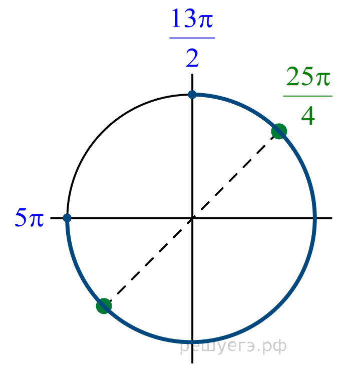
Уравнения смешанного типа

1. 1. а) Решите уравнение $15^{\cos x}=3^{\cos x}\cdot 5^{\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi, \dfrac{13\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:



$$3^{\cos x}\cdot 5^{\cos x}=3^{\cos x}\cdot 5^{\sin x}\Leftrightarrow 5^{\cos x}=5^{\sin x}\Leftrightarrow \cos x=\sin x\Leftrightarrow \operatorname{tg} x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[5\pi, \dfrac{13\pi}{2}\right]$. Получим числа: $\dfrac{21\pi}{4}, \dfrac{25\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{4}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{21\pi}{4}; \dfrac{25\pi}{4}$.

2. 2. а) Решите уравнение $\dfrac{3^{\cos x}}{9^{\cos^2 x}}=4^{2\cos^2 x-\cos x}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{\pi}{6}\right]$.

Решение.

а) Заметим, что: $\dfrac{3^{\cos x}}{9^{\cos^2 x}}=\dfrac{3^{\cos x}}{3^{2\cos^2 x}}=3^{\cos x-2\cos^2 x}$. Далее имеем:

$$3^{\cos x-2\cos^2 x}=4^{2\cos^2 x-\cos x}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{2\cos^2 x-\cos x}=4^{2\cos^2 x-\cos x}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{12}\right)^{2\cos^2 x-\cos x}=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-\cos x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\\ x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

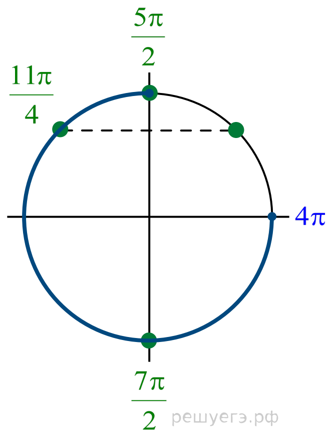
б) Заданному промежутку принадлежат числа $-\dfrac{3\pi}{2},\ -\dfrac{\pi}{2},\ -\dfrac{\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ -\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ \dfrac{\pi}{3}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\dfrac{3\pi}{2};\ -\dfrac{\pi}{2};\ -\dfrac{\pi}{3}$.

3. 3. а) Решите уравнение $(49^{\cos x})^{\sin x}=7^{\sqrt{2}\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Решение.
а) Преобразуем уравнение:



$$7^{2\cos x\sin x}=7^{\sqrt{2}\cos x}\Leftrightarrow 2\sin x\cos x=\sqrt{2}\cos x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x-\sqrt{2})=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\\ x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) С помощью единичной окружности отберём корни на отрезке $\left[\dfrac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

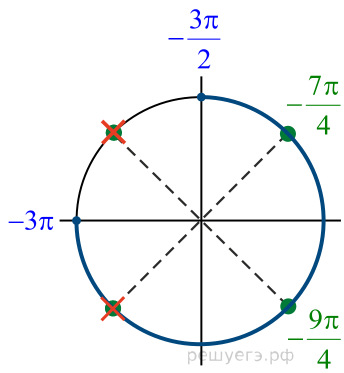
Получаем: $\dfrac{5\pi}{2}$, $\dfrac{11\pi}{4}$, $\dfrac{7\pi}{2}$.

Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ =\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ \dfrac{3\pi}{4}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{5\pi}{2}$; $\dfrac{11\pi}{4}$; $\dfrac{7\pi}{2}$.

4. 4. а) Решите уравнение $(\operatorname{tg}^2 x-1)\sqrt{13\cos x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.
а) Заметим, что первый множитель содержит тангенс, поэтому $\cos x\neq 0$. Второй множитель — квадратный корень, поэтому подкоренное выражение должно быть неотрицательным. Следовательно, область определения уравнения задается неравенством $\cos x>0$. На это области второй множитель не обращается в нуль. Рассмотрим случай, когда нулю равен первый множитель. Последовательно получаем:



$$(\operatorname{tg}^2 x-1)\sqrt{13\cos x}=0\Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{tg}^2 x=1,\\ \cos x>0,\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{tg} x=\pm 1,\\ \cos x>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\ \cos x>0\end{cases}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) Корни из отрезка $\left[-3\pi;\ -\dfrac{3\pi}{2}\right]$ отберём с помощью единичной окружности. Получаем $-\dfrac{9\pi}{4}$ и $-\dfrac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{4}+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\dfrac{9\pi}{4}$; $-\dfrac{7\pi}{4}$.

