Тригонометрические уравнения

1. 1. а) Решите уравнение $-\sqrt{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{2}+x\right)\cdot\sin x=\cos x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2}, 6\pi\right]$.

Решение.

а) В силу нечетности и периодичности синуса имеем:

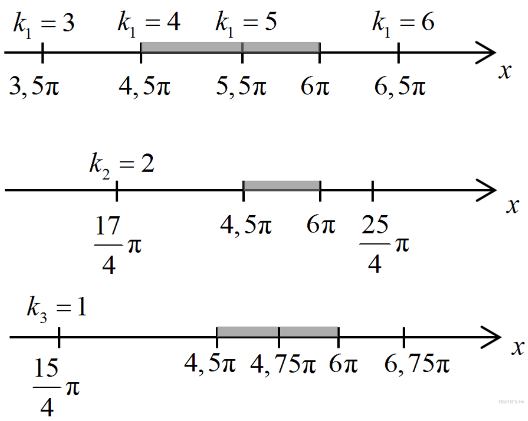
$$-\sqrt{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{2}+x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)=\sqrt{2}\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sqrt{2}\cos x.$$

Далее имеем:

$$\sqrt{2}\cos x\cdot\sin x=\cos x\Leftrightarrow\cos x\left(\sqrt{2}\cdot\sin x-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\\ x=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\\ x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) При помощи числовой прямой или тригонометрической окружности (см. рис.) для каждой из задающих решения серий отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $[4,5\pi;\,6\pi]$.

Находим три решения: $4,5\pi;\,4,75\pi;\,5,5\pi$.



Ответ:

а) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{4}+2\pi k, \frac{3\pi}{4}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$;

б) $4,5\pi, 4,75\pi, 5,5\pi$.

2. 2. а) Решите уравнение $\sin 8\pi x+1=\cos 4\pi x+\sqrt{2}\cos\left(4\pi x-\frac{\pi}{4}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2-\sqrt{7};\ \sqrt{7}-2\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$2\sin 4\pi x\cos 4\pi x+1=\cos 4\pi x+\sqrt{2}(\cos 4\pi x\cos\frac{\pi}{4}+\sin 4\pi x\sin\frac{\pi}{4})$$

$$2\sin 4\pi x\cos 4\pi x+1-2\cos 4\pi x-\sin 4\pi x=0$$

$$2\cos 4\pi x(\sin 4\pi x-1)-(\sin 4\pi x-1)=0$$

$$(2\cos 4\pi x-1)(\sin 4\pi x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\cos 4\pi x=1\\ \sin 4\pi x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4\pi x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\\ 4\pi x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{1}{12}+\frac{n}{2}, n\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{1}{8}+\frac{k}{2}, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

б) Ограничим каждое полученное решение из пункта "а" и решим эти неравенства:

1)

$$2-\sqrt{7}\le\frac{1}{12}+\frac{n}{2}\le\sqrt{7}-2$$

$$\frac{23}{12}-\sqrt{7}\le\frac{n}{2}\le\sqrt{7}-\frac{25}{12}$$

$$\frac{23}{6}-2\sqrt{7}\le n\le 2\sqrt{7}-\frac{25}{6}\Rightarrow n=-1,0,1\Rightarrow x=\frac{-5}{12},\frac{1}{12},\frac{7}{12}$$

2)

$$2-\sqrt{7}\le-\frac{1}{12}+\frac{n}{2}\le\sqrt{7}-2$$

$$\frac{25}{12}-\sqrt{7}\le\frac{n}{2}\le\sqrt{7}-\frac{23}{12}$$

$$\frac{25}{6}-2\sqrt{7}\le n\le 2\sqrt{7}-\frac{23}{6}\Rightarrow n=-1,0,1\Rightarrow x=-\frac{7}{12},-\frac{1}{12},\frac{5}{12}$$

3)

$$2-\sqrt{7}\le\frac{1}{8}+\frac{k}{2}\le\sqrt{7}-2$$

$$1.875-\sqrt{7}\le\frac{k}{2}\le\sqrt{7}-2.125$$

$$3.75-2\sqrt{7}\le k\le 2\sqrt{7}-4.25\Rightarrow k=-1,0,1\Rightarrow x=-\frac{3}{8},\frac{1}{8},\frac{5}{8}$$

Ответ: а) $\{x=\pm\frac{1}{12}+\frac{n}{2}, x=\frac{1}{8}+\frac{k}{2}: n\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}\}$, б) $\pm\frac{5}{12},\pm\frac{1}{12},\pm\frac{7}{12},-\frac{3}{8},\frac{1}{8},\frac{5}{8}$.

3. 3. а) Решите уравнение:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=\sqrt{2}\sin x$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-5\pi;-4\pi]$.

Решение.

Используя формулу приведения $\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=-\sin 2x$ и формулу синуса двойного угла $\sin 2x=2\sin x\cos x$, получаем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=\sqrt{2}\sin x \Leftrightarrow -2\sin x\cos x=\sqrt{2}\sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\\ x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Заданный промежуток имеет длину π, поэтому ему принадлежит не больше двух корней из первой серии, не больше одного корня из второй серии и не больше одного корня из третьей серии. Во второй серии решений из отрезка нет, из первой и третьей серии это числа $-5\pi,\ -4\pi,\ -\frac{19\pi}{4}$.

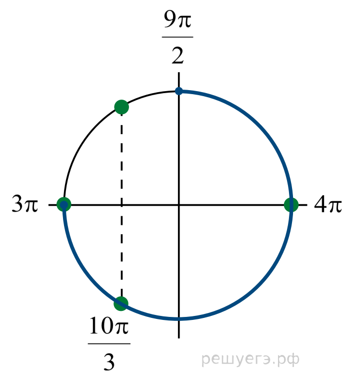
Ответ: а) $\left\{\pi k,\ \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-5\pi, -\frac{19\pi}{4}, -4\pi$.

4. 4. а) Решите уравнение $2\cos\left(x-\frac{11\pi}{2}\right)\cdot\cos x=\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) По формуле приведения $\cos\left(x-\frac{11\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin x$, поэтому исходное уравнение преобразуется к виду:



$$-2\sin x\cdot\cos x=\sin x \Leftrightarrow \sin x(1+2\cos x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \cos x=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\end{array}\right. k\in\mathbb{Z}.$$

б) Данному условию принадлежат корни $3\pi,\ 4\pi,\ \frac{10\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{\pi k,\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $3\pi,\ 4\pi,\ \frac{10\pi}{3}$.

5. 5. а) Решите уравнение $\cos 2x-\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-1=0$.

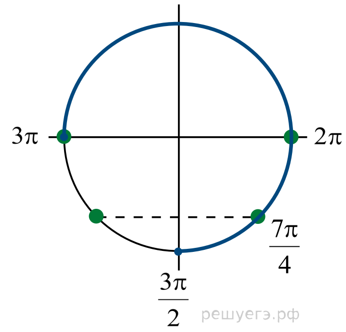
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

Решение.

Имеем:

$$1-2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x-1=0 \Leftrightarrow \sin x(\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2})=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0, \\ \sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi k, \\ x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z} \\ x=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k. \end{array}\right.$$



б) На указанном промежутке лежат точки $2\pi,\ 3\pi,\ \dfrac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k, -\dfrac{\pi}{4}+2\pi k, \pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $2\pi,\ 3\pi,\ \dfrac{7\pi}{4}$.

6. 6. а) Решите уравнение $2\cos 2x+4\sqrt{3}\cos x-7=0$.

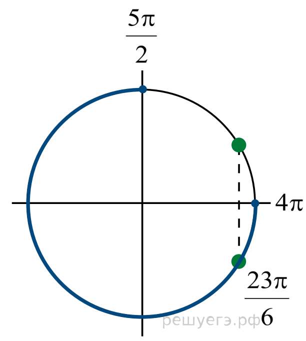
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Решение.

а) Имеем:

$$2(2\cos^2 x-1)+4\sqrt{3}\cos x-7=0 \Leftrightarrow 4\cos^2 x+4\sqrt{3}\cos x-9=0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \underset{|\cos x|\le 1}{\Leftrightarrow} x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$



б) С помощью числовой окружности (см. рис.) отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$. Получим точку $\dfrac{23\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ \dfrac{\pi}{6}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{23\pi}{6}$.

7. 7. а) Решите уравнение $2\cos 2x+4\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)+1=0$.

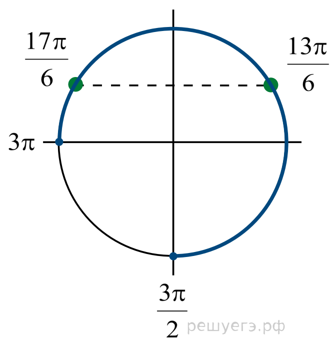
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

Решение.

а) Имеем:

$$2(1-2\sin^2 x)-4\sin x+1=0 \Leftrightarrow 4\sin^2 x+4\sin x-3=0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x=\dfrac{1}{2}, \\ \sin x=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \underset{|\sin x|\le 1}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k, \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$



б) На указанном промежутке лежат точки $\dfrac{13\pi}{6},\ \dfrac{17\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{13\pi}{6},\ \dfrac{17\pi}{6}$.

