Исследование функций без помощи производной

1. 1. Найдите точку максимума функции $y=\sqrt{4-4x-x^2}$.

Решение.

Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ с отрицательным старшим коэффициентом достигает максимума в точке $x_{max}=-\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке -2. Поскольку функция $y=\sqrt{x}$ возрастающая, а заданная функция определена при найденном значении переменной, она достигает максимума в той же точке, в которой достигает максимума подкоренное выражение.

Ответ: -2.

2. 2. Найдите точку минимума функции $y=\sqrt{x^2-6x+11}$.

Решение.

Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ с положительным старшим коэффициентом достигает минимума в точке $x_{min}=-\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке 3. Поскольку функция $y=\sqrt{x}$ возрастающая, а заданная функция определена при найденном значении переменной, она достигает минимума в той же точке, в которой достигает минимума подкоренное выражение.

Ответ: 3.

3. 3. Найдите наименьшее значение функции $y=\sqrt{x^2-6x+13}$.

Решение.

Выделим полный квадрат:

$$y=\sqrt{x^2-6x+13}=\sqrt{(x-3)^2+4}.$$

Отсюда имеем:

$$y=\sqrt{(x-3)^2+4}\geq\sqrt{4}=2.$$

Поэтому наименьшее значние функции достигается в точке 3, и оно равно 2.

Ответ: 2.

Примечание.

Приведем другое решение.

Поскольку функция $y=\sqrt{x}$ возрастающая, а подкоренное выражение положительно при всех значениях переменной, заданная функция достигает наименьшего значения в той же точке, в которой достигает наименьшего значения подкоренное выражение. Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ с положительным старшим коэффициентом достигает наименьшего значения в точке $x=-\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке 3, и оно равно 4. Следовательно, наименьшее значение заданной функции $y_{\text{нм}}=\sqrt{4}=2$.

4. 4. Найдите наибольшее значение функции $y=\sqrt{5-4x-x^2}$.

Решение.

Выделим полный квадрат:

$$y=\sqrt{5-4x-x^2}=\sqrt{9-(x+2)^2}.$$

Отсюда имеем:

$$y=\sqrt{9-(x+2)^2}\le\sqrt{9}=3.$$

Поэтому наибольшее значние функции достигается в точке −2, и оно равно 3.

Ответ: 3.

Примечание.

Приведем другое решение.

Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ с отрицательным старшим коэффициентом достигает наибольшего значения в точке $x=-\frac{b}{2a}$. В нашем случае наибольшее значение достигается в точке −2 и равно 9. Поскольку функция $y=\sqrt{x}$ возрастает и определена в точке 9, для исходной функции $y=\sqrt{5-4x-x^2}$ имеем: $y_{\text{нб}}=\sqrt{9}=3$.

5. 5. Найдите точку максимума функции $y=\log_2(2+2x-x^2)-2$.

Решение.

Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ с отрицательным старшим коэффициентом достигает максимума в точке $x_{max}=-\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке 1. Поскольку функция $y=\log_2 x$ возрастает, и функция $y=\log_2(2+2x-x^2)-2$ определена в точке 1, она также достигает в ней максимума.

Ответ: 1.

6. 6. Найдите точку минимума функции $y=\log_5(x^2-6x+12)+2$.

Решение.

Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ с положительным старшим коэффициентом достигает минимума в точке $x_{min}=-\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке 3. Поскольку функция $y=\log_5 x$ возрастает, и заданная функция $y=\log_5(x^2-6x+12)+2$ определена в точке 3, она также достигает в ней минимума.

Ответ: 3.

7. 7. Найдите наименьшее значение функции $y=\log_3(x^2-6x+10)+2$.

Решение.

Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ с положительным старшим коэффициентом достигает наименьшего значения в точке $x=-\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке 3. Функция $y=\log_3(x^2-6x+10)+2$ в этой точке определена и принимает значение $\log_3(3^2-6\cdot3+10)+2=2$. Поскольку логарифмическая функция с основанием, большим 1, возрастает, найденное значение является искомым наименьшим значением заданной функции.