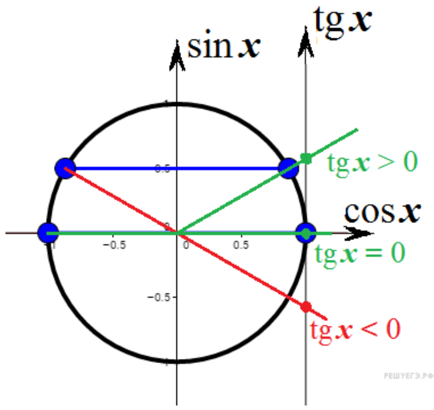
5. 5. а) Решите уравнение $\left(2\cos^2 x+\sin x-2\right)\sqrt{5\operatorname{tg} x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Получаем:

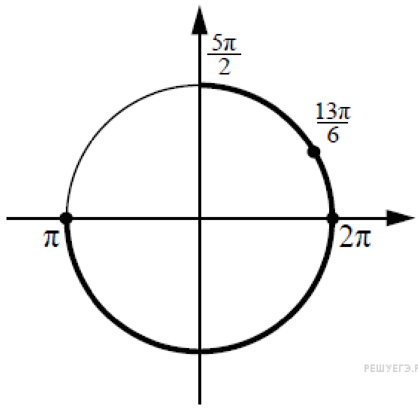
$$\left(2\cos^2 x+\sin x-2\right)\sqrt{5\operatorname{tg} x}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=0,\\ \begin{cases}\operatorname{tg} x\geq 0,\\ 2\cos^2 x+\sin x-2=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=0,\\ \begin{cases}\operatorname{tg} x\geq 0,\\ \sin x-2\sin^2 x=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=0,\\ \begin{cases}\operatorname{tg} x\geq 0,\\ \sin x(1-2\sin x)=0,\end{cases}\end{array}\right.$$

откуда $x=\pi k$ или $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$, отберём с помощью единичной окружности. Получаем $\pi,\ 2\pi$ и $\frac{13\pi}{6}$.



Ответ: а) $\left\{\pi k,\ \frac{\pi}{6}+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\pi;\ 2\pi;\ \frac{13\pi}{6}$.

6. 6. а) Решите уравнение $10^{\sin x}=2^{\sin x}\cdot 5^{-\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{-5\pi}{2},\ -\pi\right]$.

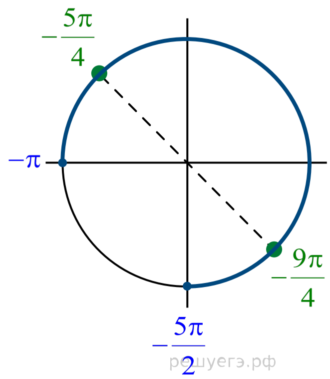
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$2^{\sin x}\cdot 5^{\sin x}=2^{\sin x}\cdot 5^{-\cos x} \Leftrightarrow 5^{\sin x}=5^{-\cos x} \Leftrightarrow \sin x=-\cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x=-1,$$

откуда $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{-5\pi}{2},\ -\pi\right]$. Получим числа: $-\frac{9\pi}{4},\ -\frac{5\pi}{4}$.



Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{9\pi}{4};\ -\frac{5\pi}{4}$.

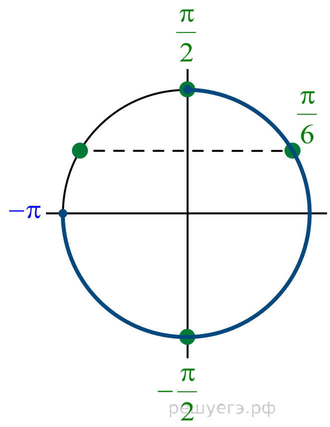
7. 7. а) Решите уравнение $\left(27^{\cos x}\right)^{\sin x}=3^{\frac{3\cos x}{2}}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$3^{3\cos x\sin x}=3^{\frac{3\cos x}{2}}\Leftrightarrow 3\cos x\sin x=\frac{3\cos x}{2}\Leftrightarrow \cos x\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)=0.$$



Значит, либо $\cos x=0$, откуда $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, либо $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, или $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right]$. Получим числа: $-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2}$.

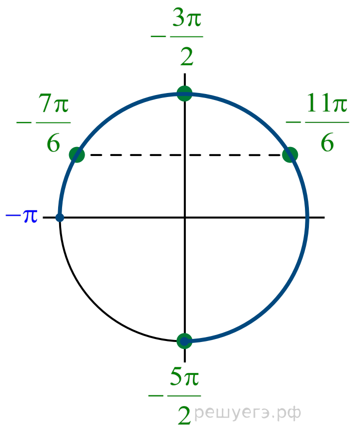
8. 8. а) Решите уравнение $(25^{\cos x})^{\sin x}=5^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2},-\pi\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$5^{2\sin x\cos x}=5^{\cos x}\Leftrightarrow 2\sin x\cos x=\cos x\Leftrightarrow \cos x\cdot(2\sin x-1)=0.$$



Значит, либо $\cos x=0$, откуда $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n$, либо $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$ или $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ \in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2},-\pi\right]$. Получим числа: $-\frac{5\pi}{2},-\frac{11\pi}{6},-\frac{3\pi}{2},-\frac{7\pi}{6}$.