8. 8. а) Решите уравнение $8\sin^2 x+2\sqrt{3}\cos x+1=0$.

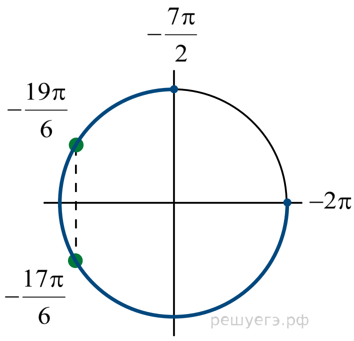
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

Решение.

Имеем:

$$8(1-\cos^2 x)+2\sqrt{3}\cos x+1=0 \Leftrightarrow 8\cos^2 x-2\sqrt{3}\cos x-9=0.$$

Либо $\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x=\pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ либо $\cos x=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}>1$, что невозможно.



б) На указанном промежутке лежат точки $-\dfrac{19\pi}{6}$, $-\dfrac{17\pi}{6}$.

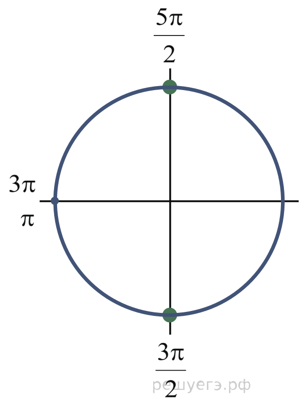
Ответ: а) $\left\{-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\dfrac{19\pi}{6}, -\dfrac{17\pi}{6}$.

9. 9. а) Решите уравнение: $2\sin^4 x+3\cos 2x+1=0$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$

Решение.

а) Воспользуемся формулой $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$. Из неё следует, что $\sin^4 x=\dfrac{1}{4}(\cos^2 2x-2\cos 2x+1)$. Поэтому уравнение можно преобразовать так:



$$\frac{1}{2}\cos^2 2x-\cos 2x+\frac{1}{2}+3\cos 2x+1=0 \Leftrightarrow \cos^2 2x+4\cos 2x+3=0.$$

Сделаем замену $t=\cos 2x$. Получим

$$t^2+4t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1, \\ t=-3. \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x=-1, \\ \cos 2x=-3 \end{array}\right. \underset{|\cos 2x|\le 1}{\Leftrightarrow} 2x=\pi+2\pi k, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие заданному отрезку. Получим $x=\dfrac{3\pi}{2}$, $x=\dfrac{5\pi}{2}$.

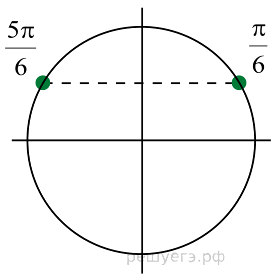
Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}$.

10. 10. Решите уравнение: $(2\sin x-1)(\sqrt{-\cos x}+1)=0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x\le 0$. Выражение $\sqrt{-\cos x}+1$ положительно при всех допустимых x.

Значит,



$$2\sin x-1=0 \Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k, \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k. \end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}$$

Так как $\cos x\le 0$ только во второй и третьей четвертях, числа $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ не являются решениями уравнения.

Ответ: $\left\{\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

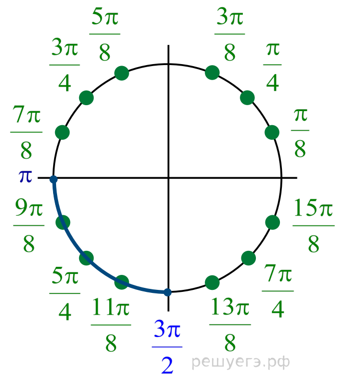
11. 11. а) Решите уравнение:

$$4\sin^4 2x+3\cos 4x-1=0$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

Решение.

а) Воспользуемся формулой $\sin^2 y = \frac{1-\cos 2y}{2}$. Из неё следует, что $\sin^4 2x = \frac{1}{4}(\cos^2 4x - 2\cos 4x + 1)$. Поэтому уравнение можно преобразовать так:



$$\cos^2 4x - 2\cos 4x + 1 + 3\cos 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 4x + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x = -1,\\ \cos 4x = 0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}4x = \pi + 2\pi k,\\ 4x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4},\ k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие заданному отрезку.

Получим: $x = \frac{9\pi}{8}$; $x = \frac{5\pi}{4}$; $x = \frac{11\pi}{8}$.

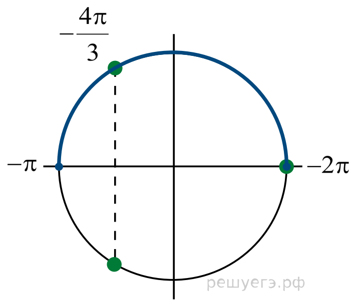
Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{9\pi}{8}; \frac{5\pi}{4}; \frac{11\pi}{8}$.

12. 12. а) Решите уравнение $\cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащего промежутку $[-2\pi; -\pi]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:



$$2\cos^2 x - 1 = \cos x \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Значит, либо $\cos x = 1$, откуда $x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, либо $\cos x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

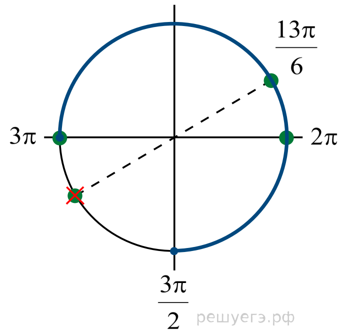
б) Отберём с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$: $-2\pi; -\frac{4\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{2\pi k, \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-2\pi, -\frac{4\pi}{3}$.

13. 13. а) Решите уравнение $2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sin 2x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.
а) Преобразуем исходное уравнение:



$$2\sqrt{3}\sin^2 x-2\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow \sin x(\sqrt{3}\sin x-\cos x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \operatorname{tg} x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

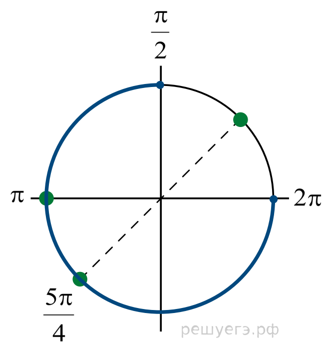
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$. Получим числа: $2\pi;\ \frac{13\pi}{6};\ 3\pi.$

Ответ: а) $\left\{\pi k,\ \frac{\pi}{6}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $2\pi;\ \frac{13\pi}{6};\ 3\pi.$

14. 14. а) Решите уравнение $\cos^2 x-\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x=\sin x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.

Решение.
а) Перенесём все члены в левую часть, преобразуем и разложим левую часть на множители:



$$\cos^2 x-\sin x\cos x+\cos x-\sin x=0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x+1)-\sin x(\cos x+1)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\cos x+1)(\cos x-\sin x)=0.$$

1 случай. Если $\cos x=-1$, то $x=\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

2 случай. Если $\cos x\neq-1$, то $\cos x-\sin x=0$. При $\cos x=0$ решений нет. Разделим обе части уравнения на $\cos x$. Получаем $1-\operatorname{tg} x=0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x=1.$

Тогда $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

б) Отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$ принадлежат корни π и $\frac{5\pi}{4}.$

Ответ: а) $\left\{\pi+2\pi k,\ \frac{\pi}{4}+\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) π и $\frac{5\pi}{4}.$

15. 15. а) Решите уравнение $\cos 2x=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

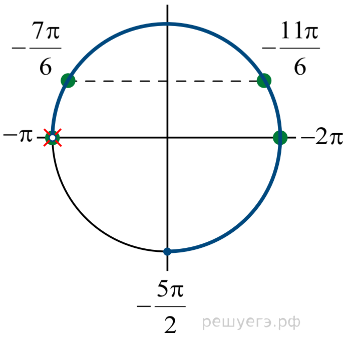
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие интервалу $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right)$.

Решение.

а) Преобразуем обе части уравнения:

$$1-2\sin^2 x=1-\sin x \Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k.\end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};-\pi\right)$. Получим числа: $-2\pi;\ -\dfrac{11\pi}{6};\ -\dfrac{7\pi}{6}.$



Ответ: а) $\left\{\pi k, \dfrac{\pi}{6}+2\pi k, \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-2\pi;\ -\dfrac{11\pi}{6};\ -\dfrac{7\pi}{6}.$

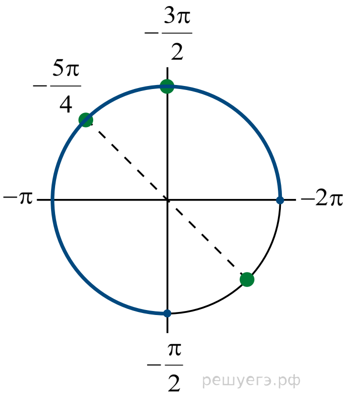
16. 16. а) Решите уравнение $\dfrac{1}{2}\sin 2x+\sin^2 x-\sin x=\cos x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi;\ -\dfrac{\pi}{2}\right].$

Решение.

