

Исследование показательных и логарифмических функций

1. 1. Найдите наименьшее значение функции $y = 3x - \ln(x + 3)^3$ на отрезке $[-2,5; 0]$.

Решение.

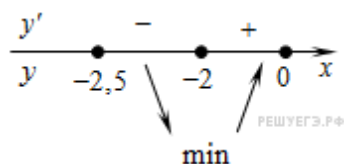
Найдем производную заданной функции:

$$y'(x) = 3 - \frac{3}{x+3}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 3 - \frac{3}{x+3} = 0, \\ -2,5 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+3} = 1, \\ -2,5 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ -2,5 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = -2$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(-2) = -2 \cdot 3 - \ln 1 = -6.$$

Ответ: -6 .

2. 2. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x + 5)^5 - 5x$ на отрезке $[-4,5; 0]$.

Решение.

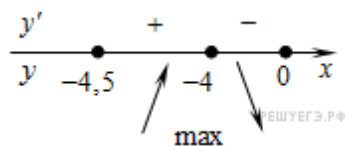
Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{5}{x+5} - 5.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} \frac{5}{x+5} - 5 = 0, \\ -4,5 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+5} = 1, \\ -4,5 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ -4,5 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -4.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = -4$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y(-4) = \ln 1 + 5 \cdot 4 = 20.$$

Ответ: 20.

3. 3. Найдите наименьшее значение функции $y = 4x - 4\ln(x+7) + 6$ на отрезке $[-6, 5; 0]$.

Решение.

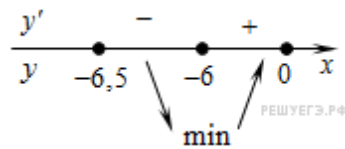
Найдем производную заданной функции:

$$y'(x) = 4 - \frac{4}{x+7}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 4 - \frac{4}{x+7} = 0, \\ -6,5 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6, \\ -6,5 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -6.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = -6$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(-6) = -6 \cdot 4 - 4 \ln 1 + 6 = -18.$$

Ответ: -18 .

4. 4. Найдите наибольшее значение функции $y = 8 \ln(x+7) - 8x + 3$ на отрезке $[-6,5; 0]$.

Решение.

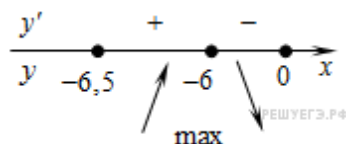
Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{8}{x+7} - 8.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} \frac{8}{x+7} - 8 = 0, \\ -6,5 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+7} = 1, \\ -6,5 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6, \\ -6,5 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -6.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = -6$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y(-6) = 8 \ln 1 + 8 \cdot 6 + 3 = 51.$$

Ответ: 51.

5. 5. Найдите наименьшее значение функции $y = 9x - \ln(9x) + 3$ на отрезке $\left[\frac{1}{18}; \frac{5}{18}\right]$.

Решение.

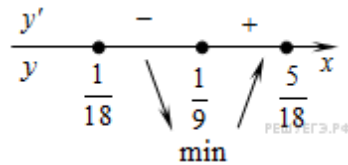
Функция определена и дифференцируема на заданном отрезке. Найдем ее производную:

$$y'(x) = 9 - \frac{1}{x}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 9 - \frac{1}{x} = 0, \\ \frac{1}{18} \leq x \leq \frac{5}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9}, \\ \frac{1}{18} \leq x \leq \frac{5}{18} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке, и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = \frac{1}{9}$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9} \cdot 9 - \ln 1 + 3 = 4.$$

Ответ: 4.

6. 6. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(11x) - 11x + 9$ на отрезке $\left[\frac{1}{22}; \frac{5}{22}\right]$.

Решение.

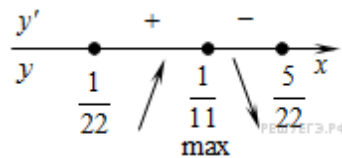
Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{1}{11x} \cdot 11 - 11 = \frac{1}{x} - 11.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - 11 = 0, \\ \frac{1}{22} \leq x \leq \frac{5}{22} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{11}, \\ \frac{1}{22} \leq x \leq \frac{5}{22} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{11}.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = \frac{1}{11}$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y\left(\frac{1}{11}\right) = \ln 1 - \frac{1}{11} \cdot 11 + 9 = 8.$$

Ответ: 8.

7. 7. Найдите наибольшее значение функции $y = 2x^2 - 13x + 9\ln x + 8$ на отрезке $\left[\frac{13}{14}; \frac{15}{14}\right]$.

Решение.