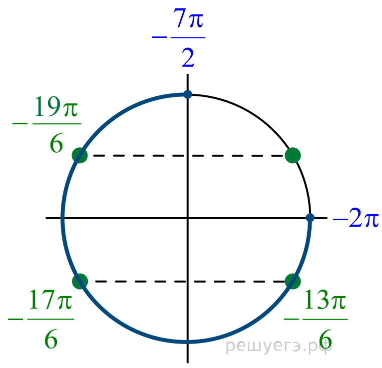
Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n:n\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{5\pi}{2};-\frac{11\pi}{6};-\frac{3\pi}{2};-\frac{7\pi}{6}$.

9. 9. а) Решите уравнение $9^{\sin x}+9^{-\sin x}=\frac{10}{3}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2},-2\pi\right]$.

Решение.

а) Пусть $t=9^{\sin x}$, тогда исходное уравнение запишется в виде $t+\frac{1}{t}=\frac{10}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3, \\ t=\frac{1}{3}. \end{array}\right.$



При $t=3$ получим:

$$9^{\sin x}=3 \Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+2\pi k, \\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}.$$

При $t=\frac{1}{3}$ получим:

$$9^{\sin x}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k, \\ x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k, \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни принадлжащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}, -2\pi\right]$. Получим числа: $-\frac{19\pi}{6}, -\frac{17\pi}{6}, -\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi k, \frac{5\pi}{6}+2\pi k, -\frac{\pi}{6}+2\pi k, -\frac{5\pi}{6}+2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{19\pi}{6}; -\frac{17\pi}{6}; -\frac{13\pi}{6}$.

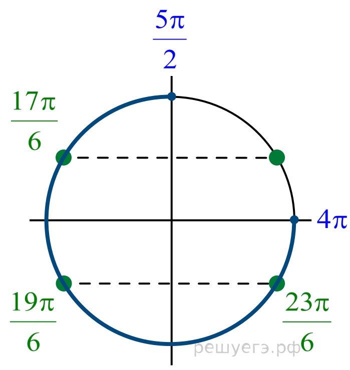
10. 10. а) Решите уравнение

$$4^{\sin x}+4^{-\sin x}=\frac{5}{2}$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Решение.

а) Пусть $t=4^{\sin x}$, тогда исходное уравнение запишется в виде $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2, \\ t=\frac{1}{2}. \end{array}\right.$



При $t=2$ получим: $4^{\sin x}=2$, откуда

$$\sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+2\pi k, \\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}.$$

При $t=\frac{1}{2}$ получим: $4^{\sin x}=\frac{1}{2}$, откуда

$$\sin x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k, \\ x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k, \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни принадлжащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Получим числа: $\frac{17\pi}{6}; \frac{19\pi}{6}; \frac{23\pi}{6}$.

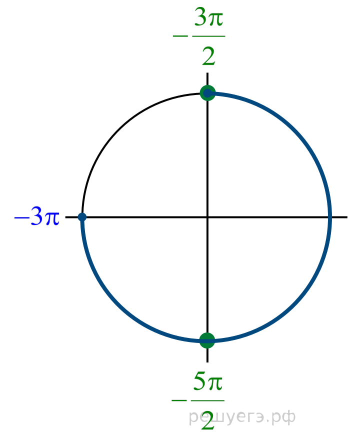
Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{6}+2\pi k, \frac{\pi}{6}+2\pi k, -\frac{5\pi}{6}+2\pi k, \frac{5\pi}{6}+2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{17\pi}{6}; \frac{19\pi}{6}; \frac{23\pi}{6}$.

11. 11. а) Решите уравнение $\left(\frac{2}{5}\right)^{\cos x}+\left(\frac{5}{2}\right)^{\cos x}=2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi, -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Пусть $t=\left(\frac{2}{5}\right)^{\cos x}$, тогда исходное уравнение можно преобразовать так



$$t+\frac{1}{t}=2 \Leftrightarrow \frac{t^2+1-2t}{t}=0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{\cos x}=1 \Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi, -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n : n\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}$.

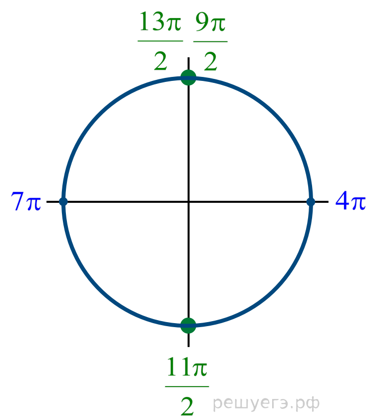
12. 12. а) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{\cos x}+3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\cos x}-4=0$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[4\pi, 7\pi]$.

Решение.