а) Перенесём все члены в левую часть, преобразуем и разложим левую часть на множители:

$$\sin x\cos x+\sin^2 x-\sin x-\cos x=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin x(\cos x+\sin x)-(\sin x+\cos x)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\sin x-1)(\cos x+\sin x)=0.$$



1 случай. Если $\sin x=1$, то $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

2 случай. Если $\sin x\neq 1$, то $\cos x+\sin x=0$. При $\cos x=0$ решений нет. Разделим обе части уравнения на $\cos x$. Получаем $1+\operatorname{tg} x=0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x=-1.$

Тогда $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Отрезку $\left[-2\pi;\ -\dfrac{\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $-\dfrac{3\pi}{2}$ и $-\dfrac{5\pi}{4}.$

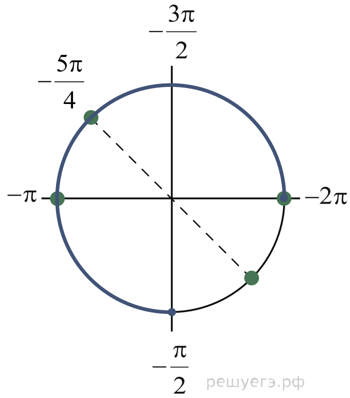
Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, -\dfrac{\pi}{4}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\dfrac{3\pi}{2};\ -\dfrac{5\pi}{4}.$

17. 17. а) Решите уравнение $\sin 2x+2\sin^2 x=0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\dfrac{\pi}{2}\right].$

Решение.

а) Преобразуем уравнение:



$$2\sin x(\cos x+\sin x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=-\cos x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ \operatorname{tg} x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$, найдём, пользуясь единичной окружностью. Получаем: $-2\pi,\ -\frac{5\pi}{4},\ -\pi.$

Ответ: а) $\left\{\pi k,\ -\frac{\pi}{4}+\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-2\pi;\ -\frac{5\pi}{4};\ -\pi.$

18. 18. а) Решите уравнение $2\sin\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)\sin x=\cos x.$

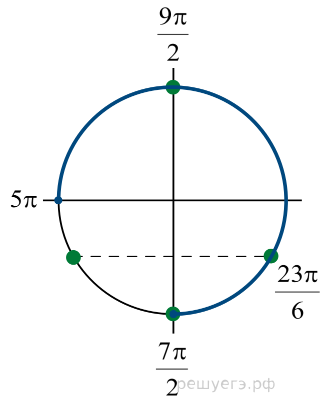
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{7\pi}{2};\ 5\pi\right]$.

Решение.

а) По формуле приведения $\sin\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos x$, имеем:

$$-2\cos x\sin x=\cos x \Leftrightarrow \cos x(1+2\sin x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin x=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\\ x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) Отрезку $\left[\frac{7\pi}{2};\ 5\pi\right]$ принадлежат корни $\frac{23\pi}{6};\ \frac{7\pi}{2};\ \frac{9\pi}{2}.$



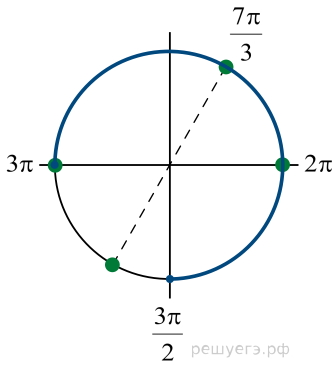
Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k;\ (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k:k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{23\pi}{6};\ \frac{7\pi}{2};\ \frac{9\pi}{2}.$

19. 19. а) Решите уравнение $2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:



$$2\sin x(\sin x-\sqrt{3}\cos x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=\sqrt{3}\cos x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ \operatorname{tg} x=\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$, найдём, пользуясь единичной окружностью. Получаем: $2\pi,\ \dfrac{7\pi}{3},\ 3\pi.$

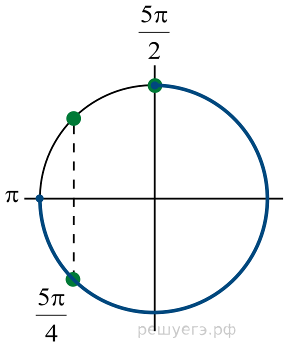
Ответ: а) $\left\{\pi k,\ \dfrac{\pi}{3}+\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $2\pi;\ \dfrac{7\pi}{3};\ 3\pi.$

20. 20. а) Решите уравнение $\sin 2x+\sqrt{2}\sin x=2\cos x+\sqrt{2}.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Используем формулу синуса двойного угла, выносим за скобки:



$$\sin 2x+\sqrt{2}\sin x=2\cos x+\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sin x\cos x+\sqrt{2}\sin x=2\cos x+\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x+\sqrt{2})=2\cos x+\sqrt{2} \Leftrightarrow (\sin x-1)(2\cos x+\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1,\\ \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\\ x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) Изображая корни на единичной окружности, находим, что отрезку $\left[\pi;\dfrac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\dfrac{5\pi}{4}$ и $\dfrac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ -\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ \dfrac{3\pi}{4}+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{5\pi}{4};\ \dfrac{5\pi}{2}.$

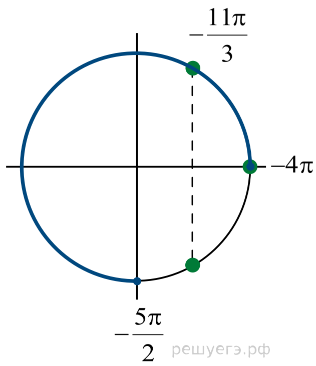
21. 21. а) Решите уравнение $\cos 2x-3\cos x+2=0$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.
а) Преобразуем уравнение:

$$2\cos^2 x - 1 - 3\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0.$$

Получаем $\cos x = 1$ или $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда $x = 2\pi k$ или $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.



б) На отрезке $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$ корни отберём с помощью единичной окружности.

Получаем -4π и $-\frac{11\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{2\pi k, -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-4\pi;\ -\frac{11\pi}{3}$.

22. 22. а) Решите уравнение $2\cos^3 x - \cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$.

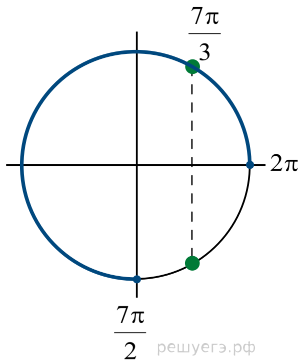
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.
Решим уравнение:

$$2\cos^3 x - \cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x(2\cos x - 1) + (2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\cos^2 x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x - 1 = 0, \\ \cos^2 x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}.$$



б) Укажем корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$. Получим точку $\frac{7\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{7\pi}{3}$.

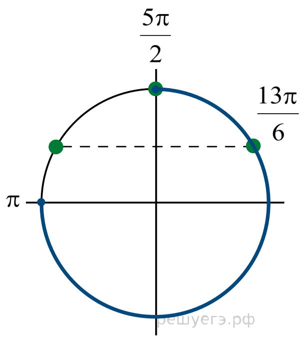
23. 23. а) Решите уравнение $\cos 2x + 3\sin x - 2 = 0$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.
а) Преобразуем уравнение:

$$1 - 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0.$$

Получаем $\sin x = 1$ или $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.



б) На отрезке $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ корни отберём с помощью единичной окружности.

Получаем $x = \frac{13\pi}{6}$ и $x = \frac{5\pi}{2}$.

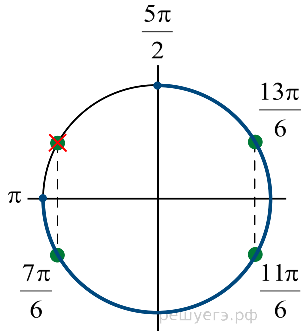
Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{13\pi}{6};\ \frac{5\pi}{2}$.

24. 24. а) Решите уравнение $\cos 2x - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -0{,}25$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi, \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:



$$\cos 2x-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-0,25 \Leftrightarrow 2\cos^2 x-1-\cos^2 x=-0,25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\\ x=\dfrac{\pi}{6}+\pi k, k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi, \dfrac{5\pi}{2}\right]$. Находим числа: $\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}, \dfrac{13\pi}{6}$.

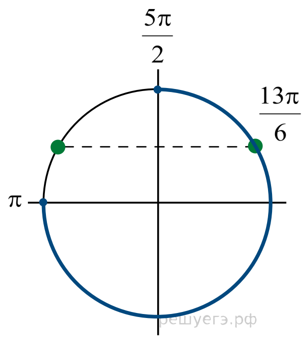
Ответ: а) $\left\{-\dfrac{\pi}{6}+\pi k, \dfrac{\pi}{6}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{11\pi}{6}; \dfrac{13\pi}{6}$.

