Логарифмические и показательные уравнения

1. 1. а) Решите уравнение $1+\log_2(9x^2+5)=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{8x^4+14}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-1,\ \dfrac{8}{9}\right]$.

Решение.

а) Заметим, что уравнение определено при любом x. Запишем исходное уравнение в виде:

$$\log_2(9x^2+5)=\log_2(8x^4+14)-\log_2 2 \Leftrightarrow \log_2(9x^2+5)=\log_2(4x^4+7)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9x^2+5=4x^4+7 \Leftrightarrow 4x^4-9x^2+2=0 \Leftrightarrow (4x^2-1)(x^2-2)=0.$$

Значит, либо $4x^2-1=0$, откуда $x=\dfrac{1}{2}$ или $x=-\dfrac{1}{2}$, либо $x^2-2=0$, откуда $x=\sqrt{2}$ или $x=-\sqrt{2}$.

б) Поскольку $-\sqrt{2}<-1<-\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2}<\dfrac{8}{9}<\sqrt{2}$, отрезку $\left[-1,\ \dfrac{8}{9}\right]$ принадлежат корни $x=\dfrac{1}{2}$ и $x=-\dfrac{1}{2}$.

Ответ: а) $x=\pm\sqrt{2}, x=\pm\dfrac{1}{2}$; б) $\pm\dfrac{1}{2}$.

2. 2. а) Решите уравнение $9^{x-\frac{1}{2}}-8\cdot 3^{x-1}+5=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1,\ \dfrac{7}{3}\right)$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение: $3\cdot 9^{(x-1)}—8\cdot 3^{(x-1)}+5=0$.

Пусть $t=3^{x-1}$, тогда уравнение запишется в виде $3t^2—8t+5=0$, откуда $t=1$ или $t=\dfrac{5}{3}$.

При $t=1$ получим: $3^{x-1}=1$ откуда $x=1$.

При $t=\dfrac{5}{3}$ получим: $3^{x-1}=\dfrac{5}{3}$ откуда $x=\log_3 5$.

б) Корень $x=1$ не принадлежит промежутку $\left(1,\ \dfrac{7}{3}\right)$. Поскольку $1<\log_3 5$ и $\log_3 5<\log_3 9=2<\dfrac{7}{3}$, корень $x=\log_3 5$ принадлежит промежутку $\left(1,\ \dfrac{7}{3}\right)$.

Ответ: а) $1, \log_3 5$; б) $\log_3 5$.

3. 3. а) Решите уравнение $4^{x^2-2x+1}+4^{x^2-2x}=20$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1;\ 2]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$4\cdot 4^{x^2-2x}+4^{x^2-2x}=20 \Leftrightarrow 4^{x^2-2x}=4\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x=1\Leftrightarrow x^2-2x-1=0.$$

Откуда $x=1\pm\sqrt{2}$.

б) Оценим $\sqrt{2}$ сверху целыми числами: $1<\sqrt{2}<2$. Тогда

$$2<1+\sqrt{2}<3 \text{ и } -1<1-\sqrt{2}<0.$$

Значит, отрезку $[-1; 2]$ принадлежит только $x=1-\sqrt{2}$.

Ответ а) $x=1\pm\sqrt{2}$; б) $x=1-\sqrt{2}$.

4. 4. а) Решите уравнение $7\cdot 9^{x^2-3x+1}+5\cdot 6^{x^2-3x+1}-48\cdot 4^{x^2-3x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [−1; 2].

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$7\cdot 9^{x^2-3x+1}+5\cdot 6^{x^2-3x+1}-48\cdot 4^{x^2-3x}=0\Leftrightarrow 7\cdot 9^{x^2-3x+1}+5\cdot 6^{x^2-3x+1}-12\cdot 4^{x^2-3x+1}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7\left(\frac{9}{4}\right)^{x^2-3x+1}+5\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}-12=0\Leftrightarrow 7\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}\right)^2+5\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}=1,\\ \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}=-\frac{12}{7}.\end{array}\right.$$

У второго уравнения решений нет.

Преобразуем первое уравнение: $x^2-3x+1=0$, откуда $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

б) Оценим $\sqrt{5}$ целыми числами: $2<\sqrt{5}<3$. Тогда

$$\frac{5}{2}<\frac{3+\sqrt{5}}{2}<3 \text{ и } 0<\frac{3-\sqrt{5}}{2}<\frac{1}{2}.$$

Значит, отрезку $[-1;2]$ принадлежит только $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: а) $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; б) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

5. 5. а) Решите уравнение $27^x-5\cdot 9^x-3^{x+2}+45=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 4;\ \log_3 10]$.

Решение.