Сделаем замену $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{\cos x}$:



$$y^2+3y-4=0 \Leftrightarrow (y+4)(y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-4, \\ y=1. \end{array}\right.$$ Тогда,

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{1}{4}\right)^{\cos x}=-4, \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{\cos x}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, лежащие на отрезке $[4\pi, 7\pi]$: $\frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n :\ n\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{9\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}; \frac{13\pi}{2}$.

13. 13. а) Решите уравнение $\left(\frac{1}{81}\right)^{\cos x}=9^{2\sin 2x}$.

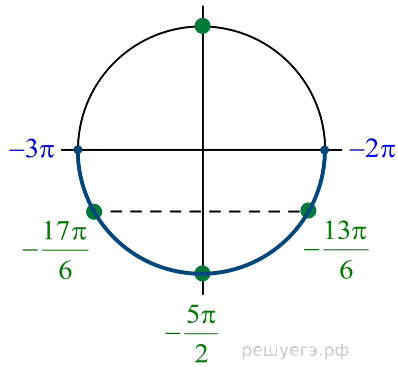
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi, -2\pi]$.

Решение.

а) Перейдем к одному основанию:

$$81^{-\cos x} = 81^{\sin 2x} \Leftrightarrow -\cos x = 2\sin x\cos x \Leftrightarrow \cos x \cdot (2\sin x + 1) = 0.$$

Значит, или $\cos x = 0$, откуда $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = -\dfrac{1}{2}$, откуда $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.



б) С помощью числовой окружности отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi, -2\pi]$. Получим числа: $-\dfrac{17\pi}{6}, -\dfrac{5\pi}{2}, -\dfrac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k, -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\dfrac{17\pi}{6}$; $-\dfrac{5\pi}{2}$; $-\dfrac{13\pi}{6}$.

14. 14. а) Решите уравнение $\log_2(\cos x + \sin 2x + 8) = 3$.

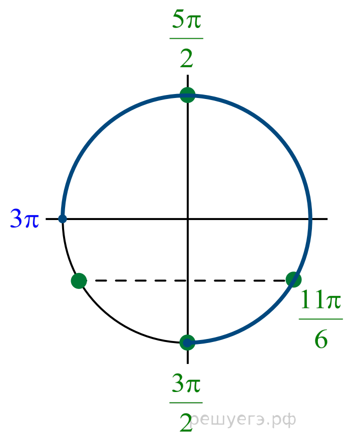
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}, 3\pi\right]$.

Решение.

а) Из данного уравнения получаем:

$$\cos x + \sin 2x + 8 = 8 \Leftrightarrow \cos x + 2\cos x \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\sin x + 1) = 0.$$

Значит, или $\cos x = 0$, откуда $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$, или $\sin x = -\dfrac{1}{2}$, откуда $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}, 3\pi\right]$. Получим числа: $\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{11\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k, -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{3\pi}{2}$; $\dfrac{11\pi}{6}$; $\dfrac{5\pi}{2}$.

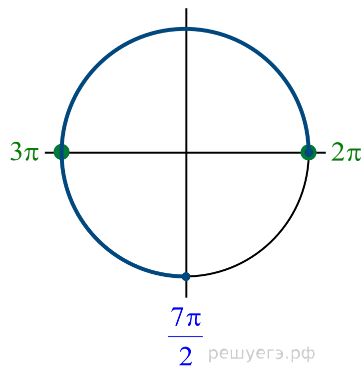
15. 15. а) Решите уравнение $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{\sin x} + \left(\dfrac{5}{4}\right)^{\sin x} = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi, \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Пусть $t = \left(\dfrac{4}{5}\right)^{\sin x}$, тогда исходное уравнение запишется в виде $t + \dfrac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow t = 1$. Тогда

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{\sin x} = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$



б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi, \dfrac{7\pi}{2}\right]$. Получим числа: $2\pi,\ 3\pi$.

Ответ: а) $\{\pi n:\ n \in \mathbb{Z}\}$; б) 2π; 3π.

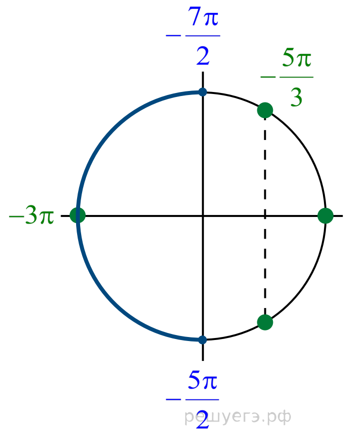
16. 16. а) Решите уравнение: $36^{\sin 2x} = 6^{2\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.
а) Перейдем к одному основанию:

$$36^{\sin 2x} = 6^{2\sin x} \Leftrightarrow 2\sin x\cos x = \sin x \Leftrightarrow \sin x\cdot(2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \cos x = \frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi k,\\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$. Получим число -3π.

Ответ: а) $\left\{\pi k, -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) -3π.