25. 25. а) Решите уравнение $3\cos 2x-5\sin x+1=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

Сведём уравнение к квадратному относительно синуса, используя формулу $\cos 2x=1-2\sin^2 x$. Имеем:



$$3\cos 2x-5\sin x+1=0 \Leftrightarrow 3(1-2\sin^2 x)-5\sin x+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(1-2\sin^2 x)-5\sin x+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\sin^2 x+5\sin x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2},\\ \sin x=-\dfrac{4}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$ (см. рис.), получим число $\dfrac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{6}+2\pi k, \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{13\pi}{6}$.

26. 26. а) Решите уравнение $\cos 2x-5\sqrt{2}\cos x-5=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

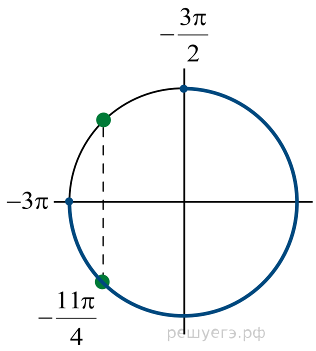
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\cos^2 x-1-5\sqrt{2}\cos x-5=0\Leftrightarrow(2\cos x+\sqrt{2})(\cos x-3\sqrt{2})=0.$$

Значит, $\cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ или $x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Уравнение $\cos x=3\sqrt{2}$ корней не имеет.



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right]$. Получим число $-\dfrac{11\pi}{4}$.

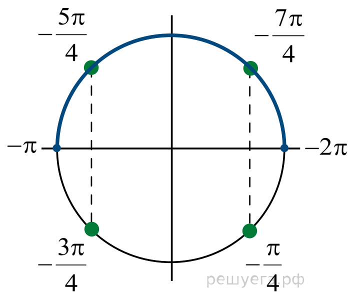
Ответ: а) $\left\{-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ \dfrac{3\pi}{4}+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\dfrac{11\pi}{4}$.

27. 27. а) Решите уравнение $4\cos^4 x-4\cos^2 x+1=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi;\ -\pi]$.

Решение.

а) Выделим полный квадрат:



$$\left(2\cos^2 x-1\right)^2=0\Leftrightarrow 2\cos^2 x=1\Leftrightarrow\cos^2 x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ \cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $[-2\pi;\ -\pi]$. Получим $-\dfrac{7\pi}{4},\ -\dfrac{5\pi}{4}$.

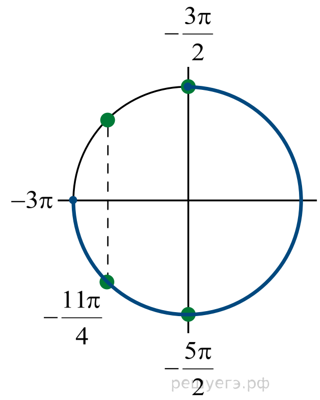
Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\dfrac{7\pi}{4};\ -\dfrac{5\pi}{4}$.

28. 28. а) Решите уравнение $\cos 2x+\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)+1=0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:



$$2\cos^2 x-1+\sqrt{2}\cos x+1=0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x+\sqrt{2}\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x(2\cos x+\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}.\\ x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\end{array}\right.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $-\frac{11\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{3\pi}{4}+2\pi k, -\frac{3\pi}{4}+2\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{11\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$.

29. 29. Дано уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\cos x$.

а) Решите уравнение;

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

Решение.

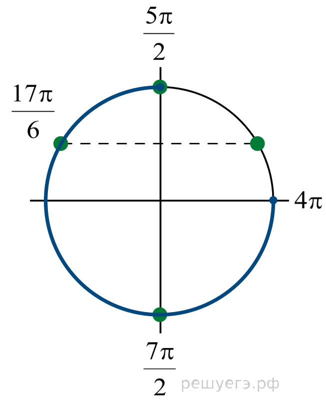
Используем формулу приведения и синуса двойного угла:

$$\sin 2x=\cos x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x=\cos x \Leftrightarrow \cos x(2\sin x-1)=0.$$

Тогда $\cos x=0$ или $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$ или $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью единичной окружности отберём корни на отрезке $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$. Находим: $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{17\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{2}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{6}+2\pi k, \frac{5\pi}{6}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{17\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{2}$.



Примечание.

Уравнение может быть так же решено при помощи следующей теоремы:

$$\cos x=\cos y \Leftrightarrow x=\pm y+2\pi k, k\in\mathbb{Z}.$$

30. 30. а) Решите уравнение $6\cos^2 x-7\cos x-5=0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi;2\pi]$.

Решение.

а) Сделаем замену $\cos x = y$, получим квадратное уравнение $6y^2 - 7y - 5 = 0$, корнями которого являются числа $y = -\frac{1}{2}$ и $y = \frac{5}{3}$. Уравнение $\cos x = \frac{5}{3}$ не имеет решений, а из уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ находим корни $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ или $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) Найдем корни, принадлежащие отрезку $[-\pi;\ 2\pi]$. Решим неравенства:

$$-\pi \le -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \le k \le \frac{4}{3}, \text{ откуда } k = 0 \text{ или } k = 1.$$

$$-\pi \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{6} \le k \le \frac{2}{3} \Leftrightarrow k = 0.$$

Соответствующие найденным значениям параметров корни: $-\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}$.

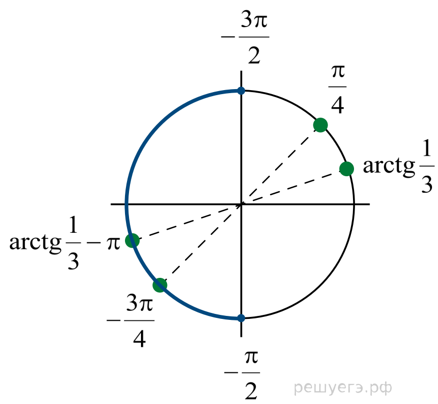
31. 31. Дано уравнение $2\cos^2 x + 2\sin 2x = 3$.

а) Решите данное уравнение.

б) Укажите корни данного уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Сведем уравнение к квадратному относительно тангенса:



$$2\cos^2 x + 2\sin 2x = 3 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 4\sin x\cos x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 3\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 1 = 0.$$

Отсюда $\operatorname{tg} x = 1$ или $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$. Если $\operatorname{tg} x = 1$, то $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Если $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$, то $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности находим, что из найденных решений промежутку принадлежат числа $-\frac{3\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} - \pi$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{4} + \pi k, \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{3\pi}{4}$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} - \pi$.

32. 32. а) Решите уравнение $\sin x + \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Используя формулу $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$, заменим выражение в скобках на $\cos x$, получаем однородное тригонометрическое уравнение первой степени:

$$\sin x+\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \sin x+\cos x=0.$$

Если $\cos x=0$, то из уравнения следует $\sin x=0$, что невозможно в силу основного тригонометрического тождества. Значит, на множестве корней уравнения $\cos x\neq 0$. Разделим обе части уравнения на $\cos x$:

$$\operatorname{tg}x+1=0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in\mathbb{Z}.$$

б) Составим двойное неравенство: $\pi\le-\frac{\pi}{4}+\pi k\le\frac{5\pi}{2}$, откуда $\frac{5}{4}\le k\le 2\frac{3}{4}$. Следовательно, $k=2$. Поэтому на данном отрезке получаем единственный корень $-\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{7\pi}{4}$.

33. 33. а) Решите уравнение $\sin 2x-2\sqrt{3}\cos^2 x-4\sin x+4\sqrt{3}\cos x=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$.

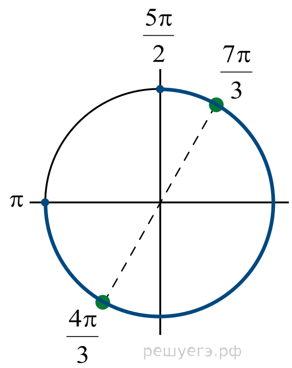
Решение.

а) Разложим левую часть на множители:

$$2\sin x\cos x-2\sqrt{3}\cos^2 x-4\sin x+4\sqrt{3}\cos x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x(\cos x-2)-\sqrt{3}\cos x(\cos x-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-2)\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)=0.$$



Уравнение $\cos x-2=0$, не имеет корней. Имеем $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$.

Если $\cos x=0$, то $\sin x=0$, это невозможно. Это однородное уравнение первой степени, разделим обе его части на $\cos x$. Получаем:

$$\operatorname{tg}x-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in\mathbb{Z}.$$

б) Отрезку $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\frac{4\pi}{3}$ и $\frac{7\pi}{3}$. (см. рис.)

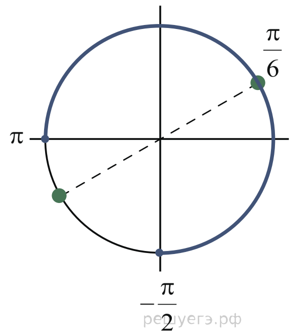
Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{3}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$.

