

Задача на доказательство и вычисление

1. В конус, радиус основания которого равен 3, вписан шар радиуса 1,5.
 - а) Изобразите осевое сечение комбинации этих тел.
 - б) Найдите отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара.
2. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник со стороной 6. Высота призмы равна 4. Точка N — середина ребра A_1C_1 .
 - а) Постройте сечение призмы плоскостью BAN .
 - б) Найдите периметр этого сечения.
3. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник со стороной 8. Высота призмы равна 3. Точка N — середина ребра A_1C_1 .
 - а) Постройте сечение призмы плоскостью BAN .
 - б) Найдите площадь этого сечения.
4. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$, все ребра которой равны 4, точка K — середина бокового ребра AP .
 - а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и параллельной прямым PB и BC .
 - б) Найдите площадь сечения.
5. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$, все ребра которой равны 6, точка K — середина бокового ребра AP .
 - а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и параллельной плоскости BSP .
 - б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания пирамиды.
6. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 6EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.
 - а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 4 : 3.
 - б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1 .
7. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 построена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .
 - а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 2 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1 .
 - б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C .
8. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 5 : 3$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 5 : 11$, а точка T — середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 10$, $AA_1 = 16$.
 - а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
 - б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .
9. Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCD A' B' C' D'$ является квадрат $ABCD$ со стороной $3\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{7}$. Точка K — середина ребра BB' . Через точки K и C' проведена плоскость α , параллельная прямой BD' .
 - а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.
 - б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α .
10. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 6 : 1$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 3 : 4$, а точка T — середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 30$, $AA_1 = 35$.
 - а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
 - б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .
11. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N — середины ребер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
 - а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от точки C .
 - б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

12. Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N — середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.
- Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.
 - Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1 .
13. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, а высота призмы равна 1. Точка E лежит на диагонали BD_1 , причём $BE = 1$.
- Постройте сечение призмы плоскостью $A_1 C_1 E$.
 - Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .
14. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 24, а боковое ребро SA равно 19. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
- Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от точки C .
 - Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .
15. Все рёбра правильной треугольной пирамиды $SBCD$ с вершиной S равны 9. Основание O высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1 , M — середина ребра SB , точка L лежит на ребре CD так, что $CL : LD = 7 : 2$.
- Докажите, что сечение пирамиды $SBCD$ плоскостью S_1LM — равнобедренная трапеция.
 - Вычислите длину средней линии этой трапеции.
16. Все рёбра правильной треугольной пирамиды $SBCD$ с вершиной S равны 18. Основание O высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1 , M — середина ребра SB , точка L лежит на ребре CD так, что $CL : LD = 7 : 2$.
- Докажите, что сечение пирамиды $SBCD$ плоскостью S_1LM — равнобокая трапеция.
 - Вычислите длину средней линии этой трапеции.
17. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 35$, $AD = 12$, $CC_1 = 21$.
- Докажите, что высоты треугольников ABD и A_1BD , проведённые к стороне BD , имеют общее основание.
 - Найдите угол между плоскостями ABC и A_1DB .
18. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 4, боковые рёбра равны 7, точка D — середина ребра BB_1 .
- Пусть прямые C_1D и BC пересекаются в точке E . Докажите, что угол EAC — прямой.
 - Найдите угол между плоскостями ABC и ADC_1 .
19. Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой стороны основания $AB = 4$, а боковое ребро $AA_1 = 9$. Точка M — середина ребра AC , а на ребре AA_1 взята точка T так, что $AT = 5$.
- Докажите, что плоскость BB_1M делит отрезок C_1T пополам.
 - Плоскость BTC_1 делит отрезок MB_1 на две части. Найдите длину меньшей из них.
20. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
- Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от точки C .
 - Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C , а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α .
21. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $4\sqrt{3}$. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
- Докажите, что плоскость α делит медиану CL основания в отношении 5 : 1, считая от точки C .
 - Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .
22. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 4. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
- Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от точки C .
 - Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .
23. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 12$ и $BC = 5\sqrt{3}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 5$, $SB = 13$, $SD = 10$.
- Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .

24. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{11}$, $SB = 3\sqrt{3}$, $SD = 2\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB .

25. В пирамиде $SABC$ в основании лежит правильный треугольник ABC со стороной $2\sqrt{3}$, $SA = SC = \sqrt{33}$, $SB = 7$. Точка O — основание высоты пирамиды, проведённой из вершины S .

а) Докажите, что точка O лежит вне треугольника ABC .

б) Найдите объём четырёхугольной пирамиды $SABCO$.

26. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 1.

а) Докажите, что плоскости $AA_1 D_1$ и $DB_1 F_1$ перпендикулярны.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и $DB_1 F_1$.

27. Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Расстояние между этими хордами равно $2\sqrt{197}$.

а) Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по одну сторону от этой плоскости.

б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

28. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

а) Докажите, что прямая BD_1 перпендикулярна плоскости ACB_1 .

б) Найдите угол между плоскостями $AD_1 C_1$ и $A_1 D_1 C$.

29. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S .

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C , делит апофему грани ASB в отношении $2 : 1$, считая от вершины S .

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C , делит ребро SF , считая от вершины S .

30. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона основания $AB = 8\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 5$.

а) Найдите длину отрезка $A_1 K$, где K — середина ребра BC .

б) Найдите тангенс угла между плоскостями BCA_1 и $BB_1 C_1$.

31. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

а) Докажите, что прямая $B_1 D$ перпендикулярна плоскости $A_1 B C_1$.

б) Найдите угол между плоскостями $AB_1 C_1$ и $A_1 B_1 C$.

32. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 8.

Точка L — середина ребра SC . Тангенс угла между прямыми BL и SA равен $2\sqrt{\frac{2}{5}}$.

а) Пусть O — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые BO и LO перпендикулярны.

б) Найдите площадь поверхности пирамиды.

33. В пирамиде $DABC$ прямые, содержащие рёбра DC и AB , перпендикулярны.

а) Постройте сечение плоскостью, проходящей через точку E — середину ребра DB , и параллельно DC и AB . Докажите, что получившееся сечение является прямоугольником.

б) Найдите угол между диагоналями этого прямоугольника, если $DC = 24$, $AB = 10$.

34. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 3 : 4$. Точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 9$, $AD = 6$, $AA_1 = 14$.

а) В каком отношении плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 ?

б) Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью $AA_1 B_1$.

35. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S , все рёбра которой равны 4, точка N — середина ребра AC , точка O центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении $3 : 1$, считая от вершины пирамиды.

а) Докажите, что прямая NP перпендикулярна прямой BS .

б) Найдите расстояние от точки B до прямой NP .

36. Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 64.

а) Постройте прямую пересечения плоскости SAC и плоскости, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания.

- б) Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды, если площадь сечения пирамиды плоскостью SAC равна 64.
37. Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны 6. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1 , M — середина ребра AS , точка L лежит на ребре BC так, что $BL : LC = 1 : 2$.
- Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью S_1LM — равнобокая трапеция.
 - Вычислите длину средней линии этой трапеции.
38. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 4. Через точки A , C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.
- Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.
 - Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .
39. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{6}$. На рёбрах AB , A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = A_1N = C_1K = 1$.
- Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC . Докажите, что $MNKL$ — квадрат.
 - Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .
40. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания $AB=6$, а боковое ребро $AA_1 = 4\sqrt{3}$. На рёбрах AB , A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = A_1N = C_1K = 1$.
- Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC . Докажите, что $MNKL$ — квадрат.
 - Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .
41. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка K делит боковое ребро AA_1 в отношении $AK : KA_1 = 1 : 2$. Через точки B и K проведена плоскость α , параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M .
- Докажите, что плоскость α делит ребро DD_1 в отношении $DM : MD_1 = 2 : 1$.
 - Найдите площадь сечения, если известно, что $AB = 4$, $AA_1 = 6$.
42. В правильной четырёхугольной призме $KLMN K_1 L_1 M_1 N_1$ точка E делит боковое ребро KK_1 в отношении $KE : EK_1 = 1 : 3$. Через точки L и E проведена плоскость α , параллельная прямой KM и пересекающая ребро NN_1 в точке F .
- Докажите, что плоскость α делит ребро NN_1 пополам.
 - Найдите угол между плоскостью α и плоскостью грани $KLMN$, если известно, что $KL = 6$, $KK_1 = 4$.
43. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 6. Через точки A , C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.
- Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.
 - Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .
44. В треугольной пирамиде $ABCD$ двугранные углы при рёбрах AD и BC равны $AB = BD = DC = AC = 5$.
- Докажите, что $AD = BC$.
 - Найдите объём пирамиды, если двугранные углы при AD и BC равны 60° .
45. В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 12 и радиусом основания 6 проведена хорда AB , равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD , перпендикулярный AB . Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD , лежат с одной стороны от сечения.
- Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.
 - Найдите объём пирамиды $CABNM$.
46. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 7. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .
- Докажите, что $A_1P : PB_1 = 1 : 3$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1 .
 - Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .
47. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 5. На рёбрах SA , AB , BC взяты точки P , Q , R соответственно так, что $PA = AQ = RC = 2$.

- а) Докажите, что плоскость PQR перпендикулярна ребру SD .
б) Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR .

48. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK = 1$. Точки M и L — середины рёбер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

- а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ ;
б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .

49. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{2}$. На ребрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = 4$, $C_1 L = 5$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

- а) Докажите, что прямая AC_1 перпендикулярна плоскости γ ;
б) Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости γ .

50. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB , CD и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = DN = 4$ и $AK = 3$.

- а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC .

51. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 6. На рёбрах AA_1 и CC_1 отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = 2$, $CN = 1$.

- а) Докажите, что плоскость MNB_1 разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.
б) Найдите объём тетраэдра MNB_1 .

52. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна $2\sqrt{3}$, а высота SH пирамиды равна 3. Точки M и N — середины рёбер CD и AB , соответственно, а NT — высота пирамиды $NSCD$ с вершиной N и основанием SCD .

- а) Докажите, что точка T является серединой SM .
б) Найдите расстояние между NT и SC .

53. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 12, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{6}$. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L , соответственно, причём $AK = 2$, а $B_1L = 4$. Точка M — середина ребра A_1C_1 . Плоскость γ параллельна ребру AC и содержит точки K и L .

- а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .
б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .

54. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 12, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{6}$. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L , соответственно, причём $AK = B_1L = 3$. Точка M — середина ребра A_1C_1 . Плоскость γ параллельна ребру AC и содержит точки K и L .

- а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .
б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .

55. Есть правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания 12 и высотой 3. Точка K — середина BC , точка L лежит на стороне A_1B_1 так, что $B_1L = 5$. Точка M — середина A_1C_1 .

Через точки K и L проведена плоскость таким образом, что она параллельна прямой AC .

- а) Доказать, что указанная выше плоскость перпендикулярна прямой MB .
б) Найти объём пирамиды с вершиной в точке B и у которой основанием является сечение призмы плоскостью.

56. На рёбрах CD и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 4$, а $B_1Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M .

- а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .
б) Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ .

57. На рёбрах DD_1 и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 8 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 7$, а $B_1Q = 3$. Плоскость A_1PQ пересекает ребро CC_1 в точке M .

- а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .
б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости A_1PQ .

58. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 12, а высота призмы равна 2. На рёбрах B_1C_1 и AB отмечены точки P и Q соответственно, причём $PC_1 = 3$, а $AQ = 4$. Плоскость A_1PQ пересекает ребро BC в точке M .

- а) Докажите, что точка M является серединой ребра BC .
 б) Найдите расстояние от точки B до плоскости A_1PQ .

59. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{2}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1 L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

- а) Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .
 б) Найдите расстояние от точки B до плоскости γ .

60. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точки P и Q — середины рёбер $A_1 B_1$ и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро $B_1 C_1$ в точке U .

- а) Докажите, что $B_1 U : UC_1 = 2 : 1$.
 б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью APQ .

61. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C , $AC = 4$, $BC = 16$, $AA_1 = 4\sqrt{2}$. Точка Q — середина ребра $A_1 B_1$, а точка P делит ребро $B_1 C_1$ в отношении $1 : 2$, считая от вершины C_1 . Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M .

- а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .
 б) Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости APQ .

62. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Расстояние между этими хордами равно $\sqrt{730}$.

- а) Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по разные стороны от этой плоскости.
 б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

63. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона основания $AB = 7\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 8$.

- а) Докажите, что плоскость BCA_1 перпендикулярна плоскости проходящей через ребро AA_1 и середину ребра $B_1 C_1$.
 б) Найдите тангенс угла между плоскостями BCA_1 и $BB_1 C_1$.

64. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 4. Точка L — середина ребра SC . Тангенс угла между прямыми BL и SA равен $\frac{2\sqrt{34}}{17}$.

- а) Пусть O — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые BO и LO перпендикулярны.
 б) Найдите площадь поверхности пирамиды.

65. Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды 144.

- а) Докажите, что угол между плоскостью SAC и плоскостью, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания, равен 45° .
 б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью SAC .

66. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.

- а) Докажите, что SA — высота пирамиды.
 б) Найдите угол между прямыми SC и BD .

67. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка M середина ребра $C_1 D_1$, а точка K делит ребро AA_1 в отношении $AK : KA_1 = 1 : 3$. Через точки K и M проведена плоскость α , параллельная прямой BD и пересекающая диагональ $A_1 C$ в точке O .

- а) Докажите, что плоскость α делит диагональ $A_1 C$ в отношении $A_1 O : OC = 3 : 5$.
 б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью (ABC) , если дополнительно известно, что $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб.

68. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка F середина ребра AB , а точка E делит ребро DD_1 в отношении $DE : ED_1 = 6 : 1$. Через точки F и E проведена плоскость α , параллельная прямой AC и пересекающая диагональ $B_1 D$ в точке O .