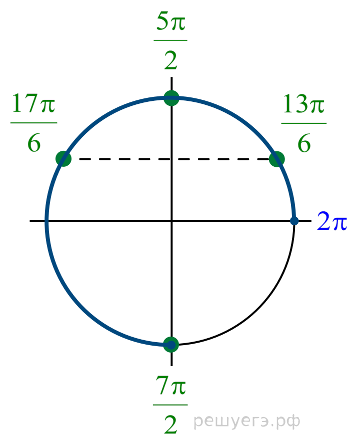
17. 17. а) Решите уравнение $\log_3(\sin 2x + \cos(\pi - x) + 9) = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.
а) Последовательно получаем:

$$\log_3(\sin 2x + \cos(\pi - x) + 9) = 2 \Leftrightarrow \sin 2x - \cos x + 9 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \sin x = \frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\\ x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.\end{array}\right.$$



б) Условию $x \in \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ удовлетворяет только числа $\frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k,\ (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k:\ k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{13\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}; \frac{17\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}$.

18. 18. а) Решите уравнение $5^{2\sin 2x} = \left(\frac{1}{25}\right)^{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.

а) Последовательно получаем:

$$5^{2\sin 2x}=\left(\frac{1}{25}\right)^{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}\Leftrightarrow 5^{2\sin 2x}=5^{-2\sin x}\Leftrightarrow \sin 2x+\sin x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \cos x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\end{array}\right. k\in\mathbb{Z}.$$

б) Условию $x\in\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$ удовлетворяют только числа $2\pi,\ \frac{8\pi}{3},\ 3\pi.$

Ответ: а) $x=\pi k,\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $2\pi,\ \frac{8\pi}{3},\ 3\pi.$

19. 19. а) Решите уравнение $2\log_3^2(2\cos x)-5\log_3(2\cos x)+2=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

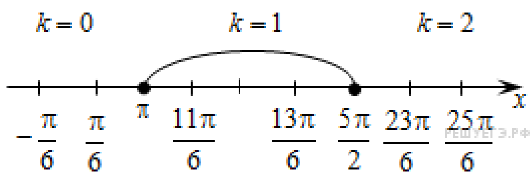
Решение.

а) Пусть $\log_3(2\cos x)=t$, тогда $2t^2-5t+2=0$, откуда $t=2$ или $t=\frac{1}{2}$.

Далее имеем:

$$\left[\begin{array}{l}\log_3(2\cos x)=2,\\ \log_3(2\cos x)=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\cos x=9,\\ 2\cos x=\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=4,5,\\ \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.\underset{|\cos x|\le 1}{\Leftrightarrow}\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\\ x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) Найдём корни, лежащие на отрезке $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.



Из рисунка видно, что заданному отрезку принадлежат корни $\frac{11\pi}{6}$ и $\frac{13\pi}{6}$.

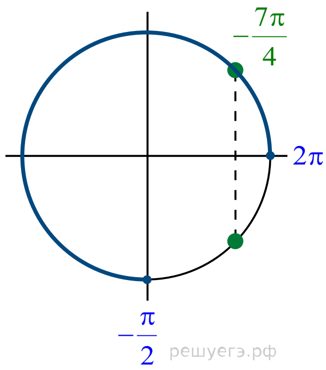
Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi k-\frac{\pi}{6}+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{11\pi}{6};\ \frac{13\pi}{6}.$

20. 20. а) Решите уравнение $2\log_2^2(2\cos x)-9\log_2(2\cos x)+4=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Пусть $\log_2(2\cos x) = t$, тогда:



$$2t^2 - 9t + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4, \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(2\cos x) = 4, \\ \log_2(2\cos x) = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x = 16, \\ 2\cos x = \sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 8, \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$$

Первый случай невозможен.

Во втором имеем $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

б) Корни, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$. Получим число $-\frac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ -\frac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{7\pi}{4}$.

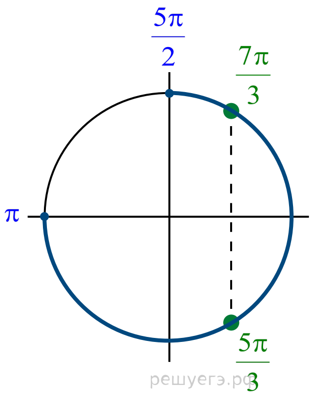
21. 21. а) Решите уравнение $2^{4\cos x} + 3 \cdot 2^{2\cos x} - 10 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащего отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$(2^{2\cos x})^2 + 3 \cdot 2^{2\cos x} - 10 = 0 \Leftrightarrow (2^{2\cos x} - 2)(2^{2\cos x} + 5) = 0.$$



Значит, или $2^{2\cos x} = -5$, что невозможно, или $2^{2\cos x} = 2 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ или $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

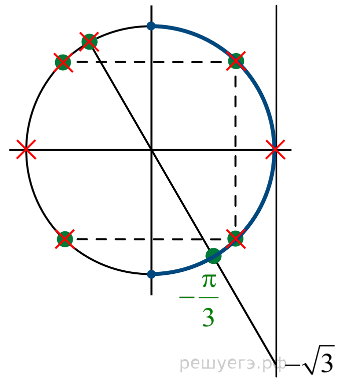
Получим числа: $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \frac{\pi}{3} + 2\pi k :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$.