а) Разложим левую часть на множители:

$$27^x-5\cdot 9^x-3^{x+2}+45=0\Leftrightarrow 27^x-5\cdot 9^x-9\cdot 3^x+45=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9^x(3^x-5)-9(3^x-5)=0\Leftrightarrow (3^x-5)(9^x-9)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x=5,\\ 9^x=9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\log_3 5,\\ x=1.\end{array}\right.$$

б) Поскольку $1<\log_3 4<\log_3 5<\log_3 10$, отрезку $[\log_3 4;\ \log_3 10]$ принадлежит только корень $\log_3 5$.

Ответ: а) $\{1;\ \log_3 5\}$, б) $\log_3 5$.

Примечание.

Можно было ввести замену $t=3^x$, получить уравнение и решить его разложением на множители:

$$t^3-5t^2-9t+45=0\Leftrightarrow (t^2-9)(t-5)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=5,\\ t=\pm 3.\end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной получаем решение.

6. 6. а) Решите уравнение $8^x-7\cdot 4^x-2^{x+4}+112=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_2 5;\ \log_2 11]$.

Решение.

а) Разложим левую часть на множители:

$$2^{3x}-7\cdot 2^{2x}-16\cdot 2^x+112=0 \Leftrightarrow (4^x-16)(2^x-7)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4^x=16, \\ 2^x=7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=\log_2 7. \end{array}\right.$$

б) Поскольку $2<\log_2 5<\log_2 7<\log_2 11$, отрезку $[\log_2 5;\ \log_2 11]$ принадлежит только корень $\log_2 7$.

Ответ: а) $2;\ \log_2 7$, б) $\log_2 7$.

7. 7. а) Решите уравнение $3\cdot 9^{x-\frac{1}{2}}-7\cdot 6^x+3\cdot 4^{x+1}=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащего отрезку $[2;\ 3]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение: $\left(\dfrac{9}{4}\right)^x-7\left(\dfrac{3}{2}\right)^x+12=0$.

Пусть $t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$, тогда уравнение запишется в виде $t^2-7t+12=0$, откуда $t=3$ или $t=4$.

При $t=3$ получим: $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=3$, откуда $x=\log_{\frac{3}{2}}3$.

При $t=4$ получи: $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=4$, откуда $x=\log_{\frac{3}{2}}4$.

б) Поскольку $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2<3<\left(\dfrac{3}{2}\right)^3<4$, получаем: $2<\log_{\frac{3}{2}}3<3<\log_{\frac{3}{2}}4$. Значит, отрезку $[2;\ 3]$ принадлежит число $\log_{\frac{3}{2}}3$.

Ответ: а) $\log_{\frac{3}{2}}3;\ \log_{\frac{3}{2}}4$, б) $\log_{\frac{3}{2}}3$.

8. 8. а) Решите уравнение $\log_5(2-x)=\log_{25}x^4$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_9\dfrac{1}{82};\ \log_9 8\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\log_5(2-x)=\log_5 x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=2-x, \\ x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-1)=0, \\ x\neq 0. \end{cases}$$

Получим, что $x=-2$ или $x=1$.

б) Поскольку $\log_9\dfrac{1}{82}<-2<\log_9 8<1$, получаем, что отрезку $\left[\log_9\dfrac{1}{82};\ \log_9 8\right]$ принадлежит единственный корень −2.

Ответ: а) −2; 1, б) −2.

9. 9. а) Решите уравнение $6\log_8^2 x-5\log_8 x+1=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2;\ 2{,}5]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$(3\log_8 x - 1)(2\log_8 x - 1) = 0.$$

Значит, $3\log_8 x = 1$, откуда $x = 2$, или $2\log_8 x = 1$, откуда $x = 2\sqrt{2}$.

б) Заметим, что $2 < 2,5 = \sqrt{6,25} < \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Значит, указанному отрезку принадлежит корень 2.

Ответ: а) 2 и $2\sqrt{2}$; б) 2.

10. 10. а) Решите уравнение $5 \cdot 4^{x^2+4x} + 20 \cdot 10^{x^2+4x-1} - 7 \cdot 25^{x^2+4x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3;\ 1]$.

Решение.

а) Пусть $a = 2^{x^2+4x}, b = 5^{x^2+4x}$, тогда уравнение принимает вид

$$5a^2 + 2ab - 7b^2 = 0$$

Решим это уравнение, как квадратное относительно a.

$$\frac{D}{4} = b^2 + 5 \cdot 7b^2 = 36b^2$$

$$a = \frac{-b \pm 6b}{5}$$

$$\left[\begin{array}{l} a = -\dfrac{7b}{5}, \\ a = b. \end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной:

1) Уравнение $2^{x^2+4x} = -\dfrac{7}{5} \cdot 5^{x^2+4x}$ корней не имеет

2) $2^{x^2+4x} = 5^{x^2+4x} \Leftrightarrow x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -4. \end{array}\right.$

б) Из чисел -4 и 0 отрезку $[-3;\ 1]$. принадлежит только число 0

Ответ: а) −4; 0; б) 0.

11. 11. а) Решите уравнение $19 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^{x+2} + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5; -4]$.

Решение.