Ответ: 2.

8. 8. Найдите наибольшее значение функции $y=\log_5(4-2x-x^2)+3$.

Решение.

Поскольку функция $y=\log_5 x$ возрастающая, она достигает наибольшего значения в той точке, в которой достигает наибольшего значения выражение, стоящее под знаком логарифма. Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ с отрицательным старшим коэффициентом достигает наибольшего значения в точке $x=-\dfrac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке -1. Значение функции в этой точке $y=\log_5(4-2\cdot(-1)-(-1)^2)+3=4.$

Ответ: 4.

9. 9. Найдите точку максимума функции $y=11^{6x-x^2}$.

Решение.

Поскольку функция $y=11^x$ возрастающая, заданная функция достигает максимума в той же точке, в которой достинает максимума выражение $6x-x^2$. Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ с отрицательным старшим коэффициентом достигает максимума в точке $x_{max}=-\dfrac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке 3.

Ответ: 3.

10. 10. Найдите точку минимума функции $y=7^{x^2+2x+3}$.

Решение.

Поскольку функция $y=7^x$ возрастающая, заданная функция достигает минимума в той же точке, в которой достигает минимума выражение x^2+2x+3. Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ с положительным старшим коэффициентом достигает минимума в точке $x_{min}=-\dfrac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке -1.

Ответ: -1.

11. 11. Найдите наименьшее значение функции $y=2^{x^2+2x+5}$.

Решение.

Поскольку функция $y=2^x$ возрастающая, заданная функция достигает наименьшего значения в той же точке, в которой достигает наименьшего значения выражение x^2+2x+5. Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ с положительным старшим коэффициентом достигает наименьшего значения в точке $x=-\dfrac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке -1. Значение функции в этой точке равно $y=2^{(-1)^2+2(-1)+5}=16$.

Ответ: 16.

12. 12. Найдите наибольшее значение функции $y=3^{-7-6x-x^2}$.

Решение.

Поскольку функция $y=3^x$ возрастающая, заданная функция достигает наибольшего значения в той же точке, в которой достигает наибольшего значения выражение $-7-6x-x^2$. Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ с отрицательным старшим коэффициентом достигает наибольшего значения в точке $x=-\dfrac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке -3. Значение функции в этой точке равно $y=3^{-7-6(-3)-(-3)^2}$.

Ответ: 9.

13. 13. Найдите наибольшее значение функции $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+6x+12)$ на отрезке $[-19;-1]$.

Решение.

Оценим логарифм, выделив полный квадрат. В силу убывания логарифмической функции с основанием меньше 1 справедлива цепочка соотношений:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2+6x+12)=\log_{\frac{1}{3}}((x+3)^2+3)\leq \log_{\frac{1}{3}}3=-1.$$

Поэтому в точке −3, лежащей на отрезке [−19; −1], функция достигает наибольшего значения, равного −1.

Ответ: −1.

14. 14. Найдите точку максимума функции $y=\sqrt{-6+12x-x^2}$.

Решение.

Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ с отрицательным старшим коэффициентом достигает максимума в точке $x_{max}=-\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке 6. Поскольку функция $y=\sqrt{x}$ возрастающая, а заданная функция определена при найденном значении переменной, она достигает максимума в той же точке, в которой достигает максимума подкоренное выражение.

Ответ: 6.

15. 15. Найдите точку минимума функции $y=\sqrt{x^2+6x+12}$.

Решение.

Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ с положительным старшим коэффициентом достигает минимума в точке $x_{min}=-\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке −3. Поскольку функция $y=\sqrt{x}$ возрастающая, а заданная функция определена при найденном значении переменной, она достигает минимума в той же точке, в которой достинает минимума подкоренное выражение.

Ответ: −3.