22. 22. Решите уравнение

$$\frac{(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})\log_{13}(2\sin^2 x)}{\log_{31}(\sqrt{2}\cos x)} = 0.$$

Решение.



$$\frac{(\operatorname{tg}x+\sqrt{3})\log_{13}(2\sin^2 x)}{\log_{31}(\sqrt{2}\cos x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}x+\sqrt{3}=0, \\ 2\sin^2 x=1, \end{array}\right. \\ \sqrt{2}\cos x\neq 1, \\ \cos x>0, \\ \sin x\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}x=-\sqrt{3}, \\ \sin x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{array}\right. \\ \cos x\neq\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x>0, \\ \sin x\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

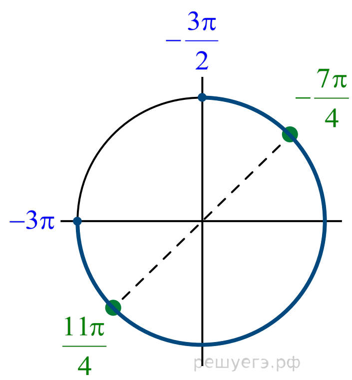
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}x=-\sqrt{3}, \\ \cos x>0. \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{3}+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

23. 23. а) Решите уравнение $15^{\cos x}=3^{\cos x}\cdot(0,2)^{-\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.
а) Решим уравнение:



$$15^{\cos x}=3^{\cos x}\cdot(0,2)^{-\sin x}\Leftrightarrow 3^{\cos x}\cdot 5^{\cos x}=3^{\cos x}\cdot 5^{\sin x}\underset{3^{\cos x}>0}{\Leftrightarrow}\sin x=\cos x\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

б) Среди представленных корней отберем те, которые принадлежат отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

Это числа $-\frac{11\pi}{4};\ -\frac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{11\pi}{4};\ -\frac{7\pi}{4}$.

24. 24. а) Решите уравнение: $9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0.$

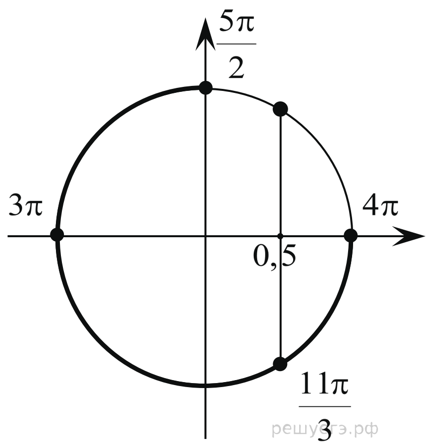
б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Решение.

а) Пусть $t = 9^{\cos x}$, тогда: $9t^2 - 28t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{9}, \\ t = 3. \end{array}\right.$

Вернемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} 9^{\cos x} = \frac{1}{9}, \\ 9^{\cos x} = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1, \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$



б) Корни, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$, отберем на тригонометрической окружности (см. рис.) Получим числа $3\pi;\ \frac{11\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{\pi + 2\pi k,\ \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi k:\ k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $3\pi;\ \frac{11\pi}{3}$.

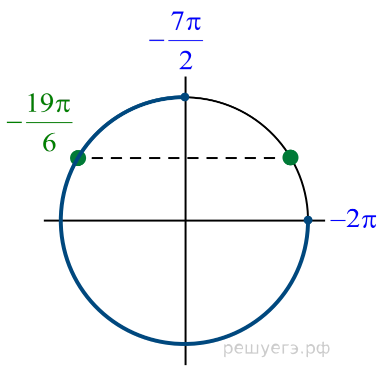
25. 25. а) Решите уравнение: $3\log_8^2(\sin x) - 5\log_8(\sin x) - 2 = 0$

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

Решение.

а) Пусть $\log_8(\sin x) = t$, тогда $3t^2 - 5t - 2 = 0$, откуда $t = 2$ или $t = -\frac{1}{3}$.

Далее имеем:



$$\left[\begin{array}{l} \log_8(\sin x) = 2, \\ \log_8(\sin x) = -\frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 64, \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \underset{|\sin x| \le 1}{\Leftrightarrow} \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

б) Корни, лежащие на заданном промежутке, отберем на тригонометрической окружности (см. рис.). Получим $-\frac{19\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k:\ k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{19\pi}{6}$.

26. 26. а) Решите уравнение: $\log_{13}(\cos 2x - 9\sqrt{2}\cos x - 8) = 0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде: $\cos 2x - 9\sqrt{2}\cos x - 8 = 1$. Заметим, что выражение, стоящее под знаком логарифма, приравнено к единице, поэтому исследовать ОДЗ не требуется.