34. 34. а) Решите уравнение $\sin 2x-2\sqrt{3}\sin^2 x+4\cos x-4\sqrt{3}\sin x=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение и разложим левую часть на множители:



$$2\sin x\cos x-2\sqrt{3}\sin^2 x+4\cos x-4\sqrt{3}\sin x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x(\sin x+2)-\sqrt{3}\sin x(\sin x+2)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin x+2)\left(\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)=0.$$

Уравнение $\sin x+2=0$, не имеет корней. Уравнение $\cos x-\sqrt{3}\sin x=0.$ является однородным тригонометрическим уравнением первой степени. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{3}\cos x$. Получаем:

$$\operatorname{tg} x-\frac{1}{\sqrt{3}}=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) Отрезку $\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$ принадлежит только корень $\frac{\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{6}+\pi k: k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{\pi}{6}$.

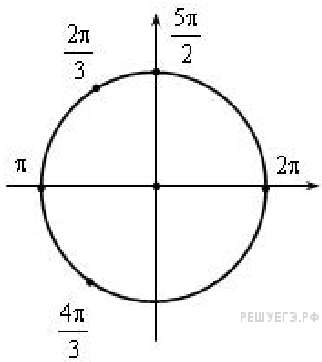
35. 35. а) Решите уравнение $\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi,\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение, получаем $\cos x=\cos 2x$. Значит, $x=2x+2\pi k$ или $x=-2x+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$. В первом случае $x=2\pi k$, во втором случае $x=\frac{2\pi k}{3}$, где $k\in\mathbb{Z}$. Первая серия решений входит во вторую.

б) Отметим решения на тригонометрической окружности. Отрезку $\left[\pi,\frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\frac{4\pi}{3}$ и 2π.



Ответ: а) $\left\{\frac{2\pi k}{3}: k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{4\pi}{3}$; 2π.

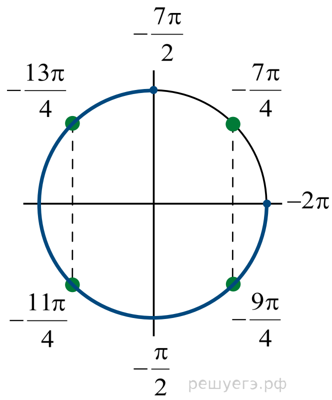
36. 36. а) Решите уравнение $\cos 2x+\sin^2 x=0,5$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2},-2\pi\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$\cos^2 x-\sin^2 x+\sin^2 x=0{,}5\Leftrightarrow\cos^2 x=\frac{1}{2}.$$



Значит, $\cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in\mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2},-2\pi\right]$. Получим числа: $-\frac{13\pi}{4}$, $-\frac{11\pi}{4}$, $-\frac{9\pi}{4}$.

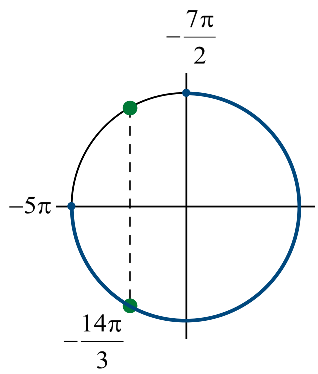
Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{13\pi}{4};-\frac{11\pi}{4};-\frac{9\pi}{4}.$

37. 37. а) Решите уравнение $6\sin^2 x+5\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-2=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi,-\frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде



$$6-6\cos^2 x+5\cos x-2=0\Leftrightarrow 6\cos^2 x-5\cos x-4=0\Leftrightarrow$$

$$(3\cos x-4)(2\cos x+1)=0$$

Значит, или $\cos x=\frac{4}{3}$ — уравнение не имеет корней, или $\cos x=-\frac{1}{2}$, откуда $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ или $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z.$

б) С помощью числовой окружности отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi,-\frac{7\pi}{2}\right]$. Получим число $-\frac{14\pi}{3}$.

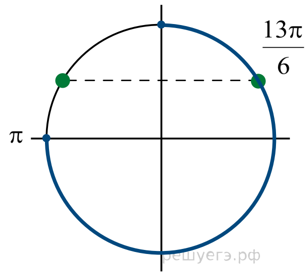
Ответ: а) $\left\{-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k:\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{14\pi}{3}$.

38. 38. а) Решите уравнение $4\cos^2 x+4\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-1=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi,\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде



$$4-4\sin^2 x-4\sin x-1=0\Leftrightarrow 4\sin^2 x+4\sin x-3=0.$$

Значит, или $\sin x=-\frac{3}{2}$ — уравнение не имеет корней, или $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

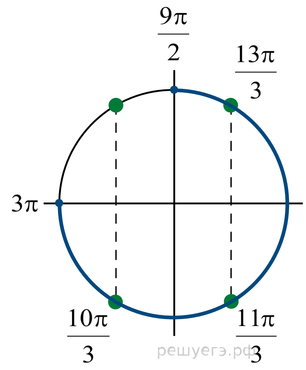
б) С помощью числовой окружности отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi,\frac{5\pi}{2}\right]$. Получим число $\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{13\pi}{6}$.

39. 39. а) Решите уравнение: $\cos 2x+\sin^2 x=0{,}25.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi,\frac{9\pi}{2}\right]$.

Решение.
а) Запишем уравнение в виде:



$$\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x = 0.25 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, \\ x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi, \frac{9\pi}{2}\right]$. Получим числа $\frac{10\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}$.

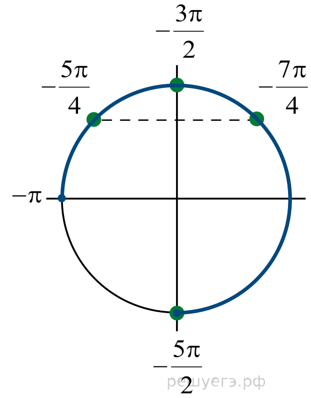
Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{3} + \pi k, \frac{\pi}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{10\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}; \frac{13\pi}{3}$.

40. 40. а) Решите уравнение: $\sqrt{2}\sin^3 x - \sqrt{2}\sin x + \cos^2 x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}, -\pi\right]$.

Решение.
а) Запишем уравнение в виде:



$$\sqrt{2}\sin x(\sin^2 x - 1) + \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x(1 - \sqrt{2}\sin x) = 0.$$

Значит, или $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ или $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$. Получим числа $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{4}$.
Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

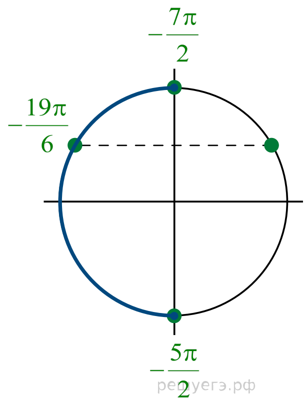
Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{7\pi}{4}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{5\pi}{4}$.

41. 41. а) Решите уравнение $\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.
а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\sin x\cos x=\cos x\Leftrightarrow\cos x(2\sin x-1)=0.$$



Значит, либо $\cos x=0$, откуда $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$, либо $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k, x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

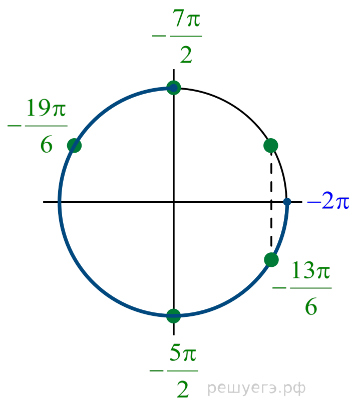
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2},-\frac{5\pi}{2}\right]$. Получим числа: $-\frac{7\pi}{2}, -\frac{19\pi}{6}, -\frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{6}+2\pi k, \frac{5\pi}{6}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{7\pi}{2}; -\frac{19\pi}{6}; -\frac{5\pi}{2}$.

42. 42. а) Решите уравнение $2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sqrt{3}\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2},-2\pi\right]$.

Решение.



а) Заметим, что $\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\cos^2 x$. Поэтому уравнение можно переписать в виде $2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x=0$, откуда $2\cos x\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$. Значит, либо $\cos x=0$, откуда $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$, либо $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

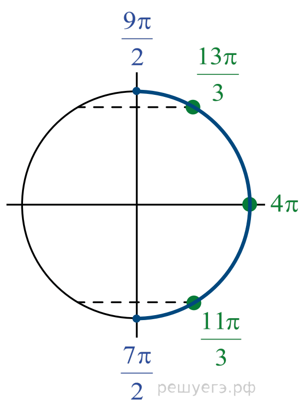
б) Отберем с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2},-2\pi\right]$: $x=-\frac{7\pi}{2}, x=-\frac{5\pi}{2}, x=-\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k, -\frac{\pi}{6}+2\pi k, \frac{\pi}{6}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}; -\frac{13\pi}{6}$.

43. 43. а) Решите уравнение $4\sin^3 x=3\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2},\frac{9\pi}{2}\right]$.

Решение.
а) Запишем уравнение в виде $4\sin^3 x-3\sin x=0$.



Значит, или $\sin x=0$, откуда $x=\pi k, k\in\mathbb{Z}$, или $\sin^2 x=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2},\end{array}\right.$ откуда $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$ или $x=\frac{2\pi}{3}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2},\frac{9\pi}{2}\right]$. Получим числа: $\frac{11\pi}{3}, 4\pi, \frac{13\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{\pi k, \frac{\pi}{3}+\pi k, \frac{2\pi}{3}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{11\pi}{3}; 4\pi; \frac{13\pi}{3}$.

