+(x^2-8x+8)e^{2-x}\cdot(-1)=(-x^2+10x-16)e^{2-x}.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases}(-x^2+10x-16)e^{2-x}=0,\\ 1\le x\le 7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-10x+16=0,\\ 1\le x\le 7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=8,\end{array}\right.\\ 1\le x\le 7.\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

В точке $x=2$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(2)=4-8\cdot 2+8=-4.$$

Ответ: −4.

20. 20. Найдите наибольшее значение функции $y=(x^2-10x+10)e^{10-x}$ на отрезке $[5;11]$.

Решение.

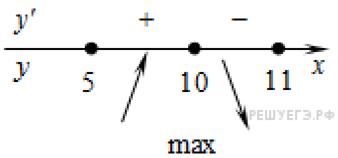
Найдем производную заданной функции:

$$y'(x)=(x^2-10x+10)'e^{10-x}+(x^2-10x+10)(e^{10-x})' =$$
$$=(2x-10)e^{10-x}+(x^2-10x+10)e^{10-x}\cdot(-1)=(-x^2+12x-20)e^{10-x}.$$

Найдем нули производной:

$$(x^2-12x+20)e^{10-x}=0\Leftrightarrow x^2-12x+20=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=10.\end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x=10$ функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y(10)=(100-100+10)e^0=10.$$

Ответ: 10.

21. 21. Найдите наименьшее значение функции $y=(x-2)^2e^{x-2}$ на отрезке $[1;4]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

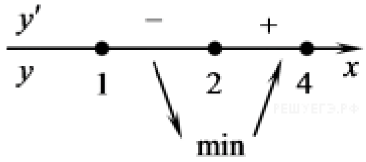
$$y' = ((x-2)^2)'e^{x-2} + (x-2)^2(e^{x-2})' = 2(x-2)e^{x-2} + (x-2)^2e^{x-2} =$$

$$= (x-2)(2+x-2)e^{x-2} = x(x-2)e^{x-2}.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} x(x-2)e^{x-2}=0, \\ 1 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=0, \end{array}\right. \\ 1 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x=2$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение: $y(2)=0$.

Ответ: 0.

22. 22. Найдите наибольшее значение функции $y=(x-2)^2e^x$ на отрезке $[-5;1]$.

Решение.

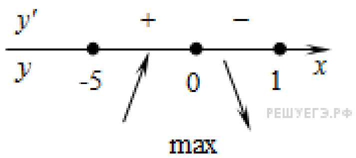
Найдем производную заданной функции:

$$y' = ((x-2)^2)'e^x + (x-2)^2(e^x)' = 2(x-2)e^x + (x-2)^2e^x =$$
$$= (x-2)(2+x-2)e^x = x(x-2)e^x.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} x(x-2)e^{x}=0, \\ -5 \le x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=0, \end{array}\right. \\ -5 \le x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x=0$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y(0) = 1\cdot(-2)^2 = 4.$$

Ответ: 4.

23. 23. Найдите наименьшее значение функции $y=(x+3)^2e^{-3-x}$ на отрезке $[-5;-1]$.

Решение.

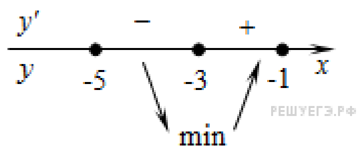
Найдем производную заданной функции:

$$y' = ((x+3)^2)'e^{-3-x} + ((x+3)^2)(e^{-3-x})' = (2(x+3))e^{-3-x} - ((x+3)^2)e^{-3-x} =$$
$$= (x+3)(2-x-3)e{-}3-x = -(x+1)(x+3)e^{-3-x}.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} -(x+1)(x+3)e^{-3-x} = 0, \\ -5 \le x \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=-3 \end{array}\right. \\ -5 \le x \le -1. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=-3 \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x=-3$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение: $y(-3)=0$.

Ответ: 0.