Для решения полученного тригонометрического уравнения используем формулу косинуса двойного угла $\cos 2x = 2\cos^2 - 1$, откуда получаем $2\cos^2 x - 9\sqrt{2}\cos x - 10 = 0$. Обозначая $t = \cos x$, имеем:

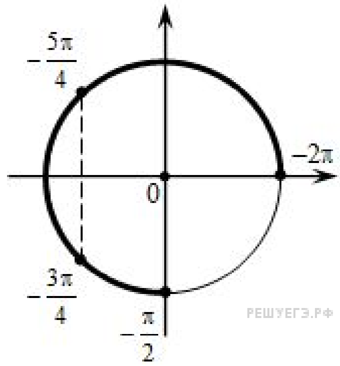
$$2t^2 - 9\sqrt{2}t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{9\sqrt{2} \pm \sqrt{242}}{4} \Leftrightarrow t = \frac{9\sqrt{2} \pm 11\sqrt{2}}{4},$$

откуда $t = 5\sqrt{2}$ или $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Вернемся к исходной переменной. Уравнение $\cos x = 5\sqrt{2}$ корней не имеет, поскольку косинус не больше 1.

Из уравнения $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ находим: $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ или $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$. Получим числа: $-\frac{5\pi}{4};\ -\frac{3\pi}{4}$.



Ответ: а) $\left\{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\ :\ n \in \mathbb{Z}\right\}$. б) $-\frac{5\pi}{4};\ -\frac{3\pi}{4}$.

27. 27. а) Решите уравнение: $\log_8(7\sqrt{3}\sin x - \cos 2x - 10) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

Решение.

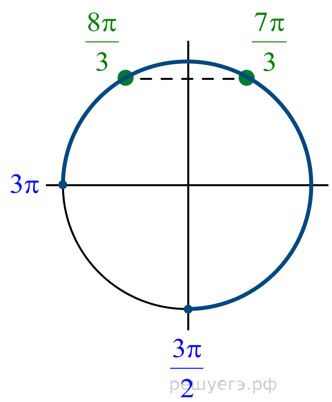
а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$7\sqrt{3}\sin x + 2\sin^2 x - 11 = 1;\ (2\sin x - \sqrt{3})(\sin x + 4\sqrt{3}) = 0.$$

Значит, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ или $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Уравнение $\sin x = -4\sqrt{3}$ корней не имеет.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$. Получим числа: $\frac{7\pi}{3};\ \frac{8\pi}{3}$.



Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{7\pi}{3};\ \frac{8\pi}{3}$.

28. 28. а) Решите уравнение: $0,4^{\sin x} + 2,5^{\sin x} = 2$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Пусть $0,4^{\sin x}=t$, тогда поскольку $0,4=\dfrac{2}{5}$ и $2,5=\dfrac{5}{2}$, получаем:

$$t+\frac{1}{t}=2\Leftrightarrow t^2-2t+1=0\Leftrightarrow t=1.$$

Тогда:

$$0,4^{\sin x}=1\Leftrightarrow \sin x=0\Leftrightarrow x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) Найдём корни, лежащие на заданном отрезке:

$$2\pi\le \pi k\le\frac{7\pi}{2}\Leftrightarrow 2\le k\le\frac{7}{2}\underset{k\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{l}k=2,\\ k=3.\end{array}\right.$$

Тем самым, отрезку $\left[2\pi;\ \dfrac{7\pi}{2}\right]$ принадлежит корни 2π и 3π.

Ответ: а) $\{\pi k: k\in\mathbb{Z}\}$; б) $2\pi; 3\pi$.

Приведём другое решение.

В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, имеем:

$$0,4^{\sin x}+2,5^{\sin x}\ge 2\sqrt{0,4^{\sin x}\cdot 2,5^{\sin x}}=2\sqrt{\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}\right)^{\sin x}}=2.$$

Тогда

$$0,4^{\sin x}=2,5^{\sin x}\Leftrightarrow \sin x=0\Leftrightarrow x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

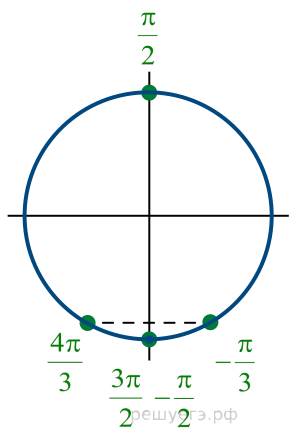
29. 29. а) Решите уравнение: $\log_4(2^{2x}-\sqrt{3}\cos x-\sin 2x)=x.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде: $2^{2x}-\sqrt{3}\cos x-\sin 2x=4^x$. Заметим, что выражение, стоящее под знаком логарифма, приравнено к положительному числу, поэтому исследовать ОДЗ не требуется.