а) Решим уравнение:

$$19\cdot 4^x-5\cdot 2^{x+2}+1=0 \Leftrightarrow 19\cdot 2^{2x}-20\cdot 2^x+1=0.$$

Пусть $2^x=t$, имеем $19t^2-20t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1, \\ t=\dfrac{1}{19}. \end{array}\right.$

Тогда $\left[\begin{array}{l} 2^x=1, \\ 2^x=\dfrac{1}{19} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-\log_2 19. \end{array}\right.$

б) Проверим, какие из корней принадлежат отрезку $[-5;-4]$.

Корень $x=0$ не принадлежит отрезку $[-5;-4]$.

Проверим второй корень. Заметим, что $-\log_2 19=-1\cdot\log_2 19$. Поэтому:

$$\log_2 16<\log_2 19<\log_2 32 \Leftrightarrow 4<\log_2 19<5.$$

Тогда $-5<-\log_2 19<-4$.

Ответ: а) 0; $-\log_2 19$; б) $-\log_2 19$.

12. 12. а) Решите уравнение: $4^x-2^{x+3}+15=0$.

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $[2;\sqrt{10}]$.

Решение.

а) Пусть $t=2^x$, тогда исходное уравнение принимает вид $t^2-8t+15=0$, откуда $t=3$ или $t=5$. Следовательно,

$$2^{2x}-8\cdot 2^x+15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=3, \\ 2^x=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\log_2 3, \\ x=\log_2 5. \end{array}\right.$$

б) Поскольку $\log_2 3<\log_2 4=2$, корень $\log_2 3$ не принадлежит отрезку $[2;\sqrt{10}]$. Поскольку $2=\log_2 4<\log_2 5<\log_2 8=3<\sqrt{10}$, корень $\log_2 5$ принадлежит отрезку $[2;\sqrt{10}]$.

Ответ: а) $\{\log_2 3;\ \log_2 5\}$, б) $\log_2 5$.

13. 13. а) Решите уравнение: $9^x-3^{x+2}+14=0$.

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $[1;\ \sqrt{5}]$.

Решение.

а) Пусть $t=3^x$, тогда исходное уравнение принимает вид $t^2-9t+14=0$, откуда $t=2$ или $t=7$. Следовательно,

$$9^x-9\cdot 3^x+14=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x=2, \\ 3^x=7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\log_3 2, \\ x=\log_3 7. \end{array}\right.$$

б) Поскольку $\log_3 2<\log_3 3=1$, корень $\log_3 2$ не принадлежит отрезку $[1;\ \sqrt{5}]$. Поскольку $1=\log_3 3<\log_3 7<\log_3 9=2<\sqrt{5}$, корень $\log_3 7$ принадлежит отрезку $[1;\ \sqrt{5}]$.

Ответ: а) $\{\log_3 2;\ \log_3 7\}$, б) $\log_3 7$.

14. 14. а) Решите уравнение $8^x-9\cdot 2^{x+1}+2^{5-x}=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_5 2;\ \log_5 20]$.

Решение.

Умножим обе части уравнения на положительное выражение 2^x, имеем:

$$16^x - 18\cdot 4^x + 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4^x = 2, \\ 4^x = 16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0,5, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

В силу соотношений

$$\log_5 2 < \log_5\sqrt{5} = \frac{1}{2} < \log_5 20 < \log_5 25 = 2.$$

указанному отрезку принадлежит только корень $\dfrac{1}{2}$.

Ответ: а) $\dfrac{1}{2}$ и 2; б) $\dfrac{1}{2}$.

15. 15. а) Решите уравнение $\log_2\left(x^2 - 14x\right) = 5$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_3 0,1;\, 5\sqrt{10}\right]$.

Решение.

а) Из уравнения получаем:

$$x^2 - 14x = 32 \Leftrightarrow (x+2)(x-16) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 16. \end{array}\right.$$

б) Заметим, что $\log_3 0,1 < \log_3\dfrac{1}{9} = -2 < 5\sqrt{10} = \sqrt{250} < \sqrt{256} = 16$. Значит, указанному отрезку принадлежит корень −2.

Ответ: а) −2 и 16; б) −2.

16. 16. а) Решите уравнение $\log_2^2(x^2) - 16\log_2(2x) + 31 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[3;6]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$4\log_2^2(x) - 16\log_2(x) + 15 = 0; (2\log_2 x - 3)(2\log_2 x - 5) = 0$$

Значит, $\log_2 x = \dfrac{3}{2}$, откуда $x = 2\sqrt{2}$, или $\log_2 x = \dfrac{5}{2}$, откуда $x = 4\sqrt{2}$.

б) Заметим, что $2\sqrt{2} = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3 < 4\sqrt{2} = \sqrt{32} < \sqrt{36} = 6$. Значит, указанному отрезку принадлежит корень $4\sqrt{2}$.

Ответ: а) $2\sqrt{2}$ и $4\sqrt{2}$; б) $4\sqrt{2}$.