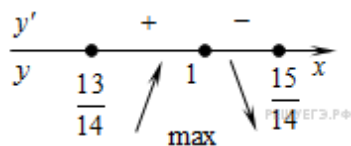
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 4x - 13 + \frac{9}{x}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 4x - 13 + \frac{9}{x} = 0, \\ \frac{13}{14} \leq x \leq \frac{15}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = \frac{18}{8}, \end{cases} \\ \frac{13}{14} \leq x \leq \frac{15}{14} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 1$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y(1) = 2 \cdot 1 - 13 \cdot 1 + 9 \cdot 0 + 8 = -3.$$

Ответ: -3 .

8. 8. Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 5x + \ln x - 3$ на отрезке $\left[\frac{5}{6}; \frac{7}{6}\right]$.

Решение.

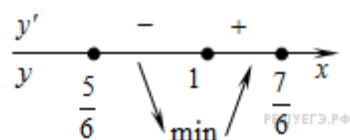
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 4x - 5 + \frac{1}{x}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 4x^2 - 5x + 1 = 0, \\ \frac{5}{6} \leq x \leq \frac{7}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1, \\ x = \frac{1}{4}, \end{cases} \\ \frac{5}{6} \leq x \leq \frac{7}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 1$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(1) = 2 \cdot 1 - 5 \cdot 1 - 3 = -6.$$

Ответ: -6 .

9. 9. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+5) - 2x + 9$.

Решение.

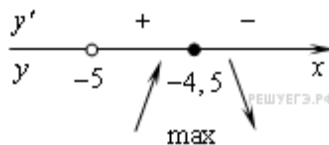
Функция определена и дифференцируема на $(-5; +\infty)$. Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{1}{x+5} - 2.$$

Найдем нули производной:

$$\frac{1}{x+5} - 2 = 0 \Leftrightarrow x+5 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -4,5.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = -4,5$.

Ответ: $-4,5$.

10. 10. Найдите точку минимума функции $y = 2x - \ln(x+3) + 7$.

Решение.

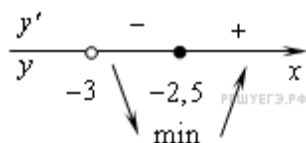
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 2 - \frac{1}{x+3}.$$

Найдем нули производной:

$$2 - \frac{1}{x+3} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+3} = 2 \Leftrightarrow x+3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2,5.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = -2,5$.

Ответ: $-2,5$.

11. 11. Найдите точку минимума функции $y = 3x - \ln(x+3)^3$.

Решение.

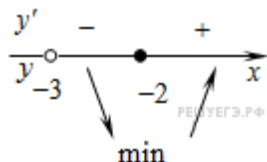
Заметим, что $y = 3x - 3\ln(x+3)$. Область определения функции — открытый луч $(-3; +\infty)$. Найдем производную заданной функции:

$$y'(x) = 3 - \frac{3}{x+3}.$$

Найдем нули производной:

$$3 - \frac{3}{x+3} = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Найденная точка лежит на луче $(-3; +\infty)$. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = -2$.

Ответ: -2 .

12. 12. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+5)^5 - 5x$.

Решение.

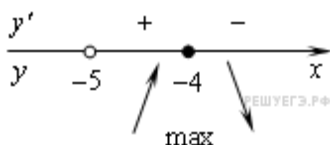
Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{5}{x+5} - 5.$$

Найдем нули производной:

$$\frac{5}{x+5} - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -4.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = -4$.

Ответ: -4 .

13. 13. Найдите точку минимума функции $y = 4x - 4\ln(x+7)$.

Решение.

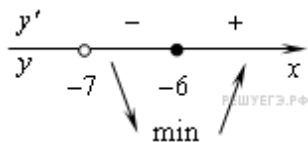
Заметим, что $y = 4x - 4\ln(x+7)$. Область определения функции — открытый луч $(-7; +\infty)$. Найдем производную заданной функции:

$$y'(x) = 4 - \frac{4}{x+7}.$$

Найдем нули производной:

$$4 - \frac{4}{x+7} = 0 \Leftrightarrow x = -6.$$

Найденная точка лежит на луче $(-7; +\infty)$. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = -6$.

Ответ: -6 .

14. 14. Найдите точку максимума функции $y = 8\ln(x+7) - 8x + 3$.

Решение.

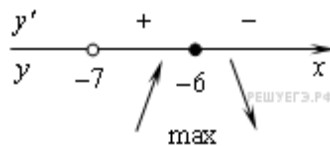
Заметим, что $y = 8\ln(x+7) - 8x + 3$. Область определения функции — открытый луч $(-7; +\infty)$.
Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{8}{x+7} - 8.$$

Найдем нули производной:

$$\frac{8}{x+7} - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -6.$$

Найденная точка лежит на луче $(-7; +\infty)$. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = -6$.

Ответ: -6 .

15. 15. Найдите точку максимума функции $y = 2x^2 - 13x + 9\ln x + 8$.