Для решения полученного тригонометрического уравнения используем формулу синуса двойного угла $\sin 2x=2\cos x\sin x$, откуда получаем $\cos x(-2\sin x-\sqrt{3})=0$, откуда $\cos x=0$ или $\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Из уравнения $\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ находим: $x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$ или $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Из уравнения $\cos x=0$ находим: $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$. Получим числа: $-\dfrac{\pi}{2};\ -\dfrac{\pi}{3};\ \dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{4\pi}{3};\ \dfrac{3\pi}{2}.$

Ответ: а) $\left\{-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n;\ \dfrac{-2\pi}{3}+2\pi n;\dfrac{\pi}{2}+\pi n\ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\dfrac{\pi}{2};\ -\dfrac{\pi}{3};\ \dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{4\pi}{3};\ \dfrac{3\pi}{2}.$

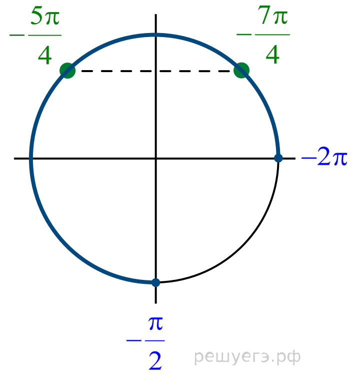
30. 30. а) Решите уравнение: $\log_9(3^{2x}+5\sqrt{2}\sin x-6\cos^2 x-2)=x.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$3^{2x}+5\sqrt{2}\sin x-6\cos^2 x-2=9^x \Leftrightarrow 6\sin^2 x+5\sqrt{2}\sin x-8=0,$ тогда



$$\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{-5\sqrt{2}+11\sqrt{2}}{12},\\ \sin x=\dfrac{-5\sqrt{2}-11\sqrt{2}}{12}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \sin x=-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $-\dfrac{7\pi}{4};\ -\dfrac{5\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ \dfrac{3\pi}{4}+2\pi k\ :\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\dfrac{7\pi}{4},\ -\dfrac{5\pi}{4}$.

31. 31. а)Решите уравнение $\left(\dfrac{1}{49}\right)^{\sin(x+\pi)}=7^{2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$.

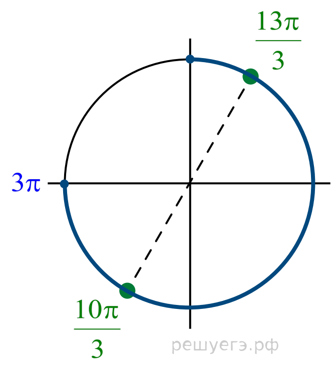
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\ \dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$7^{-2\sin(x+\pi)}=7^{2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \Leftrightarrow -2\sin(x+\pi)=2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x=2\sqrt{3}\cos x\ \Leftrightarrow \operatorname{tg} x=\sqrt{3}, \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$



б) С помощью единичной окружности отберём корни на отрезке $\left[3\pi;\ \dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Получаем: $\dfrac{10\pi}{3},\ \dfrac{13\pi}{3}$.

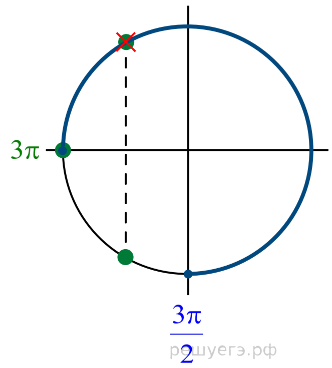
Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{3}+\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{10\pi}{3},\ \dfrac{13\pi}{3}$.

32. 32. а) Решите уравнение: $8\cdot 16^{\cos x}-6\cdot 4^{\cos x}+1=0$

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

Решение.

а) Пусть $t=4^{\cos x}$, тогда



$$8t^2-6t+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{1}{4},\\ t=\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l}4^{\cos x}=\dfrac{1}{4},\\ 4^{\cos x}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=-1,\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi+2\pi k,\\ x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\\ x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) Корни, принадлежащие промежутку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$, отберем на тригонометрической окружности (см. рис.) Получим числа $\dfrac{8\pi}{3},\ 3\pi$.

Ответ: а) $\left\{\pi+2\pi k,\ -\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ \dfrac{2\pi}{3}+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{8\pi}{3};\ 3\pi$.

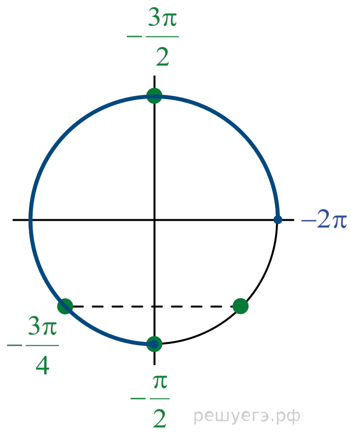
33. 33. а)Решите уравнение $\left(\dfrac{1}{49}\right)^{\cos x}=7^{\sqrt{2}\sin(2x)}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$7^{-2\cos x}=7^{\sqrt{2}\sin(2x)}\Leftrightarrow-2\cos x=\sqrt{2}\sin(2x)\Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow-2\cos x=2\sqrt{2}\sin x\cdot\cos x\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\\ x=\dfrac{5\pi}{4}+2\pi k,\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) С помощью единичной окружности отберём корни на отрезке $\left[-2\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $-\dfrac{\pi}{2},\ -\dfrac{3\pi}{4}\ -\dfrac{3\pi}{2}.$

Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\dfrac{5\pi}{4}+2\pi k,-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k:k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\dfrac{\pi}{2};\ -\dfrac{3\pi}{4};\ -\dfrac{3\pi}{2}.$