24. 24. Найдите наибольшее значение функции $y=(x+6)^2e^{-4-x}$ на отрезке $[-6;-1]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

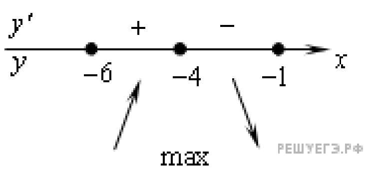
$$y' = ((x+6)^2)'e^{-4-x} + ((x+6)^2)(e^{-4-x})' = (2(x+6))e^{-4-x} + (x+6)^2e^{-4-x}\cdot(-1) =$$
$$= (2x+12-x^2-12x-36)e^{-4-x} = -(x^2+10x+24)e^{-4-x}.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} -(x^2+10x+24)e^{-4-x} = 0, \\ -6 \le x \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+10x+24=0, \\ -6 \le x \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-6, \\ x=-4, \end{array}\right. \\ -6 \le x \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6, \\ x=-4. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции на заданном отрезке:



В точке $x=-4$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение: $y(-4)=(-4+6)^2\cdot 1=4$

Ответ: 4.

25. 25. Найдите точку максимума функции $y=(x-2)^2(x-4)+5$.

Решение.

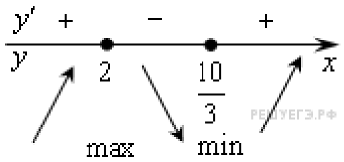
Найдем производную заданной функции:

$$y' = ((x-2)^2)'(x-4) + (x-2)^2(x-4)' + (5)' =$$
$$= 2(x-2)(x-4) + (x-2)^2 = (x-2)\cdot(2(x-4)+(x-2)) = (x-2)(3x-10).$$

Найдем нули производной:

$$(x-2)(3x-10) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = \dfrac{10}{3}. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = 2$.

Ответ: 2.

26. 26. Найдите точку минимума функции $y = (x+3)^2(x+5) - 1$.

Решение.

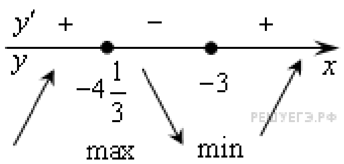
Найдем производную заданной функции:

$$y' = ((x+3)^2)'(x+5) + (x+3)^2(x+5)' - (1)' =$$
$$= 2(x+3)(x+5) + (x+3)^2 = (x+3)\cdot(2(x+5)+(x+3)) = (x+3)(3x+13).$$

Найдем нули производной:

$$(x+3)(3x+13) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = -4\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = -3.$

Ответ: −3.

27. 27. Найдите наименьшее значение функции $y = (x+3)^2(x+5) - 1$ на отрезке $[-4; -1]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

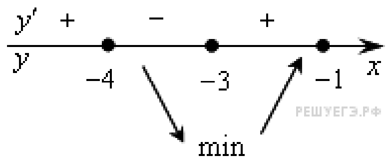
$$y' = ((x+3)^2)'(x+5) + (x+3)^2(x+5)' - (1)' =$$

$$= 2(x+3)(x+5) + (x+3)^2 = (x+3)(3x+13).$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} (x+3)(3x+13) = 0, \\ -4 \le x \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = -4\dfrac{1}{3}, \end{array} \right. \\ -4 \le x \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = -3$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(-3) = (-3+3)^2(-3+5) - 1 = -1.$$

Ответ: −1.

28. 28. Найдите наибольшее значение функции $y = (x-2)^2(x-4) + 5$ на отрезке $[1;3]$.

Решение.

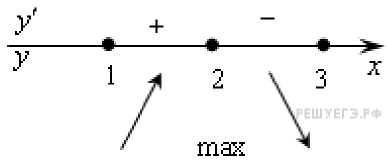
Найдем производную заданной функции:

$$y' = ((x-2)^2)'(x-4) + (x-2)^2(x-4)' + (5)' = 2(x-2)(x-4) + (x-2)^2 = (x-2)(3x-10).$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} (x-2)(3x-10) = 0, \\ 1 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 3\frac{1}{3}, \end{array} \right. \\ 1 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \; x = 2.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 2$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y(2) = (2-2)^2(2-4) + 5 = 5.$$

Ответ: 5.