Примечание.
Внимательный читатель, конечно, узнал формулу синуса тройного угла:

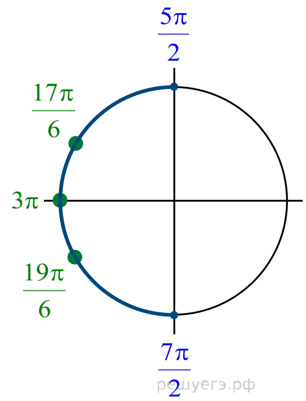
$$3\sin x-4\sin^3 x=0\Leftrightarrow\sin 3x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi k}{3}, k\in\mathbb{Z}.$$

44. 44. а) Решите уравнение $\sin 2x+\sqrt{3}\sin x=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.
а) Запишем уравнение в виде

$$2\sin x\cos x+\sqrt{3}\sin x=0 \Leftrightarrow \sin x\cdot\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)=0.$$



Значит, или $\sin x=0$, откуда $x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, или $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$ или $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right]$. Получим числа: $\frac{17\pi}{6};\ 3\pi;\ \frac{19\pi}{6}$.

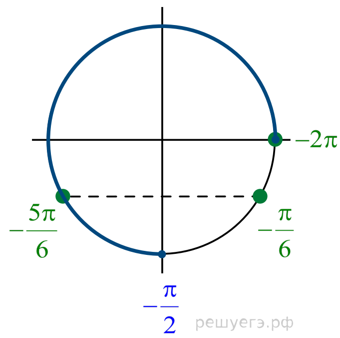
Ответ: а) $\left\{\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{17\pi}{6};\ 3\pi;\ \frac{19\pi}{6}$.

45. 45. а) Решите уравнение $\sin 2x=2\sin x-\cos x+1$.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi,\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.
а) Преобразуем уравнение:

$$2\sin x\cos x-2\sin x+\cos x-1=0 \Leftrightarrow (\cos x-1)(2\sin x+1)=0.$$



Получаем: $\cos x=1$ или $\sin x=-\frac{1}{2}$. Отсюда $x=2\pi k,\ x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$ или $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни на отрезке $\left[-2\pi,\ -\frac{\pi}{2}\right]$. Это числа -2π и $-\frac{5\pi}{6}$.

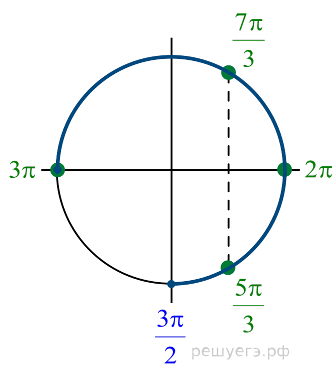
Ответ: а) $\left\{2\pi k,\ -\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-2\pi;\ -\frac{5\pi}{6}$.

46. 46. а) Решите уравнение $2\cos^3 x-2\cos x+\sin^2 x=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2},\ 3\pi\right]$.

Решение.
а) Разложим левую часть на множители:

$$2\cos^3 x-2\cos x+\sin^2 x=2\cos x(\cos^2 x-1)+\sin^2 x=2\cos x(-\sin^2 x)+\sin^2 x=\sin^2 x(1-2\cos x).$$



Значит, или $\sin x=0$, откуда $x=\pi k$, или $\cos x=\frac{1}{2}$, откуда $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$ или $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности (см. рис.) отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2},\ 3\pi\right]$. Получаем числа: $\frac{5\pi}{3},\ 2\pi,\ \frac{7\pi}{3},\ 3\pi$.

Ответ: а) $\left\{\pi k,\ -\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{\pi}{3}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{5\pi}{3};\ 2\pi;\ \frac{7\pi}{3};\ 3\pi$.

47. 47. а) Решите уравнение $\sqrt{3}\sin 2x+3\cos 2x=0$.

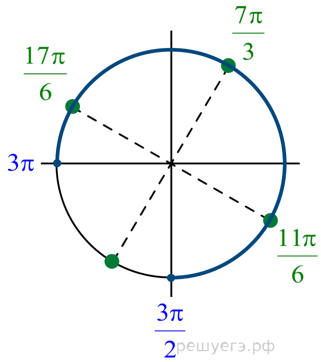
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

Решение.

а) Если $\cos 2x = 0$, то из уравнения следует, что $\sin 2x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству. Поэтому $\cos 2x$ отличен от 0, на него можно поделить обе части уравнения:

$$\sqrt{3}\operatorname{tg} 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} 2x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + \pi k \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$. Получим числа: $\frac{11\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{3}$ и $\frac{17\pi}{6}$.



Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{3}; \frac{17\pi}{6}$.

48. 48. а) Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}, -\pi\right)$.

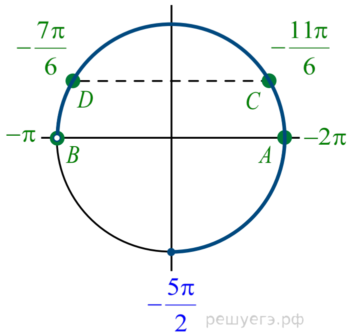
Решение.

а) Так как $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ и $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, имеем:

$$1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Корни уравнения: $x = \pi k, x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) Корни уравнения $\sin x = 0$ изображаются точками A и B, а корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ — точками C и D, промежуток $\left[-\frac{5\pi}{2}, -\pi\right)$ изображается жирной дугой (см. рис.). В указанном промежутке содержатся три корня уравнения: -2π, $-2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$ и $-\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$.



Ответ: а) $\left\{\pi k, (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-2\pi; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}$.

49. 49. Решите уравнение $|\cos x + \sin x| = \sqrt{2}\sin 2x$.

Решение.

Имеем:

$$|\cos x + \sin x| = \sqrt{2}\sin 2x \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos x + \sin x)^2 = 2\sin^2 2x, \\ \sin 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \sin 2x = 2\sin^2 2x, \\ \sin 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 1; \\ \sin 2x = -\frac{1}{2}, \end{array}\right. \\ \sin 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

50. 50. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x + (1 + \sqrt{3})\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Решение.

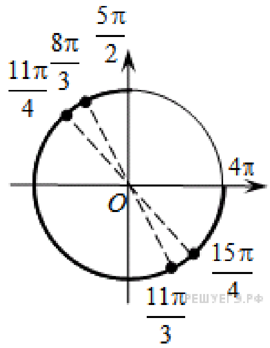
а) Пусть $t = \operatorname{tg} x$, тогда уравнение запишется в виде:

$$t^2 + (1+\sqrt{3})t + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = -\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1, \\ \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$. Получим числа: $\dfrac{8\pi}{3}$, $\dfrac{11\pi}{4}$, $\dfrac{11\pi}{3}$ и $\dfrac{15\pi}{4}$.



Ответ: а) $\left\{-\dfrac{\pi}{4} + \pi k, -\dfrac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{8\pi}{3}$; $\dfrac{11\pi}{4}$; $\dfrac{11\pi}{3}$; $\dfrac{15\pi}{4}$.

51. 51. а) Решите уравнение $2\sin 2x = 4\cos x - \sin x + 1$.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

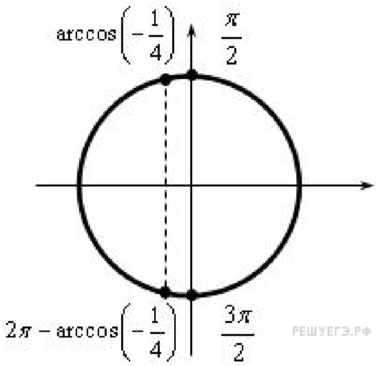
а) Преобразуем уравнение:

$$4\sin x\cos x - 4\cos x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow (\sin x - 1)(4\cos x + 1) = 0.$$

Получаем: $\sin x = 1$ или $\cos x = -\dfrac{1}{4}$.

Откуда $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = -\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right) + 2\pi k$ или $x = \arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$. Получим числа: $\dfrac{\pi}{2}$, $\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)$, $2\pi - \arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)$.



Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right) + 2\pi k, -\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right) + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{\pi}{2}$; $\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)$; $2\pi - \arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)$.

52. 52. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 3 = 0$.