Решение.

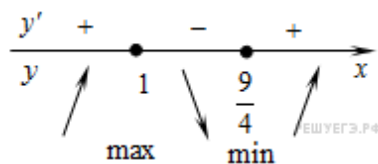
Заметим, что $y = 2x^2 - 13x + 9\ln x + 8$. Область определения функции — открытый луч $(0; +\infty)$.
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 4x - 13 + \frac{9}{x}.$$

Найдем нули производной:

$$4x - 13 + \frac{9}{x} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 13x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = \frac{9}{4}. \end{cases}$$

Найденные точки лежат на луче $(0; +\infty)$. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = 1$.

Ответ: 1 .

16. 16. Найдите точку минимума функции $y = 2x^2 - 5x + \ln x - 3$.

Решение.

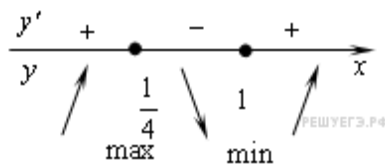
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 4x - 5 + \frac{1}{x}.$$

Найдем нули производной:

$$4x - 5 + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 1$.

Ответ: 1.

17. 17. Найдите наименьшее значение функции $e^{2x} - 6e^x + 3$ на отрезке $[1; 2]$.

Решение.

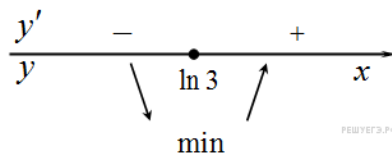
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 2e^{2x} - 6e^x = 2e^x(e^x - 3).$$

Найдем нули производной:

$$2e^x(e^x - 3) = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3.$$

Отметим на рисунке нули производной и поведение функции на заданном отрезке:



Следовательно, наименьшим значением функции на заданном отрезке является ее значение в точке минимума. Найдем его:

$$y(\ln 3) = e^{2\ln 3} - 6e^{\ln 3} + 3 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 3 = -6.$$

Ответ: -6.

18. 18. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+4)^2 + 2x + 7$.

Решение.

Заметим, что $\ln a^2 = 2 \ln |a|$, а значит,

$$y = 2 \ln |x+4| + 2x + 7 = \begin{cases} 2 \ln(x+4) + 2x + 7, & x > -4 \\ 2 \ln(-x-4) + 2x + 7, & x < -4. \end{cases}$$

Тогда

$$y' = \begin{cases} \frac{2}{x+4} + 2, & x > -4, \\ \frac{2}{x+4} + 2, & x < -4 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2(x+5)}{x+4}, & x > -4, \\ \frac{2(x+5)}{x+4}, & x < -4. \end{cases}$$

На луче $(-4; +\infty)$ производная положительна, а функция не имеет экстремумов. На луче $(-\infty; -4)$ производная обращается в нуль в точке -5 , которая является точкой максимума.

Ответ: -5 .

19. 19. Найдите точку максимума функции $y = 2 \ln(x+4)^3 - 8x - 19$.

Решение.

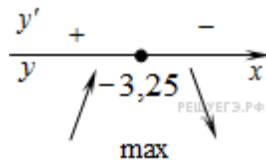
Заметим, что $y = 6 \ln(x+4) - 8x - 19$ при $x > -4$. Найдем производную этой функции:

$$y' = \frac{6}{x+4} - 8.$$

Найдем нули производной:

$$\frac{6}{x+4} - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -3,25.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = -3,25$.

Ответ: $-3,25$.

20. 20. Найдите точку максимума функции $y = 0,5x^2 - 7x + 12 \ln x + 8$.

Решение.

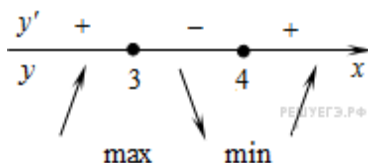
Область определения функции — открытый луч $(0; +\infty)$. Найдем производную заданной функции:

$$y' = x - 7 + \frac{12}{x}.$$

Найдем нули производной:

$$x - 7 + \frac{12}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = 4. \end{cases}$$

Найденные точки лежат на луче $(0; +\infty)$. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = 3$.

Ответ: 3.

21. 21. Найдите наименьшее значение функции $y = 4x^2 - 10x + 2\ln x - 5$ на отрезке $[0,3; 3]$.

Решение.

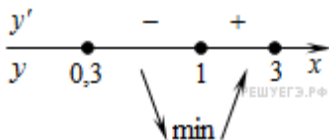
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 8x - 10 + \frac{2}{x}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 8x - 10 + \frac{2}{x} = 0, \\ 0,3 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0,25, \\ x_2 = 1, \\ 0,3 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 1$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(1) = 4 \cdot 1 - 10 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 5 = -11.$$

Ответ: -11.