- а) Докажите, что плоскость α делит диагональ DB_1 в отношении $DO : OB_1 = 2 : 3$.
 б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью (ABC) , если дополнительно известно, что $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — правильная четырёхугольная призма, сторона основания которой равна 4, а высота равна 7.

- 69.** Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.
- Докажите, что грань $ABCD$ — квадрат.
 - Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.
- 70.** В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 4$ и диагональю $BD = 7$. Все боковые рёбра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E , а на ребре AS — точка F так, что $SF = BE = 3$.
- Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB .
 - Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q . Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC .
- 71.** Длина диагонали куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 3. На луче A_1C отмечена точка P так, что $A_1P = 4$.
- Докажите, что $PBDC_1$ — правильный тетраэдр.
 - Найдите длину отрезка AP .
- 72.** На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM : BM = CN : NB = 1 : 2$. Точки P и Q — середины сторон DA и DC соответственно.
- Докажите, что P, Q, M и N лежат в плоскости.
 - Найти отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.
- 73.** Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.
- Докажите, что $AA_1 = AC$.
 - Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 , если $AC = 6$, $BC = 3$.
- 74.** В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра: $SA = SB = 13$, $SC = 3\sqrt{17}$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC . Эта высота равна 12.
- Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
 - Найдите объём пирамиды $SABC$.
- 75.** В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра: $SA = SB = 7$, $SC = 5$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC . Эта высота равна 4.
- Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
 - Найдите объём пирамиды $SABC$.
- 76.** Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 6. Точки K, L и M — центры граней $ABCD, AA_1D_1D$ и CC_1D_1D соответственно.
- Докажите, что B_1KLM — правильная пирамида.
 - Найдите объём B_1KLM .
- 77.** Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Диагонали боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C равны 15 и 9 соответственно, $AB = 13$.
- Докажите, что треугольник BA_1C_1 прямоугольный.
 - Найдите объём пирамиды AA_1C_1B .
- 78.** $SABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида с вершиной S . Точка M расположена на SD так, что $SM : SD = 2 : 3$. P — середина ребра AD , а Q середина ребра BC .
- Доказать, что сечение пирамиды плоскостью MQP — равнобедренная трапеция.
 - Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость MQP разбивает пирамиду.
- 79.** Дана пирамида $PABCD$, в основании — трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Известно, что сумма углов BAD и ADC равна 90 градусов, а плоскости PAB и PCD перпендикулярны основанию, прямые AB и CD пересекаются в точке K .
- Доказать, что плоскость PAB перпендикулярна плоскости PCD .
 - Найдите объём $PKBC$, если $AB = BC = CD = 2$, а высота равна 12.
- 80.** Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$ с прямоугольником $ABCD$ в основании. Сторона AB равна 4, а BC равна $4\sqrt{2}$. Вершина пирамиды S проектируется в центр пересечения диагоналей прямоугольника. Из вершины A и C на ребро SB опущены перпендикуляры AP и CQ .
- Докажите, что точка P является серединой отрезка BQ .
 - Найдите угол между плоскостями SBA и SBC , если ребро SD равно 8.

81. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$ с прямоугольником $ABCD$ в основании. Сторона AB равна $3\sqrt{2}$, а BC равна 6. Выста пирамиды проектируется в центр пересечения диагоналей прямоугольника. Из вершины A и C на ребро SB опущены перпендикуляры AP и CQ .

- а) Докажите, что точка P является серединой отрезка BQ .
- б) Найдите угол между плоскостями SBA и SBC , если ребро SD равно 9.

82. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Грань ACC_1A_1 является квадратом.

- а) Докажите, что прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.
- б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 , если $AC = 4$, $BC = 7$.

83. В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 13$, $PB = 15$, $\cos \angle PBA = \frac{48}{65}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C . Прямые PA и BC перпендикулярны.

- а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
- б) Найдите объем пирамиды $PABC$.

84. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 5. На ребрах SA , AB , BC взяты точки P , Q , R соответственно так, что $PA = AQ = RC = 2$.

- а) Докажите, что плоскость PQR перпендикулярна ребру SD .
- б) Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR .

85. Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, $AB = AA_1$.

- а) Докажите, что прямые A_1C и BD перпендикулярны.
- б) Найдите объем призмы, если $A_1C = BD = 2$.

86. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны рёбра: $AB = 4\sqrt{2}$, $AA_1 = 4$. Точка M — середина ребра BC .

- а) Докажите, что прямые B_1C и C_1M перпендикулярны.
- б) Найдите угол между прямой C_1M и плоскостью грани ABB_1A_1 .

87. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна боковому ребру SA . Медианы треугольника SBC пересекаются в точке M .

- а) Докажите, что $AM = AD$.
- б) Точка N — середина AM . Найдите SN , если $AD = 6$.