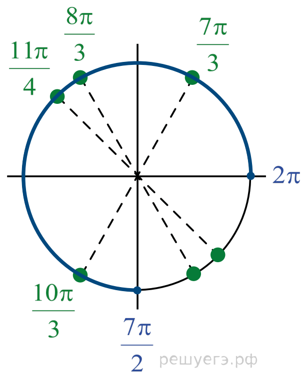
б) Укажите корни этого уравнения на интервале $\left[2\pi;\ \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Последовательно получаем:

$$\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg}x-3=0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg}x+1)-3(\operatorname{tg}x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{tg}x+1)(\operatorname{tg}^2 x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=-1,\\ \operatorname{tg}x=-\sqrt{3},\\ \operatorname{tg}x=\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\\ x=\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$



б) Корни, принадлежащие заданному промежутку, отбираем на тригонометрической окружности (см. рис.). Находим: $\dfrac{7\pi}{3},\ \dfrac{8\pi}{3},\ \dfrac{10\pi}{3}.$

Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{3}+\pi k, -\dfrac{\pi}{3}+\pi k, -\dfrac{\pi}{4}+\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{7\pi}{3};\ \dfrac{8\pi}{3};\ \dfrac{11\pi}{4};\ \dfrac{10\pi}{3}.$

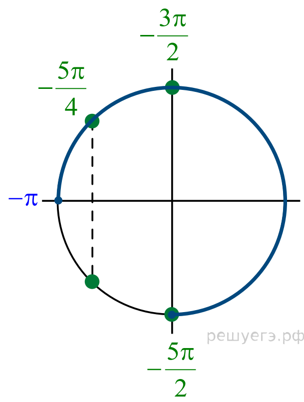
53. 53. а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-\cos x$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$.

Решение.

а) Имеем

$$\sqrt{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cos x \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos^2 x=-\cos x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\end{array}\right.$$



откуда $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k$ или $x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$, отберём с помощью единичной окружности. Получим числа: $-\dfrac{5\pi}{2},\ -\dfrac{3\pi}{2}$ и $-\dfrac{5\pi}{4}.$

Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k, \dfrac{3\pi}{4}+2\pi k, -\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k: k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\dfrac{5\pi}{2};\ -\dfrac{3\pi}{2};\ -\dfrac{5\pi}{4}.$

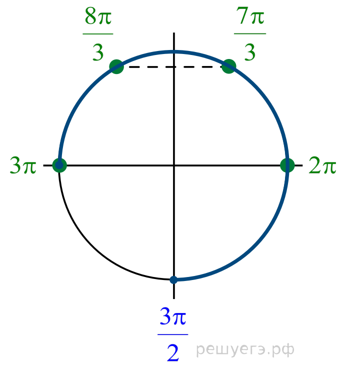
54. 54. а) Решите уравнение $2\sin^2 x-\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащего отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x=0 \Leftrightarrow \sin x\cdot(2\sin x-\sqrt{3})=0.$$



Значит, или $\sin x=0$, откуда $x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, или $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$ или $x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$. Получим числа $2\pi,\ \dfrac{7\pi}{3},\ \dfrac{8\pi}{3},\ 3\pi.$

Ответ: а) $\left\{\pi k, \dfrac{\pi}{3}+2\pi k, \dfrac{2\pi}{3}+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $2\pi;\ \dfrac{7\pi}{3};\ \dfrac{8\pi}{3};\ 3\pi.$

55. 55. а) Решите уравнение $2\cos^3 x+\sqrt{3}\cos^2 x+2\cos x+\sqrt{3}=0.$

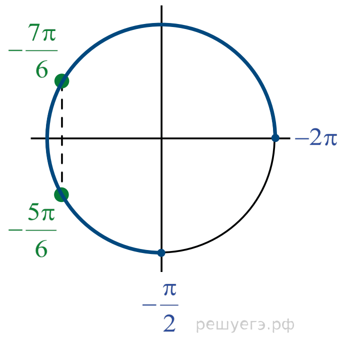
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде: $(2\cos x+\sqrt{3})(\cos^2 x+1)=0.$

Значит, или $\cos^2 x=-1$, что невозможно, или $\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k$ или $x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\dfrac{\pi}{2}\right]$. Получим числа: $-\dfrac{7\pi}{6},\ -\dfrac{5\pi}{6}.$



Ответ: а) $\left\{\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\dfrac{7\pi}{6};\ -\dfrac{5\pi}{6}.$

56. 56. а) Решите уравнение $2\cos^2 x+1=2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right).$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащего отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\ 3\pi\right].$

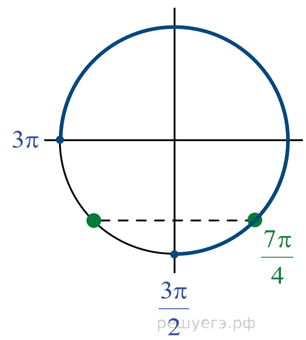
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2-2\sin^2 x+2\sqrt{2}\sin x+1=0\Leftrightarrow 2\sin^2 x-2\sqrt{2}\sin x-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\\ \sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{array}\right.$$

Уравнение $\sin x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ корней не имеет. Значит, $\sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$ или $x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$. Получим число $\dfrac{7\pi}{4}.$



Ответ: а) $\left\{-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{7\pi}{4}.$

57. 57. а) Решите уравнение $2\sin^2 x=3\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+4.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right].$

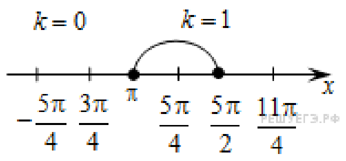
Решение.

а) Используем формулу приведения и основное тригонометрическое тождество

$$2\sin^2 x = 3\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\left(1 - \cos^2 x\right) = 3\sqrt{2}\cos x + 4 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\sqrt{2}\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{-3\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4}, \\ \cos x = \dfrac{-3\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x = -\sqrt{2} \end{array}\right. \underset{|\cos x|\le 1}{\Leftrightarrow} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k, \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберём корни, лежащие на заданном отрезке (см. рис.).



Искомый корень: $\dfrac{5\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{-\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k, \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k : k \in Z\right\}$; б) $\dfrac{5\pi}{4}$.

58. 58. а) Решите уравнение $\cos 2x + \cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = 0,25.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

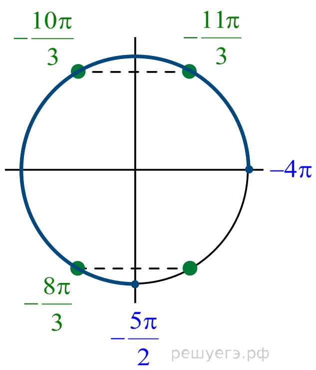
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$1 - 2\sin^2 x + \sin^2 x = 0,25 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4}.$$

Значит, или $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$ или $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$, или $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$ или $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$. Получим числа: $-\dfrac{11\pi}{3}, -\dfrac{10\pi}{3}, -\dfrac{8\pi}{3}$.



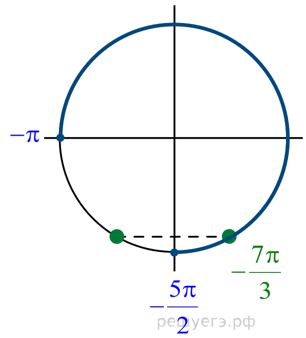
Ответ: а) $\left\{-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\dfrac{11\pi}{3};\ -\dfrac{10\pi}{3};\ -\dfrac{8\pi}{3}$.

59. 59. а) Решите уравнение $8\sin^2 x + 2\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = 9.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение.
а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$8\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{3+72}}{8}, \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3+72}}{8}. \end{array}\right.$$



Значит, $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$ или $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

Уравнение $\sin x = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ корней не имеет.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$. Получим число $-\dfrac{7\pi}{3}$.

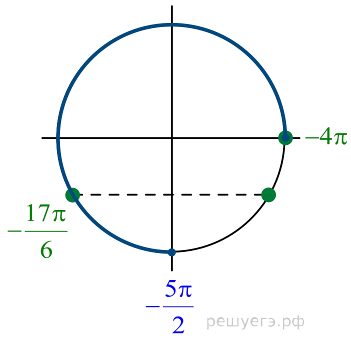
Ответ: а) $\left\{-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k : k \in Z\right\}$; б) $-\dfrac{7\pi}{3}$.

60. 60. а) Решите уравнение $\sin 2x = 2\sin x + \sin\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right) + 1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.
а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\sin x\cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow (\cos x - 1)(2\sin x + 1) = 0$$



Значит, $\cos x = 1$, откуда $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = -\dfrac{1}{2}$, откуда $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Получим числа: -4π и $-\dfrac{17\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{2\pi k, -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) -4π; $-\dfrac{17\pi}{6}$.

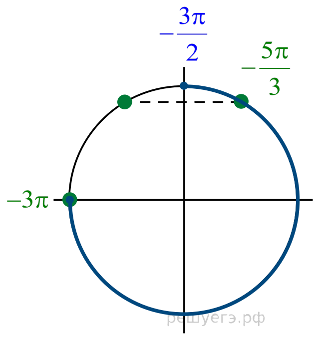
61. 61. а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\sin x\cdot\cos x+2\sin x-\sqrt{3}\cos x-\sqrt{3}=0;\ (\cos x+1)\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)=0.$$



Значит, или $\cos x=-1$, откуда $x=\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, или $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$. Получим числа: -3π и $-\frac{5\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{\pi+2\pi k,\ \frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k: k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-3\pi;\ -\frac{5\pi}{3}$.

62. 62. а) Решите уравнение $\sin 2x=\sin x-2\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)+1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение

$$2\sin x\cos x=\sin x-2\cos x+1\Leftrightarrow(2\cos x-1)(\sin x+1)=0.$$

Значит, либо $\cos x=\frac{1}{2}$, откуда $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$, либо $\sin x=-1$, откуда $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

б) На указанном промежутке лежат точки $\frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{3},\ \frac{7\pi}{3}$.

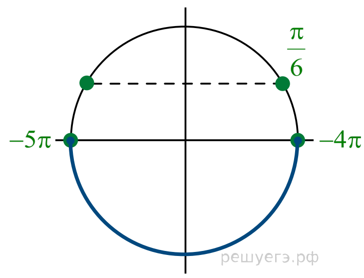
Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ -\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k: k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{3};\ \frac{7\pi}{3}$.

63. 63. а) Решите уравнение $2\sin(\pi+x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi;\ -4\pi]$.

Решение.

а) Решим уравнение:



$$2\sin(\pi+x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin x\Leftrightarrow-2\sin x\cdot(-\sin x)=\sin x\Leftrightarrow 2\sin^2 x=\sin x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) Среди представленных корней отберем те, которые принадлежат отрезку $[-5\pi;\ -4\pi]$.
Это числа -5π и -4π.

Ответ: а) $\left\{\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{\pi}{6}+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-5\pi;\ -4\pi$.

64. 64. а) Решите уравнение $6\sin^2 x+7\cos x-7=0$.

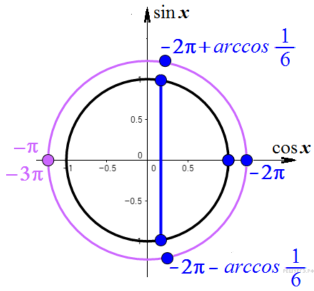
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\pi]$.

Решение.

а) Решим уравнение

$$6\sin^2 x+7\cos x-7=0 \Leftrightarrow 6\cdot(1-\cos^2 x)+7\cos x-7=0 \Leftrightarrow 6\cos^2 x-7\cos x+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&\cos x=\frac{1}{6},\\&\cos x=1.\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x=\arccos\frac{1}{6}+2\pi k,\\&x=-\arccos\frac{1}{6}+2\pi k,\\&x=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}\right.$$



б) Отберём корни принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\pi]$ с помощью тригонометрической окружности. Получим числа: $-2\pi-\arccos\frac{1}{6},\ -2\pi,\ -2\pi+\arccos\frac{1}{6}$.

Ответ: а) $2\pi k,\ \pm\arccos\frac{1}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;

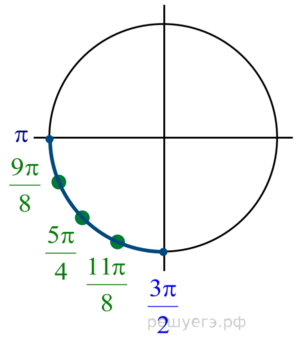
б) $-2\pi-\arccos\frac{1}{6},\ -2\pi,\ -2\pi+\arccos\frac{1}{6}$.

65. 65. а) Решите уравнение $4\sin^4 2x+3\cos 4x-1=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Решим уравнение:



$$4\sin^4 2x+3\cos 4x-1=0 \Leftrightarrow 4\sin^4 2x+3(1-2\sin^2 2x)-1=0 \Leftrightarrow 4\sin^4 2x-6\sin^2 2x+2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&\sin^2 2x=1,\\&\sin^2 2x=\frac{1}{2}\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&\sin 2x=\pm 1,\\&\sin 2x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&2x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\\&2x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\\&x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4},\ k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}\right.$$

б) Среди представленных корней отберем те, которые принадлежат отрезку $\left[\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

Это числа $\frac{9\pi}{8},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{11\pi}{8}$.

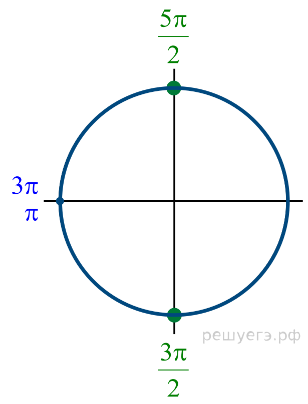
Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4} : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{9\pi}{8};\ \frac{5\pi}{4};\ \frac{11\pi}{8}$.

66. 66. а) Решите уравнение $2\sin^4 x+3\cos 2x+1=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi;\ 3\pi]$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$. Из неё следует, что $\sin^4 x=\dfrac{1}{4}(\cos^2 2x-2\cos 2x+1)$. Поэтому уравнение можно преобразовать так:



$$\frac{1}{2}\cos^2 2x-\cos 2x+\frac{1}{2}+3\cos 2x+1=0\Leftrightarrow \cos^2 2x+4\cos 2x+3=0.$$

Сделаем замену $t=\cos 2x$. Получим

$$t^2+4t+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1, \\ t=-3. \end{array}\right.$$

Откуда $\cos 2x=-3$ или $\cos 2x=-1$.

Уравнение $\cos 2x=-3$ не имеет решений. Из уравнения $\cos 2x=-1$ получаем

$$2x=\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие заданному отрезку. Получим числа: $\dfrac{3\pi}{2}$ и $\dfrac{5\pi}{2}$.

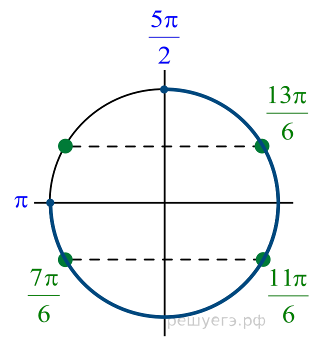
Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{3\pi}{2}$; $\dfrac{5\pi}{2}$.

67. 67. а) Решите уравнение $\cos 2x+\sin^2 x=0,75$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой косинуса двойного угла: $\cos 2x=1-2\sin^2 x$, и введем обозначение $t=\sin x$. Имеем:



$$1-2t^2+t^2=0,75\Leftrightarrow t^2=0,25\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{1}{2}, \\ t=\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x=-\dfrac{1}{2}, \\ \sin x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k, \\ x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k, \\ x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k, \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k, \end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности (см. рис.) отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $\dfrac{7\pi}{6}$, $\dfrac{11\pi}{6}$, $\dfrac{13\pi}{6}$.

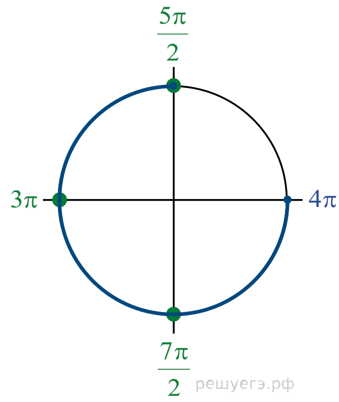
Ответ: а) $\left\{-\dfrac{\pi}{6}+\pi k, \dfrac{\pi}{6}+\pi k:k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{7\pi}{6}$; $\dfrac{11\pi}{6}$; $\dfrac{13\pi}{6}$.

68. 68. а) Решите уравнение $\cos^2(\pi-x)-\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

Решение.

а) Используя формулы приведения, получим уравнение, квадратное относительно косинуса:



$$\cos^2(\pi-x)-\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=0\Leftrightarrow\cos^2x+\cos x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\\ x=\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) Отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$ принадлежат корни $\frac{5\pi}{2}$, 3π и $\frac{7\pi}{2}$ (см. рис.).

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \pi+2\pi k: k\in\mathbb{Z}\right\}$. б) $\frac{5\pi}{2}$; 3π; $\frac{7\pi}{2}$.

69. 69. а) Решите уравнение $2x\cos x-8\cos x+x-4=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

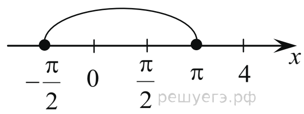
Решение.

а) Имеем:

$$2x\cos x-8\cos x+x-4=0\Leftrightarrow 2\cos x(x-4)+x-4=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(2\cos x+1)(x-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=-\frac{1}{2},\\ x-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\ x=4.\end{array}\right.$$

б) При помощи числовой оси отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$. Получим число $\frac{2\pi}{3}$.



Ответ: а) $\{4\}\cup\left\{\frac{2\pi}{3}+2\pi k,-\frac{2\pi}{3}+2\pi k: k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{2\pi}{3}$.

70. 70. а) Решите уравнение $x\cos x+4\cos x-x-4=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

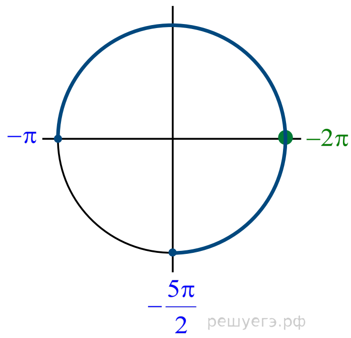
$$(x+4)(\cos x-1)=0.$$

Значит, или $x=-4$, или $\cos x=1$ откуда $x=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

б) Заметим, что $-\frac{5\pi}{2}<-4<-\pi$.

С помощью числовой окружности отберем числа вида $x=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, принадлежащие отрезку $[-\frac{5\pi}{2};-\pi]$.

Получим число -2π.



Ответ: а) -4; $2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) -2π; -4.